Riv. Mat. Univ. Parma (6) **3*** (2000), 183-197

PAOLA VIGHI (*)

L'uso di mediatori artistici e informatici per l'insegnamento della Geometria (**)

In memoria di Francesco Speranza

L'arte islamica e le opere di Escher e di altri artisti contemporanei possono svolgere quel ruolo di connessione fra arte e scienza che in relazione ad altra epoca è svolto dalla prospettiva e dalla geometria proiettiva.
(F. Speranza, Il valore conoscitivo della geometria, Periodico di Matematiche, Vol. 1, n. 4, ott-dic 1994, p. 13)

Introduzione

È stato il mio maestro, Francesco Speranza, a farmi conoscere ed apprezzare le opere del grafico olandese M. C. Escher; non ricordo esattamente quando, probabilmente vent'anni fa circa. Da allora mi sono sempre più addentrata nello studio dei lavori dell'artista, soprattutto allo scopo di trarne esempi di una didattica della geometria che, basata sull'interdisciplinarità, privilegi un approccio «manipolativo» e «dinamico», promuova un atteggiamento «indagatore», faccia avvertire l'esigenza di strumenti matematici, conduca in modo naturale alla loro conoscenza ed al loro uso, aiuti ad apprezzarne le potenzialità, consenta di compiere analisi approfondite anche in casi complessi (si veda la bibliografia).

Un episodio

Allo scopo di preparare un lavoro di gruppo da proporre al Convegno UMI-CIIM del 1998, che aveva per tema «La matematica e le altre scienze: modelli, ap-

(*) Dipartimento di Matematica, Università, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma Italia.
(**) Ricevuto l'8 Maggio 2000. Classificazione ZDM 97-02, 97 A0 20, 97 U 70.

plicazioni, strumenti didattici», ho pensato di impostare il lavoro su di un'opera di Escher poco conosciuta, che non fosse una delle più note. Ho scelto l'opera «senza titolo» n° 132, ad inchiostro ed acquerello, eseguita nel 1967 a Baarn, città olandese in cui l'artista visse per trent'anni circa. ([**14**] a p. 225):

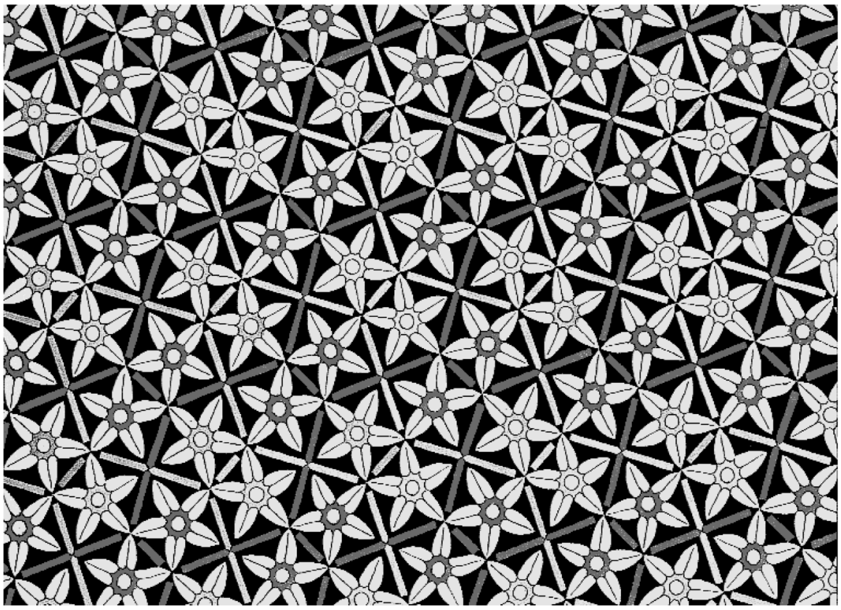

Fig. 1

Ho iniziato a studiarla con l'intento di preparare alcune schede che conducessero ad individuare i concetti e i risultati di geometria delle trasformazioni su cui essa si basa.

Ciò che colpisce a prima vista è l'intreccio degli esagoni, alcuni con contorno rosso, altri con contorno azzurro (in fig. 1 i primi hanno contorno più scuro, i secondi più chiaro; d'ora in poi non si terrà conto colore); si tratta di esagoni non regolari, in quanto equiangoli, ma non equilateri. Osservando attentamente si vede che ciascun esagono è formato da quattro pentagoni congruenti, all'interno dei quali è disegnato un fiore. Il motivo-base è dunque un pentagono irregolare, ma particolare: ha infatti un asse di simmetria, due angoli retti, gli angoli rimanenti di 120°, quattro lati congruenti.

