Riv. Mat. Univ. Parma (6) **1** (1998), 207-214

Mario Servi (*)

I clan binari di ordine (**)

Alla memoria di G. L. Braglia

0 - Premessa

Per le definizioni e le notazioni usate, si faccia riferimento a [**2**], [**4**] e [**5**]; richiamiamo tuttavia le nozioni fondamentali di «albero binario libero» e di «clan binario» onde facilitare la lettura del presente lavoro.

L'*albero binario libero* è l'algebra assolutamente libera su 0 generatori nella classe delle algebre aventi un elemento privilegiato e due operazioni unarie. Più esplicitamente, vale un teorema di recursione semplice, nello stile di Peano-Lawvere: *se* $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; \mathbf{0})$ *è l'albero binario libero, per ogni insieme A, ogni elemento* $a \in A$ *ed ogni coppia di operazioni unarie* $\varphi_0, \varphi_1 \colon A \to A$, *esiste un'unica funzione* $h \colon R \to A$ *tale che valgano le equazioni:*

$$\begin{cases} h(0) = a \\ h(\sigma_i(x)) = \varphi_i(h(x)) \end{cases} \qquad (x \in R,\ i < 2)\,.$$

In un qualunque insieme ordinato $(M; \leq)$, dati $x, y \in M$, diciamo che *y copre x* oppure che *y* è un *successivo ordinale* di *x* o, infine, che *y* è un *figlio* di *x*, se

$$x < y \ \ \& \ \ \nexists_{z \in M}\, x < z < y\,.$$

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via M. d'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 4-12-1998. Classificazione AMS 03 C 15, 06 A 06. Lavoro eseguito con finanziamenti MURST ex 60% e ex 40%.

Scriveremo

$$x \dashv y$$

per indicare che y copre x.

Riportiamo adesso la definizione di clan binario contenuta in [**5**]. Un *clan binario* è una struttura relazionale del tipo $\mathcal{S} = (S; \leq; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$, dove $\leq$ è una relazione su S e σ_0, σ_1, π sono operazioni unarie su S soddisfacenti le seguenti condizioni:

(C1) $\leq$ è di ordine parziale

(C2) $$x \dashv \sigma_i(x), \qquad (x \in S,\ i < 2)$$

(C3) $$\sigma_0(x) \neq \sigma_1(y), \qquad (x, y \in S)$$

(C4) $$\pi \circ \sigma_i = \mathbf{1}_S, \qquad (i < 2)$$

(C5) $$\sigma_0(\pi(x)) = x \quad \text{oppure} \quad \sigma_1(\pi(x)) = x, \qquad (x \in S)$$

(C6) $$\exists_{n, m \in \mathbb{N}} \pi^n(x) = \pi^m(y), \qquad (x, y \in S)$$

(C7) $$x < y \Rightarrow x \leq \pi(y), \qquad (x, y \in S).$$

Uno dei referee di [**5**] ha suggerito la congettura che l'ordine sottogiacente ad ogni clan sia sempre lo stesso; il presente lavoro vuole dimostrare la correttezza di tale congettura.

Procederemo utilizzando la tecnica del Back and Forth (cfr. [**1**], dove, tuttavia, le idee sono presentate con terminologia un po' diversa dalla nostra).

Siano date due strutture del primo ordine $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, e sia $\mathfrak{I}$ una famiglia di funzioni. Diremo che $\mathfrak{I}$ è un *isomorfismo parziale* fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e scriveremo $\mathfrak{I}$: $\mathcal{A} \approx_p \mathcal{B}$, se:

- ogni $h \in \mathfrak{I}$ è un'immersione in $\mathcal{B}$ di una sottostruttura di $\mathcal{A}$;
- vale la seguente proprietà di *Back and Forth* (abbreviato: B&F):

Siano $k \in \mathfrak{I}$, $a \in A$, $b \in B$. Esistono allora in $\mathfrak{I}$ un'estensione h di k avente a nel suo dominio ed un'estensione j di k avente b nella sua immagine.

