Riv. Mat. Univ. Parma (6) 3* (2000), 199-213

C. Pellegrino e C. Fiori (*)

Piani formalmente euclidei (**)

In memoria di Francesco Speranza

Sembrerebbe un paradosso, ma non lo è: alzando troppo il livello dell'insegnamento [della Geometria], il prodotto — cioè quello che gli studenti effettivamente acquisiscono — diminuisce, anzi, oltre un certo limite di difficoltà crolla «verticalmente» [...]

Un approccio multiforme e graduale dava invece la possibilità agli studenti di entrare (o di avanzare) nella comprensione della Geometria, e di formarsi delle basi utili sia per corsi più specialistici nel secondo biennio, sia per capire la Matematica elementare «dall'alto».

Francesco Speranza (1988, p.13)

Le idee matematiche hanno origine a livello empirico... Ma una volta che esse sono state concepite in questo modo, l'argomento comincia a vivere di vita propria e viene paragonato con maggiore facilità a qualcosa di creativo, governato quasi del tutto da motivazioni estetiche [...]

Mentre si diffonde, o dopo numerosi incroci «astratti», la disciplina matematica rischia la degenerazione [...] qualora si raggiunga tale stadio, l'unico rimedio mi sembra essere il ritorno rivivificante alla fonte: una nuova introduzione di idee più o meno direttamente empiriche.

John von Neumann (1947, ed. 1961, p. 9)

Attualmente all'Università, nei corsi di Geometria, è invalsa la tendenza di presentare i piani e gli spazi (affini o proiettivi) a partire da spazi vettoriali su un campo $\boldsymbol{K}$. In particolare il piano euclideo è caratterizzato a partire da un piano affine sul campo $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali in cui si fissa la metrica euclidea. In questa *im-*

(*) Dip. Matematica, Università, via Campi 213/B, 41100 Modena, e-mail: pellegrino@unimo.it; Dip. Economia Politica, Università, via Berengario 51, 41100 Modena, e-mail: fiori@unimo.it

(**) Ricevuto il 28 Novembre 1999. Classificazione AMS 51 A 30, 51 E 15.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività finanziate dal MURST.

postazione algebrica la congruenza di segmenti e l'ortogonalità delle rette vengono a dipendere da $\boldsymbol{R}$ e dal suo ordinamento.

La suddetta impostazione di fatto tiene nascosti — non solo alle nuove leve di ingegneri, informatici, fisici, astronomi, ma anche a quelle dei matematici — importanti aspetti geometrici fondazionali che, come evidenziato da Hilbert nei *Grundlagen der Geometrie* (la prima edizione è del 1899), si possono ricondurre al teorema (dei triangoli omologici) di Desargues ed al teorema di Pappo-Pascal (il primo dei quali è valido in un qualunque piano, affine o proiettivo, costruito a partire da un corpo $\boldsymbol{K}$ mentre il secondo è valido solo se $\boldsymbol{K}$ è commutativo).

In effetti le suddette indicazioni di Hilbert hanno aperto un filone di ricerche che «procedendo in senso inverso» alla impostazione algebrica ha portato alla *coordinatizzazione dei piani,* affini o proiettivi, definiti mediante assiomi geometrici (*cfr.* Hall 1943; per una rassegna sui primi studi al riguardo *cfr.* Bruck 1955). In particolare queste ricerche hanno evidenziato che a partire da un piano proiettivo (o affine) π desarguesiano (ossia un piano in cui vale il teorema dei triangoli omologici) è possibile costruire un corpo $\boldsymbol{K}$ tale che i punti di π si rappresentano mediante coordinate in $\boldsymbol{K}$ e le rette mediante equazioni lineari (*cfr.* ad es. Segre 1961, pp. 157 e segg.). Tale corpo, che è unico a meno di isomorfismi, risulta commutativo se il piano è pappiano ([1]), ossia soddisfa il teorema di Pappo-Pascal.

È naturale quindi porsi il problema di stabilire quali condizioni aggiungere ad un piano affine pappiano π per poter:

a) trattare le nozioni di *congruenza* (dei segmenti) e di *ortogonalità* (delle rette);

b) definire le nozioni di *similitudine* ed *isometria*;

c) esplicitare le condizioni analitiche che consentono di caratterizzare sia le nozioni di *congruenza* e *ortogonalità,* sia quelle di *similitudine* ed *isometria*;

d) stabilire quando π è *formalmente euclideo* (ossia quando le equazioni delle affinità e le condizioni citate al punto precedente coincidono con quelle valide nel piano euclideo).