Ho pensato di riprodurne uno utilizzando il software Cabri-Géomètre II. Gli angoli di 120° hanno suggerito di partire da un esagono regolare ABCDEF, che ho costruito così:

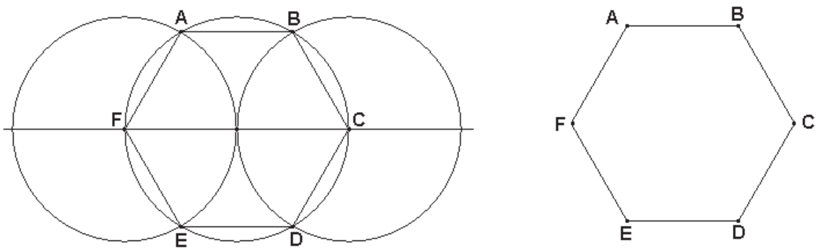

Fig. 2

Per ottenere i due angoli retti ho congiunto i punti B e D con F (poiché i triangoli CBF e CDF sono inscritti in semicirconferenze risultano rettangoli in B e in D), dovevo poi secare i lati BF e DF con un'opportuna retta «verticale». Una qualunque «verticale» individua due angoli di 120° (teorema del fascio di rette parallele tagliate da una trasversale e congruenza degli angoli corrispondenti). Si trattava dunque di tracciarla in modo tale che i segmenti staccati su BF e DF fossero congruenti a BC e DC: ho disegnato la circonferenza di centro B e raggio BC, individuando G, poi la circonferenza di centro D e raggio DC individuando così H.

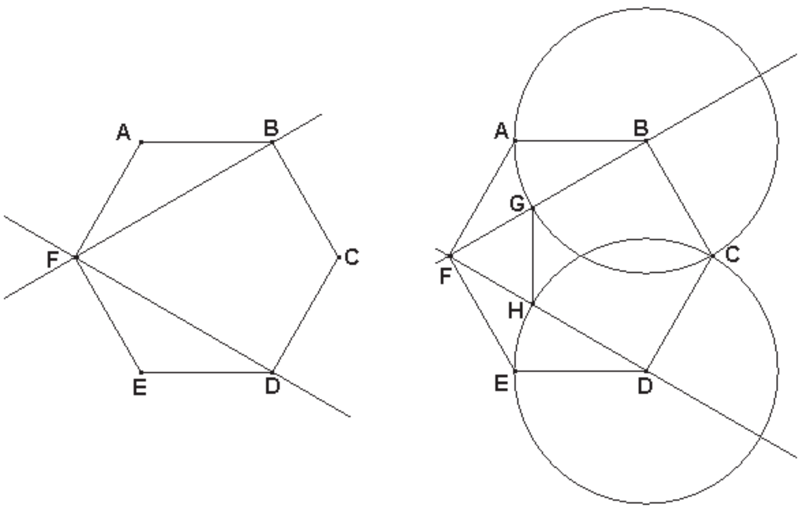

Fig. 3

Alcune considerazioni di carattere didattico: sicuramente quella appena descritta non è l'unica costruzione possibile di un pentagono di quel tipo, ma se uno studente eseguisse proprio quella, svolgerebbe sicuramente un'attività significativa dal punto di vista dell'argomentare in geometria, paragonabile per difficoltà a quella relativa all'esecuzione di una dimostrazione classica, con questa sola differenza: il lavorare a partire da un disegno con l'intento di scoprirne le regole di costruzione, magari utilizzando un computer, è più stimolante per l'allievo. Attività altrettanto importante può essere quella successiva in cui lo studente spiega come ha eseguito la costruzione. In questa fase, in caso di insuccesso, egli ne può comprendere le motivazioni e ritornare a lavorare con il computer per altri tentativi... (1).

Ecco l'immagine che si presentava sullo schermo del computer dopo la costruzione e dopo aver nascosto gli elementi «di disturbo» utilizzati in precedenza:

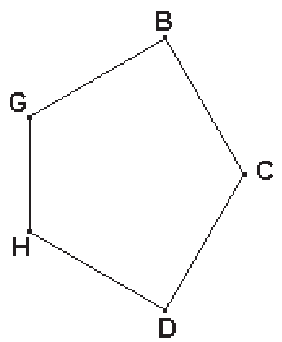

Fig. 4

A partire dal pentagono ho realizzato (utilizzando le funzioni «ruota», «copia» e «incolla») prima un esagono (fig. 5) e poi la maglia esagonale (fig. 6) (che, tra l'altro, in una scuola media inferiore o in un liceo artistico si potrebbe utilizzare per inventare disegni simili a quelli dell'artista).

