Riv. Mat. Univ. Parma (5) **6** (1997), 13-24

G. Ferrarese e L. Stazi (*)

Superfluidi e continui alla Cosserat (**)

1 - Caratteristiche di un superfluido

I riferimenti generalizzati considerati in [6] si prestano ad una interessante applicazione ai *superfluidi* (miscele fluide binarie), per i quali viene provata l'*equivalenza ad un continuo tipo Cosserat.* Di fatto, *un riferimento generalizzato* $(\Gamma, \hat{\Sigma})$ *equivale ad una coppia di riferimenti ordinari,* caratterizzati rispettivamente dalle due congruenze Γ e $\hat{\Gamma}$ associate ai campi vettoriali γ e $\hat{\gamma} = \boldsymbol{\eta}/\eta$. A loro volta, tali congruenze costituiscono l'immagine spazio-temporale di una *miscela fluida binaria.* Pertanto, si comprende facilmente che le tecniche anolonome sviluppate in [6] consentono innanzitutto di esaminare le *caratteristiche geometrico-cinematiche di un superfluido*, cioè i legami tra i caratteri del primo ordine dei riferimenti Γ e $\hat{\Gamma}$ (cfr. anche [5]). Naturalmente, il confronto tra i due riferimenti è reso possibile dalle seguenti proprietà:

a. *ogni base anolonoma adattata al riferimento generalizzato* $(\Gamma, \hat{\Sigma})$ *dà luogo, per dualità, ad una base adattata a* $(\hat{\Gamma}, \Sigma)$; si vuol dire che le basi $\{\tilde{e}_\alpha\}$ ed $\{\tilde{e}^\alpha\}$ sono adattate, rispettivamente, ai due riferimenti generalizzati $(\Gamma, \hat{\Sigma})$ e $(\hat{\Gamma}, \Sigma)$

b. *ogni tensore di* $\hat{\Sigma}$ *determina un tensore analogo in* Σ *e viceversa, la corrispondenza essendo biunivoca*; si tratta di interpretare le *componenti covarianti del tensore* rispetto all'una o all'altra delle due basi $\{\hat{e}^i\}$ di $\hat{\Sigma}$ ed $\{e^i\}$ di Σ, ove si è

(*) Dip. di Matematica G. Castelnuovo, Univ. La Sapienza, P.le A. Moro 2, 00185 Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 30.12.1996. Classificazione AMS 83 C 10.

posto per brevità

$$e^i = \tilde{e}^i. \tag{1.1}$$

Si noti che, in questa operazione di scambio, il carattere invariantivo per trasformazioni interne: $y^{0'} = y^{0'}(y^\alpha)$, $y^{i'} = y^{i'}(y^1, y^2, y^3)$, si conserva inalterato.

Ciò premesso, consideriamo dapprima il *gradiente* di $\boldsymbol{\gamma}$: $\nabla\boldsymbol{\gamma} = (\partial_\alpha \boldsymbol{\gamma}\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta)\,\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\beta$; in termini anolonomi, essendo $\tilde{\partial}_\alpha \boldsymbol{\gamma}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_0 = 0$, si ha direttamente:

$$\nabla\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\partial}_i \boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_k \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^k + \tilde{\boldsymbol{e}}^0 \otimes \boldsymbol{C}\,.$$

D' altra parte, in virtù della $(2.9)_I$ (le formule contrassegnate da una I si riferiscono alla Nota [6]), tenuto anche conto della $(2.4)_I$, risulta

$$\hat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta} \tag{1.2}$$

da cui la seguente espressione di $\tilde{\boldsymbol{e}}^0 = -\,\boldsymbol{\eta}$:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}^0 = \hat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i - \boldsymbol{\gamma}\,. \tag{1.3}$$

La precedente, avuto riguardo alla $(4.7)_I$, diviene così suscettibile della forma

$$\nabla\boldsymbol{\gamma} = (H_{ik} + \hat{\gamma}_i C_k)\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^k - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{C}\,. \tag{1.4}$$

Si tratta della decomposizione del gradiente di $\boldsymbol{\gamma}$ secondo $\boldsymbol{\gamma}$ e la piattaforma ortogonale Σ, caratterizzata dai vettori $\boldsymbol{e}^i$; pertanto il tensore $H_{ik} + \hat{\gamma}_i C_k$, a meno del fattore c, riassume le *velocità di deformazione e angolare proprie* del riferimento Γ. In termini espliciti, analogamente alla $(5.4)_I$, si ha:

$$\tilde{k}_{ik} = cK_{ik} \qquad \tilde{\omega}_{ik} = c(\hat{\Omega}_{ik} + \partial_{[i}\hat{\gamma}_{k]} + \hat{\gamma}_{[i} C_{k]})\,. \tag{1.5}$$

La (1.5), unitamente alla $(4.14)_I$, vale ad esprimere le *caratteristiche differenziali del primo ordine del riferimento* Γ, in funzione dei tensori analoghi K_{ik}, $\hat{\Omega}_{ik}$ e $\hat{C}_i$ del riferimento generalizzato, nonché del vettore $\hat{\gamma}_i$ e derivate prime.