In questa nota, dopo aver brevemente illustrato la coordinatizzazione dei piani affini pappiani (da noi dettagliatamente illustrata in Fiori e Pellegrino 1995 e 1996), indicheremo un modo per raggiungere il suddetto obiettivo a partire da un prototipo di «triangolo rettangolo isoscele». Ciò evidenzierà che per caratterizzare il piano euclideo non è necessario partire da $\boldsymbol{R}$: *la classe dei piani affini che sono*

([1]) Per un teorema di Hessenberg del 1905 ogni piano pappiano è desarguesiano.

formalmente euclidei coincide con quella dei piani staudtiani (la cui definizione prescinde dall'ordinamento delle rette) ([2]). Questo tipo di approccio, a differenza di quello algebrico, permetterà di evidenziare che i piani più «esotici» non sono da ricercare tra i piani finiti ma tra quelli (finiti o no) che hanno una sola retta isotropa.

1 - Preliminari

Dato un insieme non vuoto $\mathcal{P}$, i cui elementi sono detti punti, ed un insieme $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi non vuoti di $\mathcal{P}$, i cui elementi sono detti rette, si dice che $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è un *piano affine* (o più semplicemente *piano*) se soddisfa i seguenti assiomi:

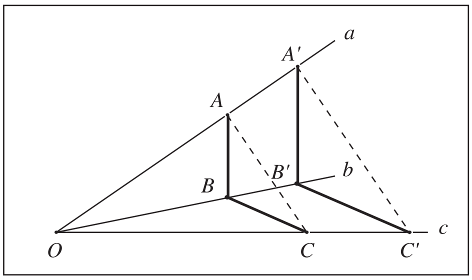

Fig. 1

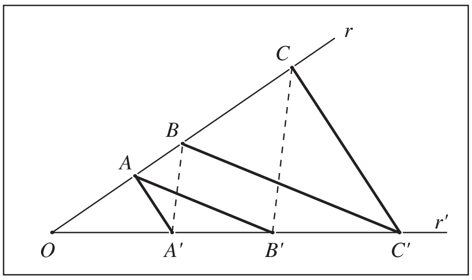

Fig. 2

A) *Due qualsiasi punti distinti appartengono ad una ed una sola retta.*

B) *Per ogni retta* $\boldsymbol{r}$ *e per ogni punto* P *esiste una ed una sola retta* $\boldsymbol{r}'$ *passante per* P *e parallela ad* $\boldsymbol{r}$ (due rette $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{r}'$ si dicono *parallele* se $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ oppure $\boldsymbol{r} \cap \boldsymbol{r}' = \emptyset$).

C) *Esistono almeno tre punti non appartenenti alla stessa retta.*

Le rette di π hanno tutte la stessa cardinalità che se finita, come accade nel caso dei piani costruiti a partire da un campo finito, è detta *ordine* di π. La relazione di parallelismo, indicata con «$\|$», è una relazione di equivalenza le cui classi sono

---

([2]) Karl Georg von Staudt (1797-1867), allievo di Gauss, in un volume del 1848, abbandonando il metodo di deduzione metrico-proiettivo, ha fondato la geometria proiettiva su concetti e postulati esclusivamente grafici dandole un indirizzo autonomo e puramente sintetico. Una sistemazione critica dell'opera di von Staudt si trova in un volume di Enriques del 1898 che, oltre a varie edizioni e numerose ristampe in italiano, ha avuto una traduzione in tedesco nel 1903 (voluta da F. Klein), una in francese nel 1930 ed una litografata in inglese per gli studenti delle università americane.

dette *direzioni.* Come d'uso, diremo *allineati* punti che appartengono ad una medesima retta ed indicheremo con AB la retta individuata dai punti A e B, ecc.

Dati due piani affini $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ e $\pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{R}')$, si dice che una biiezione σ di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}'$ è una *affinità* di π in π' se l'immagine di una qualunque retta di π è una retta di π'.

Dalla precedente definizione segue che una affinità manda rette parallele in rette parallele e che le affinità di un piano in sé stesso formano un gruppo. Ovviamente *una affinità manda punti allineati in punti allineati*, ma si può dimostrare che vale anche il viceversa.

Si dice che un piano affine π è *desarguesiano* se vale il seguente assioma (fig. 1):

D) *Qualunque siano i triangoli* ABC *ed* $A'B'C'$ *se le rette* AA', BB', CC', *sono distinte e si incontrano in uno stesso punto* (*o sono parallele*), *si ha che se* $AB \| A'B'$ *e* $BC \| B'C'$; *allora* $AC \| A'C'$. (3)

Si dice che un piano affine π è *pappiano* se vale il seguente assioma (fig. 2):

P) *Qualunque siano le rette* $\mathbf{r}$ *ed* $\mathbf{r}'$ *che si intersecano in un punto* O *ed i punti* A, B, C *ed* A',B',C', *rispettivamente su* $\mathbf{r}$ *ed* $\mathbf{r}'$, *distinti tra loro e da* O, *si ha che se* $AA' \| CC'$ *e* $AB' \| BC'$; *allora* $BA' \| CB'$.