È noto che se le due strutture sono numerabili (o anche soltanto numerabilmente generate), da ogni isomorfismo parziale si può ottenere un isomorfismo fra di esse.

Notazione. Se $\mathcal{S}$ è un clan binario oppure un albero binario libero ed $\alpha \in S$, indicheremo con $\mathcal{S} \uparrow \alpha$ il segmento finale (chiuso) di $(S; \leqslant)$ determinato da α:

$$\mathcal{S} \uparrow \alpha = \{x \in S \colon \alpha \leqslant x\}$$

e considereremo $\mathcal{S} \uparrow \alpha$ come sottostruttura di ordine di $(S; \leqslant)$.

1 - Ordine sottogiacente a un clan

Siano $\mathcal{S} = (S; \leqslant; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$ e $\mathcal{S}' = (S'; \leqslant'; \sigma_0', \sigma_1', \pi')$ due clan binari; per dimostrare che *le strutture d'ordine sottogiacenti* $(S; \leqslant)$ *e* $(S'; \leqslant')$ *sono isomorfe*, applicheremo la tecnica del Back & Forth. Cominciamo col considerare la famiglia di funzioni $\mathfrak{I}$ alla quale appartiene una funzione k se e solo se esistono $\alpha \in S$ ed $\alpha' \in S'$ tali che $k \colon \mathcal{S} \uparrow \alpha \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}' \uparrow \alpha'$ sia un isomorfismo (di ordine). Scopo del presente paragrafo sarà di dimostrare che $\mathfrak{I} \colon (S;) \approx_p (S'; \leqslant')$, giacchè essendo tutti i clan numerabili ne conseguirà che $(S; \leqslant) \approx (S'; \leqslant')$.

Lemma 1. *Siano* $(C; \leqslant)$ *e* $(C'; \leqslant)$ *due insiemi ordinati. Sia* $(A, B, \{b\})$ *una partizione di* C *e sia* $(A', B', \{b'\})$ *una partizione di* C'. *Supponiamo che, per ogni* $x \in A$ *ed ogni* $y \in B$ *si abbia:*

(i) $$b < x\,,$$

(ii) $$b < y\,,$$

(iii) $$x \nleqslant \ngeqslant y$$

Valgano ipotesi analoghe per la data partizione di C'. *Siano ora*

$$h_1 \colon \{b\} \to \{b'\}$$

$$h_2 \colon A \xrightarrow{\approx} A'$$

$$h_3 \colon B \xrightarrow{\approx} B'$$

tre isomorfismi di ordine. Allora la funzione $h = h_1 \cup h_2 \cup h_3$ *è un isomorfismo da* $(C; \leqslant)$ *in* $(C'; \leqslant)$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi fatte segue intanto che h è una funzione biiettiva. Basterà dunque far vedere che essa è (strettamente) crescente, giacchè dalla simmetria delle ipotesi seguirà che anche h^{-1} è crescente. Siano dunque $x, y \in C$, con $x < y$. Si hanno vari casi. Se $x = b$ e $y \in A$, allora $h(x) = h_1(b) = b'$ e

$h(y) = h_2(y) \in B$, da cui $h(x) < h(y)$. Conclusione del tutto analoga si ottiene se $x = b$ e $y \in B$. Supponiamo allora che $x, y \in A$; ovviamente $h(x) = h_2(x)$ e $h(y) = h_2(y)$, e la conclusione segue dalle ipotesi su h_2. Analoghe considerazioni se $x, y \in B$. Infine si osservi che non può essere $x \in A$ e $y \in B$ nè $x \in B$ e $y \in A$ in virtù della (iii).