Un confronto analogo vale naturalmente per la congruenza $\hat{\Gamma}$, definita dal vettore tangente $\boldsymbol{\eta} = -\,\tilde{\boldsymbol{e}}^0$; dato che $\boldsymbol{\eta}$ non è unitario, si tratta di considerare il *versore* $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = -\,\tilde{\boldsymbol{e}}^0/\eta$ e il relativo gradiente, cioè

$$\tilde{\partial}_\alpha \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{\eta}\, \tilde{\mathcal{R}}_{\alpha\varrho}{}^0 \tilde{\boldsymbol{e}}^\varrho - \tilde{\partial}_\alpha\Big(\frac{1}{\eta}\Big)\, \tilde{\boldsymbol{e}}^0.$$

Pertanto, il derivato di $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$: $\nabla\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\partial}_\alpha \hat{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\beta)\, \tilde{\boldsymbol{e}}^\alpha \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}^\beta$, tenuto conto del quadro $(6.6)_I$, non differisce da

$$\nabla\widehat{\gamma} = \eta[\widehat{C}^i\,\widehat{\gamma}_i - \eta\partial\frac{1}{\eta}\,]\,\widehat{\gamma}\otimes\widehat{\gamma} - (C_i + \widehat{H}_i^{\,j}\widehat{\gamma}_j - \partial\widehat{\gamma}_i)\,\widehat{\gamma}\otimes e^i$$

$$+[\eta\,\tilde{\partial}_i(\frac{1}{\eta}) - \widehat{H}_i^{\,j}\widehat{\gamma}_j]\,e^i\otimes\widehat{\gamma} + \frac{1}{\eta}\,\widehat{\mathscr{R}}_{ik}\,e^i\otimes e^k.$$

A sua volta, questa dà luogo alla decomposizione naturale di $\nabla\widehat{\gamma}$, dato che, in virtù delle $\widehat{e}^i = \tilde{e}^i - \dfrac{\eta^i}{\|\boldsymbol{\eta}\|}\,\boldsymbol{\eta}$ e della $(2.10)_{I,1}$, il vettore e^i è del tipo

$$e^i = \widehat{e}^{\,i} + \widehat{\gamma}^{\,i}\eta\,\widehat{\gamma} \qquad \widehat{e}^{\,i} \in \widehat{\Sigma}. \tag{1.6}$$

Più precisamente, tenuto conto della (1.6), la precedente decomposizione diviene

$$\nabla\widehat{\gamma} = \eta A\,\widehat{\gamma}\otimes\widehat{\gamma} + \boldsymbol{B}\otimes\widehat{\gamma} - \widehat{\gamma}\otimes\widehat{\boldsymbol{C}} + \frac{1}{\eta}\,\widehat{\mathscr{R}}_{ik}\,\widehat{e}^i\otimes\widehat{e}^k, \tag{1.7}$$

ove si è posto:

$$\begin{cases} A = \widehat{C}^i\widehat{\gamma}_i - \eta\partial(\dfrac{1}{\eta}) - \widehat{\gamma}^i(C_i + \widehat{H}_i^{\,j}\widehat{\gamma}_j - \partial\widehat{\gamma}_i) + \widehat{\gamma}^{\,i}B_i \\ B_i = \eta\,\tilde{\partial}_i(\dfrac{1}{\eta}) - \widehat{H}_i^{\,j}\widehat{\gamma}_j + \widehat{\mathscr{R}}_{ik}\widehat{\gamma}^k \qquad \boldsymbol{B} = B_i\,\widehat{e}^i, \end{cases} \tag{1.8}$$

nonché

$$\widehat{\boldsymbol{C}} = \widehat{C}_i\,\widehat{e}^i = (C_i + \widehat{H}_i^{\,j}\widehat{\gamma}_j - \partial\widehat{\gamma}_i - \widehat{\gamma}^k\,\widehat{\mathscr{R}}_{ki})\,\widehat{e}^i. \tag{1.9}$$