Ho esaminato il disegno in termini di trasformazioni geometriche e con la «teoria dei 17 gruppi di pattern design di Pólya» (i gruppi cristallografici del pia-

(1) Sulla funzione di Cabri come mediatore nel passaggio dalla formulazione di congetture alla loro validazione, per arrivare a vere e proprie dimostrazioni, stanno svolgendo ricerche D. Paola (Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova. DIMA. Univ. di Genova), O. Robutti (N.R.D. D.M. Univ. di Torino) e M. A. Mariotti (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa).

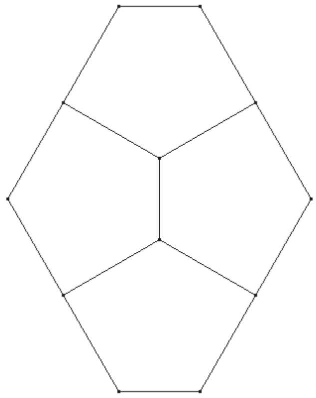

Fig. 5

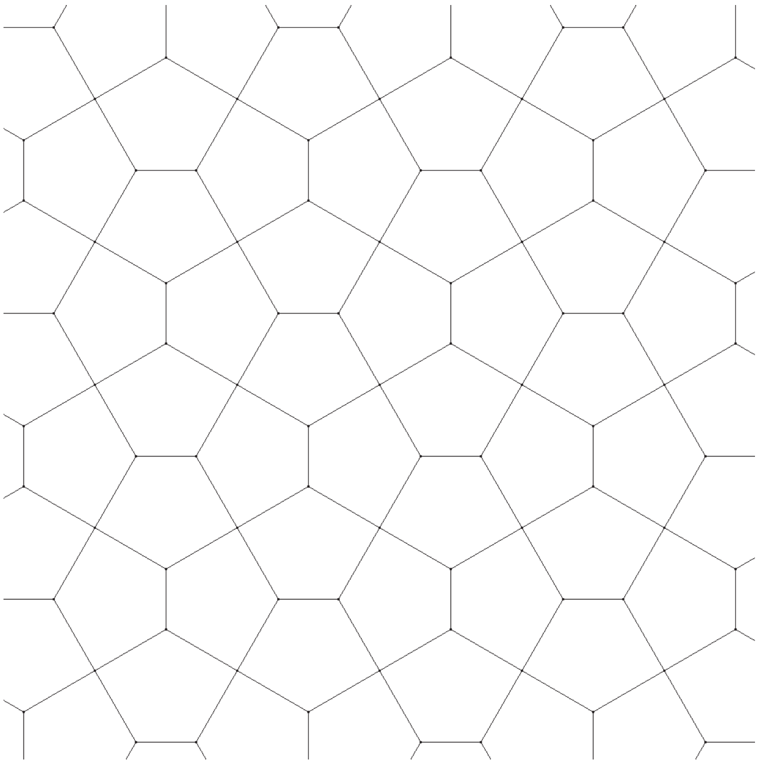

Fig. 6

no), esposta in un famoso articolo intitolato «Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene» («Sull'analogia della simmetria dei cristalli nel piano») pubblicato nel 1924 sulla rivista «Zeitschrift für Kristallographie» ([2]). Il matematico George Pólya classificava le strutture (patterns) che si ottengono con la ripetizione regolare di una figura nel piano, individuando ed illustrando i 17 gruppi di simmetria del piano. L'idea-base è che ogni configurazione decorativa piana si basa su di un reticolo che, a sua volta, è individuato da due vettori di traslazione con direzioni diverse. Ho perciò cercato il reticolo sul quale si basa la decorazione di fig. 1, individuando così due vettori di traslazione tra loro perpendicolari e quindi una maglia quadrata (fig. 7) ed un campo fondamentale quadrangolare (indicato con «1» in fig. 8) che, con rotazioni di 90°, 180°, 270° e 360°, ricopre la maglia (solo allora ho notato le «croci» formate da coppie di segmenti ortogonali!). Ho riprodotto la maglia con Cabri II (fig. 9).

Trattandosi di una maglia quadrata, è chiaro che a partire da disegni basati su quel pentagono si possono costruire cubi (e, con opportune modifiche, dodecaedri) come illustrato in [**15**] a pagina 22.