Si dice che un piano affine desarguesiano π è *staudtiano* se soddisfa il seguente assioma:

S) *Ogni affinità di* π *in sé avente tre distinte direzioni unite, conserva la direzione delle rette.*

Per introdurre un *sistema di riferimento* in un piano affine π basta fissare una terna (O, V, W) di suoi punti non allineati (fig. 3): il punto O fungerà da *origine,* la retta $\boldsymbol{x} = OV$ fungerà da *asse delle ascisse,* la retta $\boldsymbol{y} = OW$ da *asse delle ordinate,* il punto U d'intersezione della parallela all'asse $\boldsymbol{x}$ passante per W con la parallela all'asse $\boldsymbol{y}$ passante per V fungerà da *punto unità.* Nel seguito chiameremo *bisettrice principale* la retta $\boldsymbol{v} = OU$ e *bisettrice secondaria* la retta $\boldsymbol{w}$ passante per O e parallela alla retta VW.

L'*insieme delle coordinate* di un piano affine π è un insieme $\boldsymbol{K}$ di simboli, fra cui «$\mathbb{0}$» ed «$\mathbb{1}$», in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta $\boldsymbol{v}$ tale che O ed U siano rispettivamente i corrispondenti di $\mathbb{0}$ ed $\mathbb{1}$.

Preso un punto P di π se $P \in \boldsymbol{v}$ e P è il corrispondente di $x \in \boldsymbol{K}$, allora a P *si*

(3) A partire da $\boldsymbol{D}$ si può dimostare il suo inverso. Hilbert, nei *Grundlagen,* dà un esempio di piano non desarguesiano. Nello spazio, invece, $\boldsymbol{D}$ vale sempre: è una conseguenza degli assiomi di collegamento.

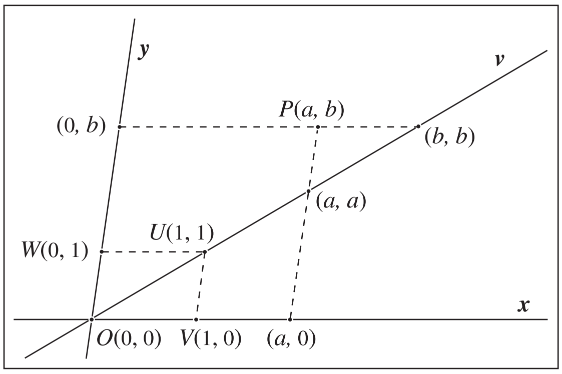

Fig. 3

assegnano le coordinate (x, x). Ovviamente O avrà coordinate $(\mathbb{0}, \mathbb{0})$ ed U avrà coordinate $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$. Se invece (cfr. fig. 3) $P \notin \boldsymbol{v}$ e le coordinate dei punti di intersezione di $\boldsymbol{v}$ con le rette passanti per P e parallele agli assi $\boldsymbol{y}$ ed $\boldsymbol{x}$ sono (a, a) e (b, b) rispettivamente, allora a P *si assegnano le coordinate* (a, b). Per quanto detto i punti V e W hanno rispettivamente coordinate $(\mathbb{1}, \mathbb{0})$ e $(\mathbb{0}, \mathbb{1})$.

Presi due elementi $a, b \in \boldsymbol{K}$ si definisce come *somma* di a e b (fig. 4), che indicheremo con $a + b$, l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per $(\mathbb{0}, b)$ e parallela a $\boldsymbol{v}$ con la retta passante per (a, a) e parallela all'asse $\boldsymbol{y}$.

Presi due elementi $a, b \in \boldsymbol{K} - \{\mathbb{0}\}$ si definisce come *prodotto* di a e b (fig. 5), che indicheremo con $a \cdot b$ (o più semplicemente con ab), l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per l'origine O e per il punto $(\mathbb{1}, a)$ con la retta passante per (b, b) e parallela all'asse $\boldsymbol{y}$. A completamento della precedente definizione si pone $a \cdot \mathbb{0} = 0 \cdot a = \mathbb{0}$ per ogni $a \in \boldsymbol{K}$.

Riguardo alla coordinatizzazione dei piani affini valgono i due teoremi seguenti:

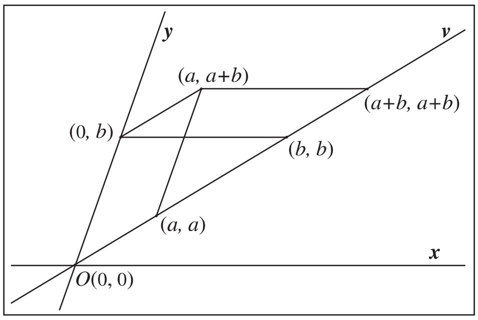

Fig. 4

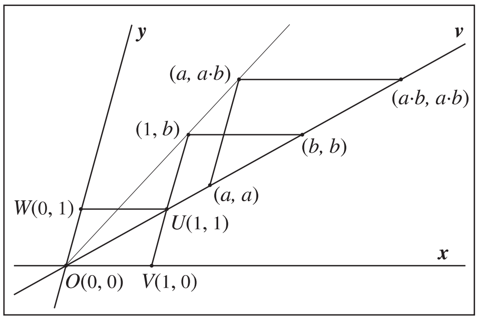

Fig. 5

Teorema 1 (*cfr.* ad es. Segre 1948 ed. 1961, p. 167). *Se π è un piano affine desarguesiano la terna $(\boldsymbol{K}, +, \cdot)$ è un corpo, che ha $\mathbb{0}$ ed $\mathbb{1}$ rispettivamente come elementi neutri della somma e del prodotto, e questo corpo, che è unico a meno di isomorfismi, è commutativo se π è pappiano.*