Definizione. Nell'albero binario libero $\mathcal{R}$ (1), per ogni elemento a diverso dalla radice $\mathbf{0}$, possiamo considerare l'elemento $\varphi(a)$ definito come segue: posto $b = \pi(a)$, sia $\varphi(a) = \sigma_{1-i}(b)$, se $a = \sigma_i(b)$. Più esplicitamente:

$$\varphi(a) = \begin{cases} \sigma_0 \pi(a), & \text{se } a = \sigma_1 \pi(a), \\ \sigma_1 \pi(a), & \text{se } a = \sigma_0 \pi(a). \end{cases}$$

L'elemento $\varphi(a)$ verrà detto talvolta il *fratello* di a.

Siamo in grado adesso di dimostrare il seguente lemma, che ci permetterà di concludere che $\mathfrak{I}$ è un isomorfismo parziale fra $(S; \leqslant)$ e $(S'; \leqslant')$:

Lemma 2. *Siano* $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; \mathbf{0})$ *ed* $\mathcal{R}' = (R'; \sigma'_0, \sigma'_1; \mathbf{0}')$ *due alberi binari liberi. Dati comunque* $a \in R$ *e* $a' \in R'$, *con lo stesso rango:* $\varrho(a) = \varrho'(a')$ (2); *allora ogni isomorfismo d'ordine* k: $\mathcal{R} \uparrow a \xrightarrow{\approx} \mathcal{R}' \uparrow a'$ *è estendibile ad un isomorfismo d'ordine* $h: (R; \leqslant) \xrightarrow{\approx} (R'; \leqslant')$.

Dimostrazione. Procederemo per induzione su $n = \varrho(a) = \varrho'(a')$. Per $n = 0$, si ha $\mathcal{R} \uparrow a = R$ e $\mathcal{R}' \uparrow a' = R'$ e quindi k è già un isomorfismo fra $(R; \leqslant)$ e $(R'; \leqslant')$. Supponiamo dunque che l'asserto valga per n e si abbia $\varrho(a) = \varrho(b) = n+1$. Posto:

$$b = \pi(a), \qquad c = \varphi(a), \qquad b' = \pi'(a'), \qquad c' = \varphi'(b'),$$

si ha ovviamente $\varrho(b) = \varrho'(b') = n$; se riusciamo ad estendere k ad un isomorfismo (d'ordine) h: $\mathcal{R} \uparrow b \xrightarrow{\approx} \mathcal{R}' \uparrow b'$, l'asserto si otterrà allora dall'ipotesi induttiva. Sia ora h_1 l'ovvio isomorfismo di ordine fra $\{b\}$ e $\{b'\}$, sia

---

(1) Una simile definizione si potrebbe dare anche per ogni elemento a di un clan binario

$$\varphi(a) = \sigma_{1-\mathbf{g}(a)}(\pi(a)),$$

dove $\mathbf{g}(x)$ è il *genere* di x, come definito in [**5**].

(2) Per la definizione del *rango* $\varrho(a)$ di un elemento a di un albero binario libero, si confronti [**2**]. Ricordiamo comunque che ϱ: $\mathcal{R} \to \mathbb{N}$ è definita per recursione da $\varrho(\mathbf{0}) = 0$ e $\varrho(\sigma_i(x)) = \varrho(x) + 1$.

$h_2 = k\colon \mathcal{R} \uparrow a \xrightarrow{\approx} \mathcal{R}' \uparrow a'$, e infine sia h_3 l'isomorfismo di ordine sottogiacente all'isomorfismo canonico fra i due alberi binari $\mathcal{R} \uparrow c$ e $\mathcal{R}' \uparrow c'$. Data la struttura ad albero di $\mathcal{R}$ e di $\mathcal{R}'$, si ha ovviamente che gli insiemi $C = \mathcal{R} \uparrow b$, $C' = \mathcal{R}' \uparrow b'$ (con le ovvie partizioni), e le funzioni h_1, h_2, h_3 soddisfano le ipotesi del Lemma 1; basta dunque porre $h = h_1 \cup h_2 \cup h_3$ per ottenere il desiderato isomorfismo $h\colon \mathcal{R} \uparrow b \xrightarrow{\approx} \mathcal{R}' \uparrow b'$.