Il disegno è denotabile come «di tipo C_4» (p4g) nella classificazione dei 17 gruppi di pattern design e le equazioni, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, della trasformazione-generatore del gruppo sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Mi sono chiesta se questo tipo di tassellazione pentagonale fosse stato ideato da Escher. Documentandomi sull'argomento ho appreso che l'artista l'aveva solo rielaborato a partire dalla lettura di un articolo del 1923, del tedesco F. Haag, intitolato «Le

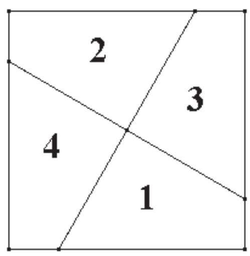

Fig. 7

([2]) Peraltro i gruppi cristallografici erano già noti ai matematici russi, si veda A.V. Shubnikov, V.A. Koptrik «Symmetry in Science and Art», Plenum Press, New York, 1974.

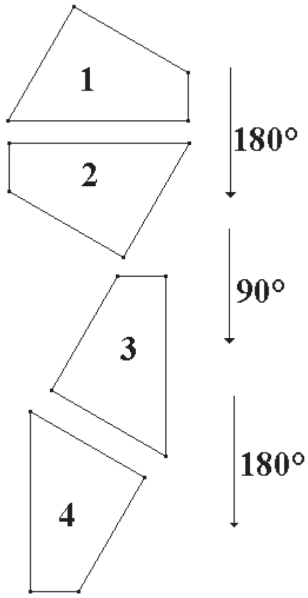

Fig. 8

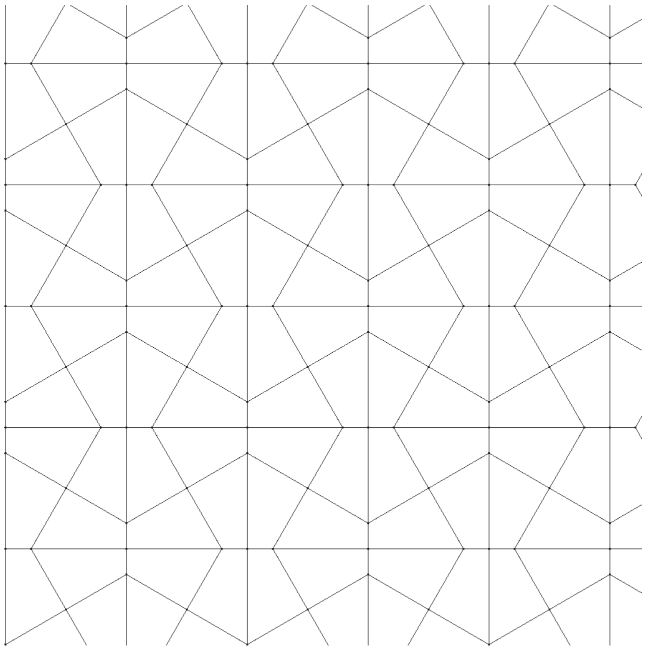

Fig. 9

divisioni regolari del piano e il sistema dei punti». Ho trovato anche altri disegni di Escher basati su questa pavimentazione mediante pentagoni, che costituì uno dei suoi motivi preferiti. La si ritrova anche riprodotta in una parte della famosa xilografia «Metamorfosi III», realizzata sempre negli anni 1967-68, stampata su sei fogli in quanto lunga 6,8 metri! Una curiosità: il disegno fu utilizzato per realizzare una delle colonne piastrellate del nuovo liceo della città di Baarn nel 1968; in [**14**] si possono ritrovare precise e minuziose indicazioni sulla realizzazione e disposizione di due tipi di mattonelle, indicazioni scritte dall'artista allo scopo di comunicare le proprie idee a chi avrebbe dovuto realizzare praticamente la colonna.

In conclusione, penso che le tappe che ho seguito potrebbero essere riproposte in classe, potendo costituire un'attività ricca, non banale, formativa: a partire da un disegno tutto sommato piuttosto semplice si possono infatti affrontare e studiare concetti sia di geometria classica che moderna, ma soprattutto si può «fare Geometria». Negli ultimi anni si è spesso osservato un decadimento dell'insegnamento della geometria, ma ora qualcosa è cambiato: in parte in seguito ai programmi Brocca, in parte perché sono comparsi all'orizzonte prodotti software (come Cabri) che hanno risvegliato l'interesse per la geometria, per le costruzioni con riga e compasso, per la dimostrazione (su quest'ultimo argomento si stanno incentrando numerose ricerche didattiche). Sorge allora una domanda: che uso fare di questi strumenti (che pare abbiano anche tanta presa sugli studenti) dal punto di vista didattico? Una risposta è nell'esempio del paragrafo precedente, non si intende qui dare risposte più approfondite.