Teorema 2 (*cfr.* ad es. Segre 1948 ed. 1961, p. 200). *Un piano staudtiano π risulta pappiano ed il campo $\boldsymbol{K}$ ad esso associato è privo di automorfismi non identici. Viceversa se un piano affine è coordinatizzabile sopra un campo $\boldsymbol{K}$ privo di automorfismi non identici, esso è staudtiano.*

Il piano euclideo (in cui $\boldsymbol{K}$ coincide con il campo dei reali) è staudtiano mentre il piano complesso non lo è. Invece il piano costruito a partire dal campo $GF(p^k)$ di caratteristica p, con p primo, è staudtiano se e solo se $k = 1$.

La caratteristica del corpo $\boldsymbol{K}$ associato a π è detta *caratteristica del piano.* La caratteristica di π è due se e solo se la bisettrice principale coincide con quella secondaria. In un piano affine π pappiano si ha che per quanto riguarda punti e rette valgono le usuali condizioni e risultati di geometria analitica. In particolare:

1.1) Tre punti distinti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, sono *allineati* se e solo se

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = \mathbb{0}\,.$$

1.2) Una retta $\boldsymbol{r}$ può essere rappresentata mediante una *equazione* del tipo $ax + by + c = \mathbb{0}$ con $a, b, c \in \boldsymbol{K}$ e con a e b non contemporaneamente nulli (4).

Invece per quanto riguarda la rappresentazione delle affinità di π c'è qualche differenza:

1.3) Le *equazioni di una affinità* σ sono

$$\begin{cases} x' = a\vartheta(x) + b\vartheta(y) + p \\ y' = c\vartheta(x) + d\vartheta(y) + q \end{cases} \qquad (\text{con } \Delta = ad - bc \neq 0)$$

ove $a, b, c, d, p, q \in \boldsymbol{K}$ e ϑ è un automorfismo di $\boldsymbol{K}$.

(4) Gli *assi* $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ hanno rispettivamente equazione $y = 0$ e $x = 0$. Le bisettrici principale e secondaria hanno rispettivamente equazione $y = x$ ed $y = -x$.

1.4) Le *equazioni della inversa* σ^{-1} di σ sono

$$\begin{cases} x = \vartheta^{-1}\left(\dfrac{dx' - by' - pd + bq}{\Delta}\right) \\ y = \vartheta^{-1}\left(\dfrac{ay' - cx' - qa + pc}{\Delta}\right) \end{cases} \qquad (\text{con } \Delta = ad - bc \neq 0).$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano pappiano π (*qualunque sia la sua caratteristica*):

– *la condizione di allineamento e la rappresentazione delle rette coincidono con quelle del piano euclideo*;

– *la rappresentazione delle affinità coincide con quella del piano euclideo se e solo se π è staudtiano.*

Nei prossimi paragrafi mostremo come nei piani affini pappiani, postulando l'esistenza di un «triangolo rettangolo isoscele» e senza l'ausilio di altri assiomi, sia possibile definire e caratterizzare analiticamente le nozioni di ortogonalità, congruenza, similitudine ed isometria ([5])([6]).

Definizione. Chiamiamo piano affine marcato una terna $\pi^* = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{T})$ tale che $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è un piano affine pappiano e $\mathcal{T} = (O, V, W)$ è una terna fissata di punti non allineati di π^*.

Nel seguito, come sistema di riferimento di un piano marcato π^* considereremo sempre il sistema di riferimento ottenuto a partire dalla terna $\mathcal{T}$.

2 - Ortogonalità e similitudini

Per introdurre in un piano marcato π^* la relazione di ortogonaltà, «$\perp$», tra le rette cominciamo con introdurla fra le rette del fascio Φ_O di centro O:

([5]) Questa idea non sorprende se si considera che la *restituzione prospettica* consente di realizzare rilievi territoriali o architettonici a partire (perfino) da una fotografia o da una prospettiva in cui è presente la rappresentazione di un quadrato: si veda ad esempio la ricostruzione dell'ambiente raffigurato in un celebre dipinto rinascimentale effettuata da R. Wittkower e B.A.R. Carter (1953, The perspective of Piero della Francesca's Flagellation, *J. Warburg & Courtauld Inst.*, XVI, pp. 292-302).

([6]) In effetti per definire l'ortogonalità delle rette basterebbe postulare l'esistenza di due coppie di rette mutuamente ortogonali.