Proposizione. *La famiglia $\mathfrak{I}$ di funzioni introdotta precedentemente gode della proprietà di B&F; dunque essa è un isomorfismo parziale* $\mathfrak{I}\colon (S; \leqslant) \approx_p (S'; \leqslant')$.

Dimostrazione. Sia $k\colon \mathcal{S} \uparrow \alpha \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}' \uparrow \alpha'$ e sia $\beta \in S$. In virtù dell'assioma (C6) dei clan binari, esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\pi^n(\alpha) = \pi^m(\beta)$; poniamo $\gamma = \pi^n(\alpha) = \pi^m(\beta)$ e $\gamma' = \pi'^n(\alpha')$ e osserviamo che $\beta \in \mathcal{S} \uparrow \gamma$. Giacchè $\mathcal{S} \uparrow \alpha = (\mathcal{S} \uparrow \gamma) \uparrow \alpha$ e $\mathcal{S}' \uparrow \alpha' = (\mathcal{S}' \uparrow \gamma') \uparrow \alpha'$, possiamo applicare il Lemma 2 agli alberi $\mathcal{S} \uparrow \gamma$ e $\mathcal{S}' \uparrow \gamma'$ e ai loro troncamenti $\mathcal{S} \uparrow \alpha$ e $\mathcal{S}' \uparrow \alpha'$ per ottenere un'estensione h di k con $h\colon \mathcal{S} \uparrow \gamma \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}' \gamma$. Ma $\beta \in \mathcal{S} \uparrow \gamma$, per cui la prima condizione di B&F è soddisfatta; l'altra è del tutto simmetrica.

Teorema 1. *Siano* $\mathcal{S} = (S; \leqslant; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$ *e* $\mathcal{S}' = (S'; \leqslant'; \sigma'_0, \sigma'_1, \pi')$ *due clan binari; allora* $(S; \leqslant) \approx (S'; \leqslant')$.

Dimostrazione. Basta ricordare che i clan binari sono tutti numerabili; per i risultati sul Back and Forth, si ha allora che l'isomorfismo parziale del Corollario precedente dà luogo a un isomorfismo fra $(S; \leqslant)$ e $(S'; \leqslant')$.

2 - I Clan Ordinali binari

Il Teorema 1 suggerisce l'ipotesi che la struttura di ordine sottogiacente ai clan binari sia definibile intrinsecamente in termini della sola relazione di ordine. È quanto mostreremo in questo paragrafo.

Definizione. Chiamiamo *clan binario d'ordine* (o *clan ordinale binario*) ogni insieme parzialmente ordinato $\mathcal{S} = (S; \leqslant)$ tale che

- (CBO1) *Ogni elemento x ha un unico predecessore immediato $\pi(x)$*, nel senso che $\pi(x)$ è il massimo dell'insieme $\{y \in S\colon y < x\}$:

(1) $$\pi(x) \underset{\text{def}}{=} \max(\{y \in S\colon y < x\}) \qquad (x \in S);$$

- (CBO2) *L'insieme $\sigma(x)$ dei successivi* (in senso ordinale) *di x ha cardinalità* 2.
- (CBO3) *Dati comunque due elementi x, y esistono due numeri naturali n, m*

tali che $\pi^n(x) = \pi^m(y)$, dove con π^n si intende ovviamente la reiterazione (n volte) dell'operazione π di *padre*.