D'altra parte, stante il carattere unitario di $\widehat{\gamma}$, per analogia con la (1.4), *i coefficienti A e $\boldsymbol{B}$ devono essere necessariamente nulli,* come si può confermare direttamente. Pertanto la (1.7) assume la forma ridotta

$$\nabla\widehat{\gamma} = \frac{1}{\eta}\,\widehat{\mathscr{R}}_{ik}\,\widehat{e}^i\otimes\widehat{e}^k - \widehat{\gamma}\otimes\widehat{\boldsymbol{C}} \tag{1.10}$$

del tutto analoga alla (1.4). Di qui seguono, tenuto conto delle (1.9), $(4.10)_{I,2}$, e

$(5.3)_I$, le *caratteristiche differenziali del primo ordine* del riferimento $\widehat{\Gamma}$:

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \widehat{C}_i = C_i + \widehat{H}_i{}^j\widehat{\gamma}_j - \partial\widehat{\gamma}_i - \widehat{\gamma}^k(H_{ki} - \tilde{\nabla}_k\widehat{\gamma}_i) \\ \widehat{k}_{ik} = \dfrac{c}{\eta}(K_{ik} - C_{(i}\widehat{\gamma}_{k)} - \tilde{\nabla}_{(i}\widehat{\gamma}_{k)}) \qquad \widehat{\omega}_{ik} = \dfrac{c}{\eta}\,\widehat{\Omega}_{ik}. \end{cases}$$

Esse sono espresse in termini dei tensori fondamentali C_i, $\widehat{\Omega}_{ik}$ e K_{ik}, nonché del vettore $\widehat{\gamma}_i$, il quale caratterizza il divario tra le due piattaforme Σ e $\widehat{\Sigma}$; si tratta degli stessi ingredienti che figurano nella (1.5), relativa al riferimento Γ. Pertanto, eliminando tali ingredienti, si ottengono i *legami tra le caratteristiche dei due riferimenti.* Ai fini di questa eliminazione, si ha innanzitutto dalla (1.5):

$$(1.12)\qquad K_{ik} = \frac{1}{c}\,\tilde{k}_{ik} \qquad \widehat{\Omega}_{ik} = \frac{1}{c}\,\tilde{\omega}_{ik} - \tilde{\partial}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]} - \widehat{\gamma}_{[i}C_{k]}.$$

D' altra parte, a norma della $(4.10)_I$, il prodotto $\widehat{H}_i{}^j\widehat{\gamma}_j$ non differisce da

$$\widehat{H}_i{}^j\widehat{\gamma}_j = \gamma^{jk}H_{ik}\widehat{\gamma}_j = (1 - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2})\,\widehat{\gamma}^k H_{ik} = \eta^2\widehat{\gamma}^k H_{ik}.$$

Pertanto, i legami cercati sono:

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \widehat{C}_i = C_i + \widehat{\gamma}^k(\eta^2 H_{ik} - H_{ki} + \tilde{\nabla}_k\widehat{\gamma}_i) - \partial\widehat{\gamma}_i \\ \widehat{k}_{ik} = \dfrac{1}{\eta}\,\tilde{k}_{ik} - \dfrac{c}{\eta}(C_{(i}\widehat{\gamma}_{k)} + \tilde{\nabla}_{(i}\widehat{\gamma}_{k)}) \\ \widehat{\omega}_{ik} = \dfrac{1}{\eta}\,\tilde{\omega}_{ik} - \dfrac{c}{\eta}(\widehat{\gamma}_{[i}C_{k]} + \tilde{\nabla}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]}) \end{cases}$$

con l'intesa che il tensore H_{ik} di cui alla $(5.3)_I$ sia espresso in termini di $\tilde{k}_{ik}$ e $\tilde{\omega}_{ik}$ mediante la (1.12)

$$(1.14)\qquad H_{ik} = \frac{1}{c}(\tilde{k}_{ik} + \tilde{\omega}_{ik}) - \widehat{\gamma}_i C_k.$$

La (1.13) ha carattere generale, nel senso che *vale comunque siano scelti i due riferimenti Γ e $\widehat{\Gamma}$*; naturalmente essa dà luogo a banali identità se risulta $\widehat{\gamma}_i = 0$, ovvero se i due riferimenti coincidono. Inoltre, la (1.13) può essere letta, indifferentemente, in ciascuna delle due piattaforme Σ o $\widehat{\Sigma}$, a seconda che le componenti (tutte covarianti) si riferiscano alla base $\{e^i\}$, ovvero $\{\widehat{e}^i\}$. In ogni caso, essa ha direttamente significato geometrico, in quanto mette a confronto le *caratteri-*

stiche proprie dei due riferimenti; ma ha anche *significato cinematico* per il riferimento $\widehat{\Gamma}$ (ovvero Γ), nel senso che traduce il *teorema dei moti relativi*, con l'*intreccio*, tipicamente relativistico, delle tre grandezze fondamentali: *accelerazione, velocità angolare e di deformazione* ([2], p. 180).