Un possibile percorso didattico

Come detto, mi sono imbattuta casualmente nell'opera «senza titolo» indicata con il n° 132 di Escher, ma il mio studio non è stato casuale: ha avuto luogo dopo altre esperienze fatte per introdurre concetti matematici e «fare matematica» a partire dai disegni dell'artista. Non si può certo pensare di proporre tale e quale in classe un lavoro come quello illustrato nei paragrafi precedenti, ma occorre riflettere su quali potrebbero essere gli approcci e l'analisi. Se ne possono distinguere due, che ora delineo, cercando di mettere in evidenza gli aspetti matematici.

1) *Fregi e tassellazioni*: il disegno studiato costituisce un esempio di tassellazione del piano, cioè di ricoprimento del piano mediante ripetizione senza sovrapposizioni né lacune di una «mattonella» detta «maglia elementare». All'interno della maglia si può poi trovare un «motivo» che, sottoposto a opportune trasformazioni isometriche, ricopra il disegno, ma che sia anche il più piccolo possibile: il

suo nome tecnico è «campo fondamentale» (quello indicato con «1» in fig. 8 ne è un esempio).

In classe si possono presentare diversi esempi di fregi e tassellazioni tratti dall'ambito artistico, spiegando come ogni civiltà abbia utilizzato la simmetria nell'arte figurativa. Citando poi H. Weyl, per il quale «... l'arte dell'ornamento contiene implicitamente il più antico esempio d'alta matematica da noi conosciuto», si spiegherà che solo alla fine del XIX secolo si è dimostrato che i diversi gruppi di simmetria del piano sono esattamente 17, e si aggiungerà che essi si ritrovano tutti nei motivi decorativi dell'antichità. Prima di studiarli, sarà opportuno studiare i gruppi che contengono traslazioni in una sola direzione, cioè i cosiddetti «fregi», elencandone i 7 tipi (fig. 10): dato un motivo-base basterà traslarlo per ottenere il tipo più semplice F_1, ribaltarlo e poi traslarlo in direzione dell'asse di simmetria per avere F_2, ribaltando e traslando in direzione ortogonale all'asse di simmetria si avrà F_3, e così via.

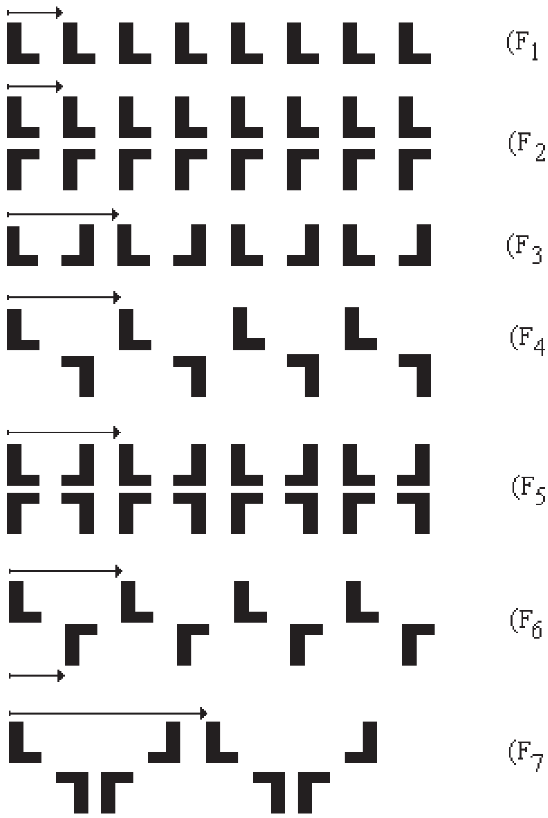

Fig. 10

Si osservi che mentre i primi quattro fregi si basano, oltre che su traslazioni, su simmetrie assiali, gli ultimi tre coinvolgono anche simmetrie centrali (un prerequisito è dunque la conoscenza di alcuni tipi di trasformazioni geometriche piane: traslazioni e simmetrie). Per quanto riguarda poi i gruppi di simmetria del piano si può iniziare con il concetto di «reticolo». Un piano può essere considerato uno spazio vettoriale di dimensione due, come tale ha basi costituite da coppie di vettori indipendenti $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$: in altre parole i vettori di base individuano la maglia su cui si basa un reticolo, che, in generale, è un parallelogramma il quale, in casi particolari, diventa un rettangolo o un rombo o un quadrato. Per comprendere come è stata costruita una tassellazione si può cominciare individuando il reticolo sottostante: in pratica, basta scegliere lo «stampino» o «modulo» (un fiore nell'esempio precedente), cioè il motivo-base che genera il disegno, un suo punto ed individuare i suoi trasformati, scegliendone poi due tra «i più vicini». Si trovano così i vettori-base del reticolo. Una volta individuata la maglia, si può passare a ricercarne l'«elemento generatore» o «campo fondamentale», cioè quella parte che, sottoposta ad opportune trasformazioni, la ricopre. Si possono infine individuare e descrivere tali trasformazioni.