- (CBO4) *Se due elementi sono inconfrontabili, non hanno successivi in comune*:

$$x \nleqq y \;\Rightarrow\; \sigma(x) \cap \sigma(y) = \emptyset\,. \tag{2}$$

Corollario. *La condizione* (2) *contenuta nell'assioma* (CBO4) *può essere rafforzata come segue:*

$$x \neq y \;\Rightarrow\; \sigma(x) \cap \sigma(y) = \emptyset \qquad (x,\, y \in S)\,. \tag{3}$$

Dimostrazione. Basta considerare due elementi x, y confrontabili ma distinti e sia ad esempio $x < y$. Sia per assurdo $z \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$; allora $x \dashv z$ e $y \dashv z$; dunque $x < y < z$, assurdo.

Verifichiamo che l'ordine sottogiacente a un clan binario soddisfa le proprietà suelencate:

Proposizione. *L'ordine sottogiacente a un clan binario è un clan binario di ordine.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S} = (S; \leqslant; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$ un clan binario e dimostriamo che $(S; \leqslant)$ soddisfa le condizioni (CBO1)-(CBO4).

(i) Dagli assiomi (C2) e (C5) dei clan binari segue che $\pi(x) < x$ (anzi, addirittura che $\pi(x) \dashv x$). Dunque $\pi(x)$ appartiene all'insieme $\{y \in S\colon y < x\}$; da (C7) segue poi che $\pi(x)$ è il massimo di tale insieme:

$$\pi(x) = \max(\{y \in S\colon y < x\}) \qquad (x \in S)\,. \tag{4}$$

(ii) Si ponga $\sigma(x) = \{y \in S\colon x \dashv y\}$ e dimostriamo che $\sigma(x) = \{\sigma_0(x), \sigma_1(x)\}$. Dall'assioma (C2) si ha intanto che $\sigma_0(x), \sigma_1(x) \in \sigma(x)$. Sia ora $y \in \sigma(x)$, cioè $x \dashv y$. Da (C7) si ha allora che $x \leqslant \pi y$; ma se fosse $x < \pi(y)$ si avrebbe, per il lemma 7 di **[5]**, $x < \pi(y)$ e $\pi(y) < y$, che è assurdo. Dunque, $x = \pi(y)$ e da (C5) si ha $y \in \{\sigma_0(x), \sigma_1(x)\}$. Da (C3) segue ora la (CBO2).

(iii) In virtù della (4), la verifica di (CBO3) è banale, perchè coincide con (C6).

(iv) Verifichiamo che vale la (3). Sia dunque $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$ e sia ad esempio $z \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$; dalla (iv) si ha allora che ci sono 4 casi possibili, ma l'assioma (C3) dei clan binari ne esclude due e ne restano dunque solo due: $\sigma_0(x) = z = \sigma_0(y)$ e $\sigma_1(x) = z = \sigma_1(y)$. L'assioma (C4) assicura in tutti i casi che $x = y$.

Viceversa, facciamo ora vedere che ogni clan binario di ordine è sottogiacente a un clan binario:

Proposizione. *Sia $\mathcal{S} = (S; \leqslant)$ un clan binario di ordine; allora $\mathcal{S}$ è espandibile a un clan binario* $(S; \leqslant; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$.

Dimostrazione. Indichiamo con $\pi(x)$ il massimo dell'insieme $\{y \in S \colon y < x\}$ e con $\sigma(x)$ l'insieme degli elementi che coprono x:

$$\pi(x) = \max(\{y \in S \colon y < x\}), \tag{5}$$

$$\sigma(x) = \{y \in S \colon x \dashv y\}. \tag{6}$$

Si tratta allora di definire soltanto le operazioni σ_0 e σ_1 e mostrare che sono soddisfatti gli assiomi (C1)-(C7) dei clan binari (cfr. [**5**]). Sia ϕ una funzione di scelta sull'insieme delle parti di S; poichè, per ogni $x \in S$, l'insieme $\sigma(x)$ è non vuoto (esso ha infatti cardinalità 2), si avrà

$$\phi(\sigma(x)) \in \sigma(x) \qquad (x \in S).$$

Definiamo $\sigma_0(x) = \phi(\sigma(x))$. Ora l'insieme $\sigma(x) \setminus \{\sigma_0(x)\}$ è costituito da un unico elemento; indichiamo con $\sigma_1(x)$ tale elemento ed avremo:

$$\sigma(x) \setminus \{\sigma_0(x)\} = \{\sigma_1(x)\}, \qquad \text{ovvero} \qquad \sigma(x) = \{\sigma_0(x), \sigma_1(x)\} \quad (x \in S). \tag{7}$$