2 - Ribaltamento isometrico

In un riferimento generalizzato, munito di una distribuzione anolonoma adattata, *occorre distinguere tra metrica covariante e metrica contravariante*, nel senso che la prima: $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{e}_\alpha \cdot \tilde{e}_\beta$, dà luogo alla *metrica indotta sulla piattaforma* $\widehat{\Sigma}$, e cioè:

$$\tilde{g}_{ik} = \widehat{e}_i \cdot \widehat{e}_k = \widehat{\gamma}_{ik} \qquad \widehat{e}_i \in \widehat{\Sigma}; \tag{2.1}$$

la seconda invece $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \tilde{e}^\alpha \cdot \tilde{e}^\beta$, determina la *metrica indotta su* Σ: piattaforma ortogonale alla congruenza Γ, in quanto

$$\tilde{g}^{ik} = \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^k = \gamma^{ik} \qquad \boldsymbol{e}^i \in \Sigma \tag{2.2}$$

se, come già in precedenza, si intende $\boldsymbol{e}^i = \tilde{e}^i$.

La metrica $\widehat{\gamma}_{ik}$ si può riportare su Σ, per *ribaltamento isometrico* dell'una piattaforma sull'altra, come vedremo tra un momento; tuttavia ciò non vale ad annullare il suo *divario con la metrica naturale* γ_{ik}, indotta su Σ dall'ambiente.

In ogni caso, per dualità in $\widehat{\Sigma}$, si passa dai vettori $\widehat{e}_i$ a quelli equivalenti

$$\widehat{e}^i = \widehat{\gamma}^{ik}\, \widehat{e}_k \quad \text{definiti implicitamente da} \quad \widehat{e}^i(\widehat{e}_k) = \delta^i{}_k \qquad \widehat{e}^i \in \widehat{\Sigma} \tag{2.3}$$

attraverso i reciproci $\widehat{\gamma}^{ik}$. Si tratta di *vettori distinti da* $\boldsymbol{e}^i \in \Sigma$, e più precisamente, come dalla (1.6), valgono i legami espliciti

$$\widehat{e}^i = \boldsymbol{e}^i - \widehat{\gamma}^i \boldsymbol{\eta}. \tag{2.4}$$

Allo stesso modo, ai vettori $\boldsymbol{e}^i$ fanno riscontro i duali in Σ, i quali non coincidono con $\widehat{e}_i \in \widehat{\Sigma}$ ma, data la condizione $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$, sono necessariamente del tipo [si tratta dei vettori $\boldsymbol{E}_i$ di cui alla $(4.15)_I$]

$$\boldsymbol{e}_i = \widehat{e}_i + \widehat{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma} \qquad \boldsymbol{e}_i \in \Sigma\,. \tag{2.5}$$

Ne consegue che la *metrica duale di* γ^{ik} in Σ è data dai prodotti

$$\gamma_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \widehat{\gamma}_{ik} + \widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}_k. \tag{2.6}$$

Analogamente, dalla (2.4), tenuto conto della (2.2), si ha la *metrica indotta* *in* Σ

$$\gamma^{ik} = \widehat{\gamma}^{ik} + \|\boldsymbol{\eta}\| \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k \qquad \|\boldsymbol{\eta}\| = -\eta^2 \qquad \eta^2 = \frac{1}{1+\gamma^2}\,. \tag{2.7}$$

Si noti che il duplice punto di vista per la metrica spaziale: γ_{ik} di Σ, ovvero $\widehat{\gamma}_{ik}$ di $\widehat{\Sigma}$, è collegato alla proprietà che *una base adattata al prodotto* $\gamma \otimes \widehat{\Sigma}$ *non dà luogo, per dualità, ad una base dello stesso tipo*, come avviene per le strutture ortogonali; dà luogo invece ad una base *adattata alla struttura complementare* $\boldsymbol{\eta} \otimes \Sigma$.