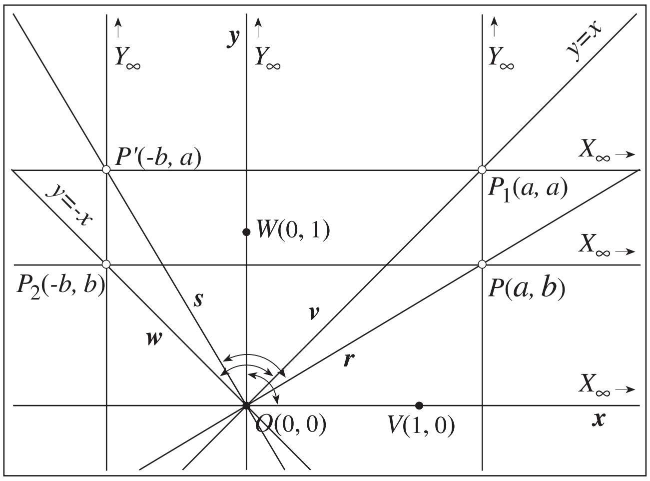

Fig. 6

Definizione (cfr. fig. 6). Siano $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ due rette del fascio Φ_O, diciamo che $\boldsymbol{r}$ *è ortogonale ad* $\boldsymbol{s}$ e scriveremo $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{s}$, se preso un punto P di $\boldsymbol{r}$ distinto da O ed indicati con:

– P_1 il punto di intersezione di $\boldsymbol{v}$ con la retta per P parallela all'asse $\boldsymbol{y}$;

– P_2 il punto di intersezione di $\boldsymbol{w}$ con la retta per P parallela all'asse $\boldsymbol{x}$;

– $P^\perp$ il punto d'intersezione della parallela ad $\boldsymbol{x}$ passante per P_1 con la parallela ad $\boldsymbol{y}$ passante per P_2;

si ha che $P^\perp \in \boldsymbol{s}$ (7)(8).

Dalla precedente definizione, considerata la reversibilità della costruzione che porta da P a $P^\perp$, segue che l'ortogonalità è una involuzione tra le rette di Φ_O e ciò comporta che per ogni retta $\boldsymbol{r}$ passante per O esiste in Φ_O una ed una sola retta $\boldsymbol{s}$ tale che $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{s}$.

Dal momento che il punto $P(b, -a)$ sta sulla retta $\boldsymbol{r}: ax + by = 0$ e che $P^\perp$ risulta avere coordinate (a, b), si ha che:

(7) Questa definizione, che è suggerita dal teorema del quadrilatero completo di Desargues (per il quale rinviamo ad Enriques 1920$^{\text{IV}}$, pp. 152-154), è ben posta: basta utilizzare l'assioma $\boldsymbol{D}$ per verificare che la retta $\boldsymbol{s}$ non dipende dalla scelta del punto P.

(8) Facciamo notare che se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, e solo in questo caso, la costruzione di $P^\perp$ coincide con la costruzione che, nel piano euclideo, consente di costruire il simmetrico di un punto rispetto a $\boldsymbol{v}$.

2.1) Due rette $\boldsymbol{r}_1$: $a_1 x + b_1 y = 0$ ed $\boldsymbol{r}_2$: $a_2 x + b_2 y = 0$, passanti per l'origine, sono *ortogonali* se e solo se $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ (9).

Analogamente due rette $\boldsymbol{r}_1$: $y = m_1 x$ ed $\boldsymbol{r}_2$: $y = m_2 x$ sono *ortogonali* se e solo se $m_1 m_2 = -1$.

Diciamo che una retta è *isotropa* se essa è ortogonale a sé stessa.

Da quanto detto se π^* ha caratteristica due allora π^* ha come unica retta isotropa la bisettrice principale (che, in questo caso, coincide con quella secondaria). Considerato che nel piano euclideo non vi sono rette isotrope e che, invece, nel piano complesso ce ne sono due è lecito chiedersi:

– quando accade che π^* ha delle rette isotrope?

– quante possono essere le rette isotrope di π^*?

Dalla condizione di ortogonalità tra rette non parallele all'asse $\boldsymbol{y}$ (*cfr.* 2.1) (10) si ha che in π^* esistono rette isotrope se e solo se esiste un $m \in \boldsymbol{K}$ tale che $m^2 = -1$. (11)

Di conseguenza π^* ha al più due rette isotrope. Questo risultato è in accordo con il fatto che nel piano euclideo reale (o complesso) una involuzione tra gli elementi di una forma di prima specie può avere al più due elementi uniti (*cfr.* ad es. Enriques 1920^{IV}, p. 148).

Estendiamo ora l'ortogonalità a tutte le rette di π^*:

Definizione. Diciamo che due rette $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ di π^* sono *ortogonali* se e solo se lo sono le loro parallele passanti per O.

In un piano marcato π^*, come nel piano euclideo, risulta che:

2.2) Due rette $\boldsymbol{r}_1$: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ed $\boldsymbol{r}_2$: $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ sono ortogonali se e solo se $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Definizione. Una affinità σ di π^* è una *similitudine* se manda rette ortogonali in rette ortogonali ossia se qualunque siano le rette $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ di π^* si ha che $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{s}$ implica $\sigma(\boldsymbol{r}) \perp \sigma(\boldsymbol{s})$.