2) *Isometrie e loro composizione*: più semplicemente, si può chiedere di individuare lo «stampino» ed interrogarsi poi sui «movimenti» da compiere per ricoprire, e quindi ricostruire, l'intero disegno. Nel nostro caso, prendiamo, per esempio uno degli esagoni che compaiono in fig. 1 e scegliamo un pentagono nel suo interno; per «ricostruire» l'esagono dovremo ruotare il pentagono di 180° attorno al «centro» dell'esagono stesso (o farne il simmetrico rispetto al centro) per ottenere quello «opposto», mentre i due pentagoni adiacenti a quello scelto si ottengono mediante opportune rotazioni. Se gli allievi conoscono già le isometrie, questa sarà un'occasione per fargliele utilizzare, altrimenti si potranno introdurre a partire da tassellazioni più semplici. Si può poi passare a lavorare con la composizione di trasformazioni. Ecco alcuni esempi:

a) *Ruota il pentagono 1 di 90° in senso orario intorno al punto O. Indica con 2 il pentagono ottenuto. Ora ruota 2 di 270° in senso orario intorno al punto O'. Indica con 3 il pentagono ottenuto.*

Con quale trasformazione si passa direttamente da 1 a 3? In altre parole, che cosa risulta dalla composizione delle due rotazioni? Perché?

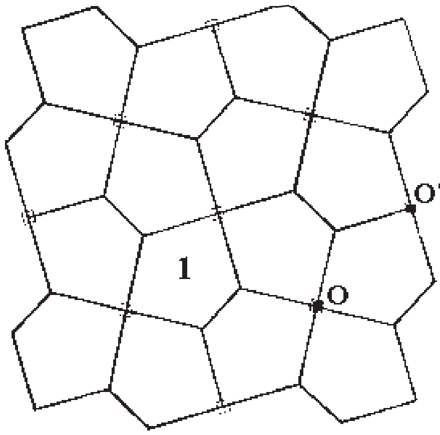

Fig. 11

b) *Ruota il pentagono 1 di 90° in senso antiorario intorno al punto O. Indica con 2 il pentagono ottenuto. Trasla il pentagono 2 nel modo indicato dalla freccia. Indica con 3 il pentagono ottenuto. Con quale trasformazione si passa da 1 a 3? In altre parole, che cosa risulta dalla composizione di una rotazione con una traslazione? Perché?*

Ci si può limitare agli esempi oppure approfondire chiedendo se, in generale, la composizione di due rotazioni di angoli α e β la cui somma sia un angolo giro e con centri distinti, sia sempre una traslazione e se la composizione di una rotazione con una traslazione dia sempre luogo ad una rotazione (si può anche passare alla dimostrazione e studiare la costruzione del centro della nuova rotazione).

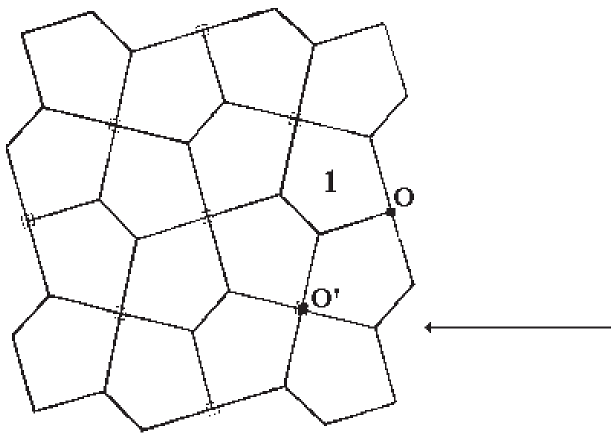

Fig. 12

Quali pentagoni tassellano il piano?

A scuola ci si occupa poco di pentagoni, eppure la «storia» di questo poligono presenta aspetti interessanti: dal pentagono concavo a cinque punte, emblema della scuola pitagorica, ottenuto tracciando le diagonali di un pentagono convesso regolare, ai legami con la sezione aurea (il rapporto tra le misure delle lunghezze di diagonale e lato di un pentagono regolare è il numero aureo φ), al problema delle pavimentazioni mediante pentagoni. Pare che anche nell'arte islamica ci siano stati tentativi, più o meno riusciti, in questo senso; in particolare, Weyl scrive che gli arabi «dimostrarono sperimentalmente l'impossibilità di inserire un pentagono in un ornamento».