In ogni caso, il collegamento metrico delle due piattaforme Σ e $\widehat{\Sigma}$, attraverso i due ingredienti $\tilde{g}_{ik}$ e $\tilde{g}^{ik}$, suggerisce l'idea di sovrapporre in qualche modo le piattaforme stesse; ad esempio, mediante il *ribaltamento isometrico di* $\widehat{\Sigma}$ *su* Σ, come avviene in relatività ristretta ([2], p. 72). Ciò in vista di ripristinare il punto di vista ordinario, nell' ambito della piattaforma Σ. Più precisamente, il ribaltamento detto si traduce in una ben determinata corrispondenza tra i vettori $\widehat{\boldsymbol{s}} \in \widehat{\Sigma}$ ed $\boldsymbol{s} \in \Sigma$, la quale sia *atta a conservare il prodotto scalare* ([3], p. 180):

$$\boldsymbol{s} = \widehat{\boldsymbol{s}} - \frac{\varepsilon}{1+\sigma}(\boldsymbol{\gamma} + \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) \qquad \sigma = -\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \qquad \varepsilon = -\,\widehat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{2.8}$$

essendo anche qui $\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\eta}/\eta$, e pertanto, a ragione della $(1.2)_I$

$$\sigma = \frac{1}{\eta} > 0\,. \tag{2.9}$$

Il ribaltamento (2.8) porta, in particolare, i vettori $\widehat{\boldsymbol{e}}_i \in \widehat{\Sigma}$ nei corrispondenti $\boldsymbol{d}_i \in \Sigma$:

$$\boldsymbol{d}_i = \widehat{\boldsymbol{e}}_i - \frac{\varepsilon_i}{1+\sigma}(\boldsymbol{\gamma} + \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) \qquad \varepsilon_i = -\,\widehat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{\gamma} = -\,\widehat{\gamma}_i \tag{2.10}$$

e naturalmente *conserva la metrica*

$$\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{d}_k = \widehat{\gamma}_{ik}. \tag{2.11}$$

Si ha infatti, tenuto conto della $(2.8)_2$, e della ortogonalità dei vettori $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ ed $\widehat{\boldsymbol{e}}_i$

$$\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{d}_k = \widehat{\gamma}_{ik} + 2\,\frac{\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k}{1+\sigma} + \frac{\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k}{(1+\sigma)^2}(-1 + 2\boldsymbol{\gamma}\cdot\widehat{\boldsymbol{\gamma}} - 1) = \widehat{\gamma}_{ik}.$$

Pertanto, se si assume come fondamentale la piattaforma Σ, su questa, accanto alla *metrica quasi-naturale* $\gamma_{ik} \sim \gamma^{ik}$, ha diritto di cittadinanza anche la *metrica riportata* (da $\widehat{\Sigma}$), la quale è definita, in relazione alla base $\{\boldsymbol{d}_i\} \neq \{\boldsymbol{e}_i\}$ dai coefficienti $\widehat{\gamma}_{ik} \sim \widehat{\gamma}^{ik}$. In altri termini, *l'iperpiano* Σ è, in ogni punto di V_4, *dotato di bimetrica;* naturalmente valgono i legami (2.6)

$$\widehat{\gamma}_{ik} = \gamma_{ik} - \widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}_k \tag{2.12}$$

cioè il divario tra le due metriche dipende soltanto dal vettore $\widehat{\gamma}_i$.

La (2.12) si può ovviamente confermare, esplicitando il legame tra le due basi fondamentali di Σ: $\{\boldsymbol{e}_i\}$ e $\{\boldsymbol{d}_i\}$, *naturale* e rispettivamente *indotta da* $\widehat{\Sigma}$. Più precisamente, dalle (2.10) e (2.9), tenuto anche conto della (2.5), si ha

$$\boldsymbol{d}_i = \widehat{\boldsymbol{e}}_i + \frac{\eta}{1+\eta}\,\widehat{\gamma}_i(\boldsymbol{\gamma} + \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) = \boldsymbol{e}_i + \frac{\widehat{\gamma}_i}{1+\eta}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\gamma}) \tag{2.10$'$}$$

ove, a norma della (1.2), si deve intendere

$$\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta} = \widehat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i \qquad \boldsymbol{e}^i = \gamma^{ik}\boldsymbol{e}_k. \tag{2.13}$$