Dalla condizione (2.2) di ortogonalità delle rette segue che:

2.3) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé di

(9) Gli assi coordinati $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ risultano ortogonali, come pure le bisettrici $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ (anche se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$).

(10) Essendo gli assi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ distinti ed ortogonali tra loro le eventuali rette isotrope sono diverse da $\boldsymbol{y}$.

(11) Nei campi finiti $GF(p^k)$, $p \neq 2$, esiste un m tale che $m^2 = -1$ se e solo se $p^k \equiv 1 \bmod 4$ e quindi nel piano affine costruito a partire da $GF(p^k)$ ci sono due rette isotrope se $p^k \equiv 1 \bmod 4$, ce n'è una se $p = 2$ e non ce ne sono se $p \neq 2$ e $p^k \not\equiv 1 \bmod 4$.

equazioni (1.3) sia una similitudine è che

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \ (^{12}) \end{cases}$$

che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, essendo $ad - bc \neq 0$, è equivalente a

$$\begin{cases} a = d \\ b = c \, . \end{cases}$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano marcato π^* (*qualunque sia la sua caratteristica*):

– *la condizione di ortogonalità delle rette coincide con quella del piano euclideo* ([13]);

– *la rappresentazione delle similitudini coincide con quella del piano euclideo se e solo se* π^* *è staudtiano* ([14]).

3 - Congruenza ed isometrie

Al fine di semplificare il seguito di questa esposizione diamo le definizioni di «segmento», di «parallelogramma», di «rombo» e, a partire da O (primo elemento della terna $\mathcal{C}$) introduciamo una struttura di gruppo definendo nell'insieme dei punti di π^* (mediante le regole del parallelogramma e del doppio parallelogramma) una operazione, «$\oplus$», di addizione.

Qualunque siano i punti A e B di un piano affine π chiamiamo *segmento*, di *primo estremo* A e *secondo estremo* B, la coppia (A, B) che, per comodità, indicheremo con $[A, B]$. Qualunque siano i punti A, B, C, D, di π, a tre a tre non allineati e quindi distinti, diciamo che la quaterna (A, B, C, D) è un *parallelogramma*, e lo indicheremo con $[A, B, C, D]$, se $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$ ([15]).

Diciamo che un parallelogramma $[A, B, C, D]$ di π^* è un *rombo* se le rette AC e BD sono ortogonali tra loro.

([12]) La parte sufficiente si ottiene a partire dal fatto che $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ tenendo conto delle (1.4).

([13]) È una conseguenza della (2.2).

([14]) È una conseguenza della (2.3) e del teorema 1.2.

([15]) Qualunque siano i punti A, B, C, D, se (A, B, C, D) è un parallelogramma, allora lo sono anche (B, C, D, A), (A, D, C, B), ecc. Inoltre se A, B, C, sono tre punti non allineati di π, esiste esattamente un punto X di π tale che (A, B, C, X) è un parallelogramma.

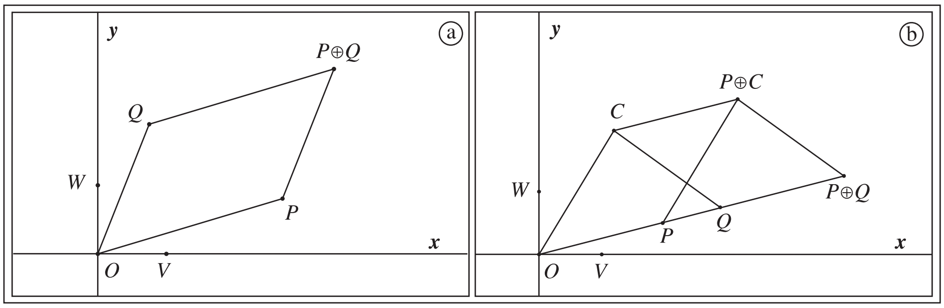

Fig. 7

Presi due punti P e Q di π^* distinti da O, definiamo come *somma* di P e Q, che indicheremo con $P \oplus Q$, il punto X se:

– O, P, Q, non sono allineati e la quaterna (P, O, Q, X) è un parallelogramma (fig. 7a);

– O, P, Q, sono allineati, C è un punto non appartenente alla retta OP $(= OQ)$ e la quaterna $(P \oplus C, C, Q, X)$ è un parallelogramma (fig. 7b). (16)

A completamento della precedente definizione poniamo, qualunque sia il punto P di π^*, $O \oplus P = P \oplus O = P$ (da quanto detto segue che O è elemento neutro per l'operazione «$\oplus$»).