Come mai Escher era particolarmente appassionato dalle tassellazioni pentagonali? Perché il pentagono usato per realizzare l'opera «senza titolo» indicata con il n° 132 ricopre il piano? Lo ricoprirebbe ugualmente un pentagono avente gli stessi angoli, ma non quelle relazioni tra i lati o viceversa? Prima di rispondere a questi interrogativi inquadriamo il problema più generale della tassellazione del piano mediante poligoni convessi. Sappiamo che ogni tipo di triangolo e, di conseguenza, ogni parallelogramma, pavimenta il piano, un pentagono regolare no, infatti i suoi angoli non sono sottomultipli dell'angolo giro (è proprio per questo che esso costituisce le facce di un dodecaedro regolare). I pentagoni aventi una coppia di lati paralleli e congruenti e due angoli retti ricoprono il piano, se ne possono trovare esempi in pavimentazioni stradali:

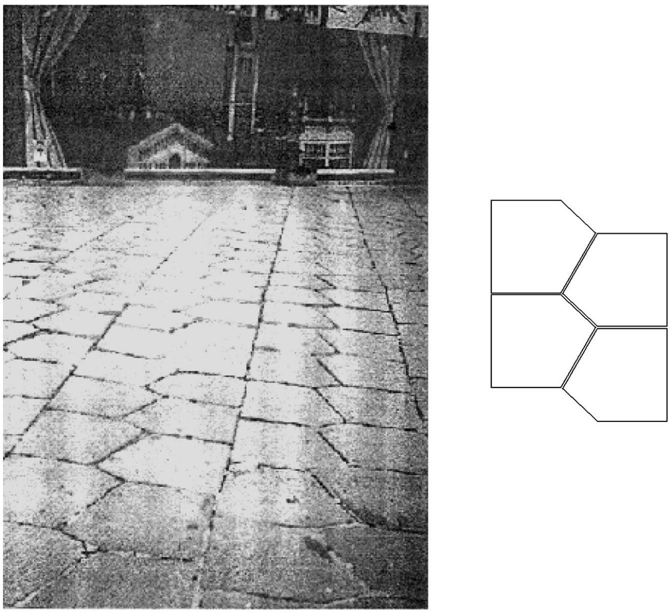

Fig. 13

il pentagono-base si può scomporre in un rettangolo e in un triangolo e questo ne spiega le caratteristiche di «tassello». Può sorgere la curiosità di indagare più in generale su quali tipi di pentagono tassellano il piano. D. Schattschneider ricorda [**11**] la pubblicazione nel 1918 di un lavoro di K. Reinhard in cui si individuano 5 tipi di pentagoni e nel 1968 uno scritto di R.B. Kershner in cui ne aggiunge altri 3 tipi. Nel 1975 M. Gardner scrive un'articolo in cui riporta gli otto tipi di pentagono: il pentagono di Escher rientra nel tipo 2 (A+B+D=360° e $a=d$) e nel tipo 4 (A=C=90° e $a=b$, $c=d$) come caso particolare. L'articolo stimola l'interesse di alcuni lettori, R. James e M. Rice, che individuano altri due tipi di pentagoni che pavimentano il piano. In particolare la Rice, casalinga e senza una preparazione matematica particolare, si appassiona al problema ed avvia una approfondita ricerca sulle possibili combinazioni di lati ed angoli che danno luogo a pentagoni atti a ricoprire il piano. Elabora così una propria notazione che le consente di scoprire così il decimo tipo (2E+B=2C+D=360° e $a=b=c=d$), di dimostrare addirittura la falsità di una congettura formulata dalla stessa Schattschneider, e di arrivare ad individuare ben 58 tipi distinti di pavimentazioni pentagonali! Ovviamente, tra queste c'è anche quella usata da Escher nel disegno di fig.1.

Dal punto di vista didattico, può essere opportuno proporre agli allievi il problema dei pentagoni che tassellano il piano e, dopo che avranno fatto tentativi di soluzione, raccontare loro quanto sintetizzato sopra. Questo potrebbe stupirli in quanto si tratta di un problema apparentemente semplice, ma risolto abbastanza recentemente: sebbene il mondo matematico si sia occupato di poligoni «da sempre», solo nel ventesimo secolo, ad esempio, è stato dimostrato che poligoni con sette o più lati non possono ricoprire il piano, per cui l'indagine si è concentrata e sviluppata su pentagoni ed esagoni.