Pertanto, vale la relazione

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{e}_i - \frac{\widehat{\gamma}_i}{1+\eta}\,\widehat{\gamma}_j \gamma^{jk} \boldsymbol{e}_k \tag{2.14}$$

la quale si può ulteriormente semplificare in base alla (2.7). Infatti, tenuto conto del legame $(2.7)_3$ tra η^2 e γ^2, si ha rispettivamente:

$$\widehat{\gamma}_j \gamma^{jk} = \widehat{\gamma}_j(\widehat{\gamma}^{jk} - \eta^2 \widehat{\gamma}^j \widehat{\gamma}^k) = \eta^2 \widehat{\gamma}^k \qquad \eta^2\gamma^2 = 1 - \eta^2 \tag{2.15}$$

e pertanto la (2.14) si scrive

$$\boldsymbol{d}_i = \left(\delta_i^{\,j} - \frac{\eta^2}{1+\eta}\,\widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}^j\right) \boldsymbol{e}_j. \tag{2.16}$$

Si tratta di una relazione invertibile, in quanto risulta

$$\boldsymbol{e}_i = \left(\delta_i^{\,j} + \frac{\eta}{1+\eta}\,\widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}^j\right) \boldsymbol{d}_j \tag{2.16$'$}$$

sì che *le terne* $\{\boldsymbol{e}_i\}$ e $\{\boldsymbol{d}_i\}$, entrambe di Σ, *sono in corrispondenza biunivoca.*

Per quanto infine riguarda il legame tra la base $\{\hat{e}_i\}$ di $\hat{\Sigma}$ e i vettori $\boldsymbol{d}_i$, dalla (2.16)′, tenuto conto della (2.5), si ha direttamente:

$$\hat{e}_i = (\delta_i^{\ j} + \frac{\eta}{1+\eta}\,\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}^j)\,\boldsymbol{d}_j - \hat{\gamma}_i\,\gamma \qquad \hat{\gamma}^j = \frac{1}{\eta^2}\,\gamma^{jk}\hat{\gamma}_k. \tag{2.17}$$

Si noti che, in virtù della (2.16), *i vettori $\hat{e}_i$ sono funzioni ben determinate del divario $\hat{\gamma}_i$*, a parte la dipendenza dal riferimento Γ.

3 - Significato cinematico della (2.16)

La (2.16) ha un significato cinematico preciso, in relazione al *moto* (*relativo*) del continuo $\hat{\Gamma}$ rispetto al riferimento Γ, come vedremo tra un momento; in ogni caso, essa conferma, come è naturale, il legame (2.12) tra le due metriche di Σ. Più precisamente, eseguendo il prodotto $\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{d}_k$, si ha innanzitutto

$$\hat{\gamma}_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{\eta^2}{1+\eta}(\hat{\gamma}_i\gamma_k + \hat{\gamma}_k\gamma_i) + \frac{\eta^4}{(1+\eta)^2}\,\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}^2 \tag{3.1}$$

avendo posto per brevità

$$\gamma_i = \hat{\gamma}^j\gamma_{ij} \qquad \hat{\gamma}^2 = \hat{\gamma}^j\hat{\gamma}^l\gamma_{jl} = \hat{\gamma}^j\gamma_j. \tag{3.2}$$

D'altra parte, moltiplicando per $\hat{\gamma}^k$ e successivamente per $\hat{\gamma}^i$, la (3.1) dà luogo alle condizioni:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \gamma_i - \dfrac{\eta^2}{1+\eta}(\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}_i + \gamma^2\gamma_i) + \dfrac{\eta^4}{(1+\eta)^2}\,\hat{\gamma}_i\gamma^2\hat{\gamma}^2 \\[2ex] \gamma^2 = \hat{\gamma}^2 - 2\,\dfrac{\eta^2}{1+\eta}\,\gamma^2\hat{\gamma}^2 + \dfrac{\eta^4}{(1+\eta)^2}\,\gamma^4\hat{\gamma}^2 \end{cases}$$

ovvero, tenuto conto della $(2.15)_2$:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \gamma_i - \dfrac{\eta^2\hat{\gamma}^2}{1+\eta}\,\hat{\gamma}_i - (1-\eta)\,\gamma_i + \dfrac{\eta^2}{1+\eta}(1-\eta)\,\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}_i \\[2ex] \gamma^2 = \hat{\gamma}^2 - 2(1-\eta)\,\hat{\gamma}^2 + (1-\eta)^2\hat{\gamma}^2. \end{cases}$$

Dalle formule immediatamente precedenti che esprimono $\widehat{\gamma}_i$ e γ^2, tenuta presente la $(2.7)_3$, risulta:

$$\widehat{\gamma}_i = \eta^2 \gamma_i \qquad \gamma^2 = \eta^2 \widehat{\gamma}^2. \tag{3.3}$$

Tenuto conto poi dei legami ora trovati e ancora della $(2.7)_3$, a partire dalla (3.1), si ritrova subito la (2.12).