L'insieme dei punti di π^* è un gruppo abeliano rispetto all'operazione $\oplus$: l'op-

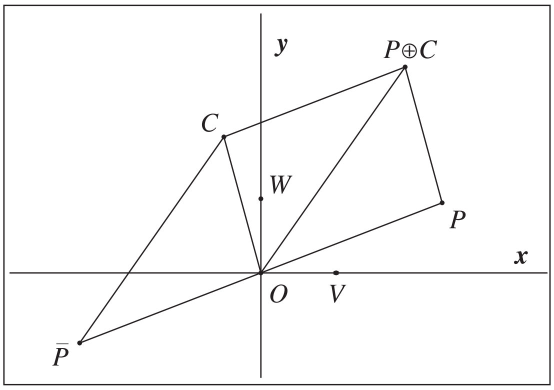

Fig. 8

(16) Dall'assioma ***D*** segue che questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C.

posto $\overline{P}$ di P è il punto X di π^* tale che preso un punto C non appartenente alla retta OP si ha che $(O, P \oplus C, C, X)$ è un parallelogramma (fig. 8) ([17]).

Analogamente a quanto fatto per l'ortogonalità fra rette daremo la definizione della relazione, «≡», di congruenza tra segmenti in due tempi. Per cominciare diamo la definizione di congruenza fra segmenti aventi il primo estremo in O.

Definizione. Siano P_1 e P_2 due punti di π^* (non necessariamente distinti) diciamo che i segmenti $[O, P_1]$ e $[O, P_2]$ sono *congruenti*, e scriveremo $[O, P_1] \equiv [O, P_2]$, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni ([18]):

$$P_1 = P_2;$$

$$P_1 = \overline{P}_2;$$

$$O(P_1 \oplus P_2) \perp O(P_1 \oplus \overline{P}_2).$$

Dalla precedente definizione segue che in π^*:

3.1) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si ha che

$$[O, P_1] \equiv [O, P_2] \text{ se e solo se } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \text{ ([19])}.$$

Estendiamo ora la relazione di congruenza a tutti i segmenti di π^*.

Definizione. Qualunque siano i punti P_1, P_2, P_3, P_4, diciamo che

$$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4] \text{ se e solo se } [O, P_2 \oplus \overline{P}_1] \equiv [O, P_4 \oplus \overline{P}_3].$$

In un piano marcato π^*, come nel piano euclideo, risulta che:

3.2) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$

$$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4] \text{ se e solo se } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

([17]) Dall'assioma ***D*** segue che anche questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C.

([18]) Questa definizione si ispira al fatto che nel piano euclideo due segmenti aventi uno estremo in comune sono congruenti se e solo se o coincidono, o sono opposti, oppure sono due lati consecutivi di un rombo.

([19]) Se la caratteristica di π^* è due la condizione diviene $[0, P_1] \equiv [0, P_2]$ se e solo se $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, è equivalente a

$$[P_1, P_2] \equiv [P_3, P_4] \text{ se e solo se } x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_3 + x_4 + y_3 + y_4.$$

3.3) La congruenza fra i segmenti è una relazione di equivalenza.

Definizione. Una affinità σ di π^* è una *isometria* se qualunque siano i punti P, Q di π^* si ha che $[\sigma(P), \sigma(Q)] \equiv [P, Q]$.

Dalla condizione di congruenza (3.2) dei segmenti segue che:

3.4) Condizione necessaria affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} 2(ab + cd) = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ \vartheta(x^2) = x^2 \end{cases} \quad (^{20})(^{21})(^{22}).$$

È facile verificare che vale anche il viceversa di (3.4) e quindi:

3.5) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ \vartheta = id_{\boldsymbol{K}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 1 \\ \vartheta = id_{\boldsymbol{K}} \end{cases}$$

a seconda che la caratteristica γ di π^* sia diversa o uguale a due.

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano marcato π^*:

– *la condizione di congruenza dei segmenti coincide con quella del piano euclideo* [23];

– *la rappresentazione delle isometrie coincide con quella del piano euclideo*;

([20]) Queste eguaglianze seguono dal fatto che $[\sigma(V), \sigma(W)] \equiv [V, W]$, $[\sigma(O), \sigma(V)] \equiv [O, V]$, $[\sigma(O), \sigma(W)] \equiv [O, W]$ e che per ogni $x \in \boldsymbol{K}$ $[\sigma(O), \sigma(P)] \equiv [O, P]$.

([21]) La quarta equazione è equivalente a $\vartheta = id_{\boldsymbol{K}}$: se $\gamma \neq 2$ ciò è una conseguenza della eguaglianza $(\vartheta(x+1))^2 = (x+1)^2$ altrimenti è conseguenza del fatto che $x = -x$.

([22]) Se $\gamma = 2$ la prima equazione è una identità, mentre la seconda e la terza si riducono a $a + c = 1$, $b + d = 1$.

([23]) È una conseguenza della (3.2).

– *se la caratteristica* $\gamma \neq 2$ *oppure* $\boldsymbol{K} = GF(2)$, *analogamente a quanto avviene nel piano euclideo, le isometrie sono similitudini* ([24]);

– *se* $\gamma = 2$ *e* $\boldsymbol{K} \neq GF(2)$, *a differenza di quanto avviene nel piano euclideo, esistono isometrie che non sono similitudini* ([25]).