In conclusione

«L'edificio della geometria è « un sistema complesso e una trattazione unitaria ne sacrifica necessariamente molti aspetti e fa perdere la comprensione del suo significato globale. Oppure può accadere che si sviluppino indipendentemente l'uno dall'altro diversi filoni, nell'ambito della Matematica, del Disegno geometrico, dell'Educazione tecnica: questa indesiderabile separazione è conseguenza della divisione tra sapere e saper fare, che domina il nostro sistema scolastico, soprattutto dalla «riforma Gentile» in poi e che ha l'effetto di rendere aride sia le trattazioni «teoriche» che quelle «tecniche» e di isolare quelle «artistiche».

Avremmo da imparare molto, a questo proposito, dai nostri grandi del Rinascimento, che spesso erano assieme scienziati, ingegneri e artisti e sentivano come strettamente collegati i principi matematici con le realizzazioni artistiche e tecniche» (F. Speranza, *La razionalizzazione della geometria*, Periodico di Matematiche ***VI***, 65 (1989), 29-46).

Bibliografia

[1] M. Baistrocchi, F. Speranza e P. Vighi, *Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: un itinerario didattico per il biennio delle scuole superiori*, Quad. **72** Dip. Mat. Univ. Parma, A.A. 1991/92, (1992), 0-80.

[2] F. J. Budden, *The fascination of Groups*, Cambridge University Press, London-N.Y. 1972.

[3] E. Crespina, *Tassellazioni come ambienti di esercizi*, Atti 3° Internuclei Scuole Secondarie Superiori (C. Marchini, F. Speranza, P. Vighi eds.), Parma 1992, 55-66.

[4] B. Ernst, *The magic mirror of M.C.Escher*, Ballantine Books, New York 1976.

[5] M. C. Escher, *The grafic work of M. C. Escher*, Ballantine Books, New York 1971.

[6] M. C. Escher, *Grafica e disegni*, Benedikt Taschen Verlag, Berlino 1990.

[7] M. Gilardi, *Ritmi e simmetrie*, Zanichelli, Bologna 1986.

[8] M. Gilardi, *I "pattern design» e i loro gruppi*, Periodico di Matematiche **63** (1987), 57-65.

[9] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi Ed., Milano 1990.

[10] I. M. Jaglom, *Trasformazioni geometriche. Le isometrie*, Zanichelli, Bologna 1972.

[11] D. A. Klarner, *The Mathematical Gardner*, Wadsworth International, Belmont, California 1981.

[12] G. Navarra, *Dai fregi grafici ai fregi musicali. Analisi geometriche di patterns: un'attività interdisciplinare tra matematica, arti figurative e musica*, Scuola e Didattica **6** (1993), La Scuola Editrice, Brescia, 77-85.

[13] D. Schattscheider, *Visioni della simmetria*, Zanichelli, Bologna 1992.

[14] D. Schattscheider and W. Walker, *M. C. Escher Caleidocicli*, Benedikt Taschen Verlag, Berlino 1990.

[15] F. Speranza, *Salviamo la geometria!*, La Matematica e la sua Didattica **2** (1988), 6-14.

[16] F. Speranza, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna 1997.

[17] P. Vighi, *Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: Comportamenti degli allievi nella presentazione di un itinerario didattico*, La Didattica **1** (1996), 75-85.

[**18**] P. VIGHI, *La matematica nelle opere di M. C. Escher*, in «Arte e matematica: un sorprendente binomio» Atti Convegno Nazionale Mathesis, Vasto (Ch) 14-16 marzo 1997, 289-295.

[**19**] P. VIGHI, *Matematica e arte*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate» **21** (1998), 565-583.

[**20**] P. VIGHI, *Matematica ed espressione artistica. Tassellazioni pentagonali*, Atti del XX Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'Insegnamento della Matematica, Orvieto 22-24 ottobre 1998, 81-83.

[**21**] P. VIGHI, *«Fare Matematica» con le opere di M.C. Escher*, in «Matematica è/e cultura» Atti Congresso Nazionale Mathesis L'Aquila 1998, 1999, 311-316.

[**22**] H. WEYL, *La simmetria*, Feltrinelli, Milano 1964.

Abstract

This work was inspired by a periodic drawing of M. C. Escher, based on a pentagonal tessellation. First we have reconstructed the basic pentagon by means of the CABRI software, then we have identified the basic grid and link from which the drawing derives. It is recognized that it falls under the C4 type in the 17-group classification of patterns design. This allows to treat the issue of geometry and its teaching, providing suggestions of pedagogical relevance. Finally we deal with the theme of the plane covering by pentagons and its fundamental points are illustrated.

* * *