Ciò premesso, in vista di evidenziare il significato dei legami (2.16), riprendiamo la (2.13), indicando con $\widehat{\boldsymbol{V}} = c\boldsymbol{\eta}/\eta$ la *4-velocità associata al continuo* $\widehat{\Gamma}$, essa si scrive

$$\widehat{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{\eta}(c\boldsymbol{\gamma} - c\widehat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i) \tag{3.4}$$

e traduce così la decomposizione di $\widehat{\boldsymbol{V}}$ secondo $\boldsymbol{\gamma}$ e la piattaforma normale Σ; ne risulta la *velocità relativa* $\boldsymbol{u}$, nonché il significato cinematico del parametro η:

$$\boldsymbol{u} = -\, c\widehat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i \qquad \eta = \sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{3.5}$$

D'altra parte, a norma delle (2.6) e (2.15), si ha:

$$\widehat{\gamma}_i \boldsymbol{e}^i = \widehat{\gamma}_i \gamma^{ik} \boldsymbol{e}_k = \eta^2 \widehat{\gamma}^k \boldsymbol{e}_k \tag{3.6}$$

e pertanto la (2.16) assume la forma

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{e}_i + \frac{1}{c}\,\frac{\widehat{\gamma}_i}{1+\eta}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i = -c\widehat{\gamma}_i. \tag{3.7}$$

Si tratta di un legame che ha perfetto riscontro in relatività ristretta, laddove si considera, più generalmente ([2], p. 167), il moto di un sistema continuo rispetto a due riferimenti galileiani distinti; naturalmente qui il continuo è *in quiete rispetto a* $\widehat{\Gamma}$, e pertanto si deve intendere $\boldsymbol{v} = 0$.

Tale legame consente di esaminare i due problemi tipici della *cinematica relativa*, cioè la variazione della velocità e dell' accelerazione di una particella in un cambiamento del riferimento (*teoremi dei moti relativi e di Coriolis*); ciò che richiede la decomposizione della 4-velocità e della 4-accelerazione della particella secondo Γ e rispettivamente $\widehat{\Gamma}$, e il successivo ribaltamento della piattaforma $\widehat{\Sigma}$ su

Σ. In ogni caso, la (3.7) riveste importanza fondamentale nella cinematica relativa delle deformazioni dei continui relativistici, dato che la velocità angolare e di deformazione (locali) fanno capo alle derivate temporali dei vettori $\boldsymbol{d}_i$.

4 - Superfluidi e continui tipo Cosserat

Quanto precede al n. 3 mette bene in evidenza il ruolo del triedro $\{\boldsymbol{d}_i\}$ di Σ, ai fini della specificazione, sia della metrica $\widehat{\gamma}_{ik}$ che della piattaforma stessa $\widehat{\Sigma}$, la quale si ritrova procedendo a ritroso, cioè per *antiribaltamento* di Σ su $\widehat{\Sigma}$, secondo le (2.16) e (2.17). Pertanto *a tutti gli effetti: metrici e di posizione, la congruenza* $\widehat{\Gamma}$ *può essere caratterizzata, nell'ambito di* Γ, *mediante il triedro fondamentale* $\{\boldsymbol{d}_i\}$ *di* Σ.

Di converso, un qualunque superfluido S può essere descritto, in termini tradizionali, nel riferimento Γ, ancorché questi costituisca solo uno dei due componenti di S. Si tratta di tener conto del secondo componente (*piattaforma* $\widehat{\Sigma}$ e *metrica* $\widehat{\gamma}_{ik}$), *associando a* Σ *un ben determinato triedro deformabile* $\{\boldsymbol{d}_i\}$, dipendente dal *divario spaziale* $\widehat{\gamma}_i$ come dalla (2.14).

Da questo punto di vista, *un superfluido è equivalente ad un continuo con struttura interna tipo Cosserat* [1]. In altri termini, *una miscela binaria può essere descritta dalla sola componente* Γ, *purché questa sia munita, in ogni punto, di un ben determinato triedro deformabile* $\boldsymbol{d}_i$ *di* Σ, *indipendente dalla congruenza.*

Naturalmente *il triedro* $\boldsymbol{d}_i$ *interviene qui in modo naturale*, a partire dalla distribuzione anolonoma $(2.3)_I$, e pertanto fa capo a coordinate scelte (y^α), adattate a Γ; come tale, esso *non è definito univocamente, ma a meno di una arbitraria trasformazione interna* a Γ, ovvero segue la *legge olonoma*

$$\boldsymbol{d}_{i}' = \frac{\partial y^{i}}{\partial y^{i'}} \boldsymbol{d}_i \tag{4.1}$$

ove *i coefficienti sono indipendenti dal tempo*, così come accade classicamente.