4 - Conclusioni

Il presente studio ci ha permesso di evidenziare analogie e differenze tra il piano euclideo ed un piano marcato π^*. In particolare dalle analogie è emerso che *i piani formalmente euclidei sono tutti e soli i piani staudtiani* mentre dalle differenze è emerso che *nei piani di caratteristica due non staudtiani, e che quindi hanno più di quattro punti, esistono isometrie che non sono similitudini.*

Concludendo rileviamo che, a differenza di quanto appare da altre trattazioni, i piani veramente «esotici» non sono i piani finiti e nemmeno quelli che, come il piano complesso, hanno due rette isotrope ma quelli, finiti o no, che hanno una sola retta isotropa ed hanno più di quattro punti.

5 - Postilla

Siamo consci di alcuni limiti e di vari rilievi che si possono addebitare a questo modo di generalizzare le nozioni di ortogonalità e di congruenza. Noi tuttavia pensiamo che l'argomento possa ancora essere approfondito e sviluppato in modo proficuo sino ad estendere le nozioni di ortogonalità e congruenza allo spazio a tre, o più dimensioni, ed a stabilire le condizioni che assicurano il *trasporto dei segmenti*, l'*orientamento delle figure* ([26]),... Invece da qualche tempo è come se fosse assodato che questi argomenti debbano essere affrontati seguendo l'impo-

---

([24]) È una conseguenza della (3.5) e del teorema 1.1: se $\gamma \neq 2$ è immediato; se $\gamma = 2$ e $\boldsymbol{K} = GF(2)$ basta osservare che in tal caso, e solo in esso, $ad - bc \neq 0$ è equivalente a $ad + bc = 1$ che combinato con le (3.5) comporta che $ab + cd = 0$.

([25]) Ad esempio fissato in $\boldsymbol{K}$ un elemento ε diverso da 0 ed 1, basta osservare che l'applicazione di π^* in sé di equazioni

$$\begin{cases} x' = (1+\varepsilon)\, x + y \\ y' = \varepsilon x \end{cases}$$

è una isometria ma non una similitudine.

([26]) Per un interessante studio sull'orientazione del piano rinviamo a Karzel e Marchi 1997.

stazione algebrica. Per questo saremo molto lieti se questo scritto servirà a rinnovare l'interesse per i fondamenti della Geometria e ad avviare un sereno e ponderato confronto tra i vecchi ed i nuovi modi di impostare l'insegnamento della Geometria: in questa maniera si infonderebbe nuova linfa a questa antica disciplina e si realizzerebbe quello che non è solo un nostro auspicio (sogno?).

Bibliografia

[**1**] R. H. BRUCK, *Recent advances in the foundations of euclidean plane geometry*, Amer. Math. Montly **62** 7 (1955), 2-17.

[**2**] F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria Proiettiva,* Zanichelli, Bologna 1989, IX+379, 1920^{iv}, X+464.

[**3**] C. FIORI and C. PELLEGRINO, *Teoremi configurazionali e coordinatizzazione di piani affini*, La Matematica e la sua Didattica **4** (1995), 431-445.

[**4**] C. FIORI and C. PELLEGRINO, *Alla ricerca delle affinità perdute,* La Matematica e la sua Didattica **1** (1996), 46-56.

[**5**] M. HALL, *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 229-277.

[**6**] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig/Berlin (trad. ital. 1970^{x}, *Fondamenti di Geometria,* Feltrinelli, Milano 1899, XXVI+274).

[**7**] H. KARZEL and M. MARCHI, *L'orientamento nel piano: una difficile razionalizzazione*, in B. D'Amore e C. Pellegrino, *Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza,* Pitagora Editrice, Bologna 1997, 65-73.

[**8**] J. (VON) NEUMANN, *The Mathematician*, in Heywood R.B. (ed.), *Works of the Mind,* University Chicago Press, Chicago 1947 (ripubblicato, in Jhon Neumann - *Collected Works* **1** (1961) 1-9).

[**9**] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna,* Zanichelli, Bologna 1948, **1**, 196 (trad. inglese ampliata, *Lectures on Modern Geometry,* Ed. Cremonese, Roma 1961, 480).

[**10**] F. SPERANZA, *Salviamo la Geometria!*, La Matematica e la sua Didattica **2** (1988), 6-14 (La Matematica e la sua Didattica **1** (1999), 5-16).

Abstract

In this paper we fix geometrical conditions that allow to define and algebraically characterize the notions of congruence, orthogonality, similitude and isometry on a Pappo's affine plane (finite or not). So we state that the class of the affine planes in which the representation of the affine transformations, of the similitudes and of the isometries coincides with those of the euclidean plane is exactly that of the planes by von Staudt. This shows that in order to characterize the euclidean plane it is not necessary to start from the field of real numbers.

* * *