Si tratta ora di verificare che $\overline{\mathcal{S}} = (S; \leqslant; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$ soddisfa gli assiomi dei clan binari. Si ha:

(i) $\leqslant$ è una relazione di ordine per ipotesi;

(ii) in virtù della (7), gli elementi $\sigma_0(x)$ e $\sigma_1(x)$ coprono x per la definizione (6) di σ;

(iii) Siano dati $x, y \in S$. Se $x = y$, allora per la definizione di σ_1 si ha $\sigma_0(x) \neq \sigma_1(x) = \sigma_1(y)$; se invece $x \neq y$, dalla (3) si ha l'asserto, in quanto $\sigma_0(x) \in \sigma(x)$ e $\sigma_1(y) \in \sigma(y)$;

(iv) Sia $i < 2$; dalla (7) si ha

$$\sigma_i(x) \in \sigma(x); \tag{8}$$

d'altra parte, dato y si ha $\pi(y) \dashv y$ e dunque $y \in \sigma\pi(y)$. In particolare, per $y = \sigma_i(x)$ si ha dunque $\sigma_i(x) \in \sigma(\pi\sigma_i(x))$ e dal confronto con la (8) si ottiene $x = \pi\sigma_i(x)$, in virtù della (3);

(v) Dalla (5) segue $\pi(x) \dashv x$ e dunque $x \in \sigma(\pi(x)) = \{\sigma_0\pi(x), \sigma_1\pi(x)\}$;

(vi) Data la definizione (5) di π, si ha che la (C6) coincide con (CBO3);

(vii) La (C7) è conseguenza immediata della (5).

Come corollario del risultato ottenuto nel precedente paragrafo si ha dunque che *i suelencati assiomi* (CBO1)-(CBO4) *determinano (a meno di isomorfismi) un'unica struttura di ordine*.

Bibliografia

[1] J. Barwise, *Back and Forth through Infinitary Logic*, in M. D. Morley, ed., *Studies in Model Theory*, MAA Studies in Mathematics 1973.

[2] F. Fiorenzi, *Albero binario libero*, Quaderno n. 153 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Novembre 1996.

[3] F. Fiorenzi, *Gli Alberi Sradicati Binari come concetto essenziale per la descrizione dei modelli di EAB*, Quaderno n. 152 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Ottobre 1996.

[4] M. Servi, *Classificazione dei Clan binari*, Quaderno n. 113 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Giugno 1995.

[5] M. Servi, *Definizione dei clan binari e loro classificazione*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9) **9** (1998).

[6] M. Servi, *Due parole sui Clan di Ordine* (Comunicazione tenuta al XVIII «Incontro di Logica», Pontignano (SI) aprile 1998), Quaderno n. 186 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Novembre 1998.

Summary

A Binary Clan is a structure $\mathcal{S} = (S; \leqslant; \sigma_0; \sigma_1, \pi)$, *where* $\leqslant$ *is a partial order on S and* σ_0, σ_1, π *are unary operations on S satisfying suitable axioms. It is known* (*see* [**5**]) *that there are* $2^{\aleph_0}$ *non-isomorphic binary clans; yet the conjecture was suggested that the underlying partially ordered set* $(S; \leqslant)$ *is uniquely determined* (*up to isomorphism*) *no matter which clan it underlies. We prove this conjecture; moreover we give an intrinsic characterization for such an order*

* * *