Tuttavia, mentre nel caso classico il *triedro è ortonormale*, in quanto esso riassume una *struttura rigida* [1], *nel caso relativistico, la deformazione del triedro diviene un carattere intrinseco*, non eliminabile con trasformazioni interne né globalmente, né localmente (in un intorno).

Nell'immagine del continuo di Cosserat, un superfluido appare così in una luce più espressiva e con possibili *estensioni dinamiche*, come diremo tra un momento; in ogni caso, come classicamente, *il triedro* $\boldsymbol{d}_i$, ovvero il suo duale in Σ: $\boldsymbol{d}^i = \widehat{\gamma}^{ik}\boldsymbol{d}_k$, *assume un ruolo fondamentale*, nel senso che tutte le grandezze vanno decomposte secondo γ e $\boldsymbol{d}_i$: forze d'inerzia e gravitazionali, sforzi e momenti di sforzo, ecc.

In particolare, il derivato temporale $\partial \boldsymbol{d}_i$, o meglio la *derivata vincolata* ([3], p. 157), dà luogo alle *velocità angolare* e *di deformazione del triedro*, le quali si aggiungono a quelle proprie del continuo Γ. In ogni caso, mentre l'equivalenza tra superfluidi e continui di Cosserat *vale nell'ambito della cinematica*, la dinamica dei superfluidi può essere sviluppata, almeno in linea di principio, da due punti di vista diversi.

Il primo è quello diretto: considerare le *equazioni di evoluzione ordinarie dei due componenti*:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \qquad \nabla_\beta \widehat{T}^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.2}$$

con *tensori energetici* di tipo fluido (o più generali):

$$T^{\alpha\beta} = \mu_0 V^\alpha V^\beta + p_0 (g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} V^\alpha V^\beta)$$

nonché

$$\widehat{T}^{\alpha\beta} = \widehat{\mu}_0 \widehat{V}^\alpha \widehat{V}^\beta + \widehat{p}_0 (g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} \widehat{V}^\alpha \widehat{V}^\beta)$$

e proiettare sul triedro $\boldsymbol{d}_i$ e γ, tenendo conto che $V^i = 0$ per il primo fluido, e invece $\widehat{V}^i \neq 0$ per il secondo (*lettura in chiave di Cosserat*).

Se la miscela non è di prova, ma genera un campo gravitazionale, alla (4.2) vanno aggiunte le *equazioni di Einstein*:

$$G_{\alpha\beta} = -\chi (T_{\alpha\beta} + \widehat{T}_{\alpha\beta})\,. \tag{4.3}$$

Il secondo punto di vista presuppone un'ipotesi di lavoro, e cioè che *l'analogia con i continui di Cosserat sia anche del tipo dinamico*, nel senso che, per entrambi i sistemi, valgano le stesse equazioni. In questo caso, la dinamica non è più regolata dalla (4.2), ma dalle *equazioni generali dei continui polari relativistici* [4], le quali costituiscono ancora *due gruppi di condizioni* (risultante e momento risultante), ma il contenuto fisico è più ampio. Naturalmente, in questo ambito, il caso di un *sistema gravitante* non rientra nella (4.3), in quanto i continui tipo Cosserat sono descritti da *due tensori energetici*, e pertanto le equazioni gravitazionali vanno opportunamente modificate.

References

[1] G. FERRARESE, *Intrinsic formulation of Cosserat continua dynamics*, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics 2 Pitman, London 1979.

[2] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica relativistica*, Pitagora, Bologna 1985.

[3] G. FERRARESE, *Lezioni di Relatività generale*, Pitagora, Bologna 1994.

[4] G. FERRARESE, *Relativistic polar continua*, Atti del Convegno «Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures», per l'80mo di A. Lichnerowicz, Pitagora , Bologna 1996.

[5] G. FERRARESE e D. BINI, *Riferimenti fluidi polari in relatività generale*, Ricerche di Mat., Suppl. **41** (1992), 1-14.

[6] G. FERRARESE e L. STAZI, *Riferimenti generalizzati in relatività*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (1996), 245-256.

Summary

A first application of a generalized frame of reference ([5] *and* [6]), *is given for superfluids in General Relativity; we show a strict analogy between superfluids and Cosserat continua, from both the descriptive and the structural point of view.*

* * *