Riv. Mat. Univ. Parma (5) 5 (1996), 91-102

FILIPPO DOTTI (*)

La categoria delle teorie e delle interpretazioni (**)

Introduzione

Il presente lavoro estende a linguaggi del primo ordine arbitrari i risultati che in [1] sono ottenuti solo per linguaggi privi di simboli funzionali. Allo scopo, si è modificata la definizione di *interpretazione fra teorie*, chiedendo esplicitamente, per ogni formula A con $\{z_1, \ldots, z_k\} = \mathrm{Lib}(A)$, che $A_{\mathcal{H}}$ implichi $H[z_1] \wedge \ldots \wedge H[z_k]$. Si perviene così alla considerazione della categoria $\mathcal{T}eor$, anche in questo contesto più ricco.

1 - La definizione di interpretazione fra teorie del primo ordine

In tutto il lavoro quando scriveremo x_i intenderemo la i-ma variabile individuale, mentre quando scriveremo $x, y, z, \ldots$ intenderemo una generica variabile individuale; inoltre $y_1, \ldots, y_k$ oppure $z_1, \ldots, z_k$ denoteranno k variabili individuali distinte, non necessariamente le prime k. Indicheremo con $\mathcal{V}$ l'insieme delle variabili individuali. Dato un linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, indicheremo con $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, $\mathcal{P}_k(\mathcal{L})$, $\mathcal{F}(\mathcal{L})$, $\mathcal{F}_k(\mathcal{L})$, $\mathcal{C}(\mathcal{L})$, $\mathcal{T}erm(\mathcal{L})$, $\Phi(\mathcal{L})$ e $\mathcal{E}n(\mathcal{L})$ rispettivamente l'insieme dei predicati, quello dei predicati k-ri, quello dei simboli funzionali, quello dei simboli funzionali k-ri, quello delle costanti individuali, quello dei termini, quello delle formule e quello degli enunciati di tale linguaggio.

Se $A \in \Phi(\mathcal{L})$, denoteremo con $\mathrm{Lib}(A)$ la successione (in ordine alfabetico) delle variabili che compaiono libere in A. Sia $A \in \Phi(\mathcal{L})$, siano $y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{V}$ e siano $t_1, \ldots, t_k$ termini del linguaggio $\mathcal{L}$. Se essi sono sostituibili rispettivamente a

(*) Via G. Galilei 27/c, 29100 Piacenza, Italia.
(**) Ricevuto il 3.6.1996. Classificazione AMS 03 C 07.

$y_1, \ldots, y_k$ in A, indicheremo con $A\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_k \\ t_1, \ldots, t_k \end{bmatrix}$ la formula ottenuta per sostituzione simultanea delle variabili $y_1, \ldots, y_k$ con i termini $t_1, \ldots, t_k$. Nel caso in cui $y_1, \ldots, y_k$ coincidano con le prime variabili individuali $x_1, \ldots, x_k$, scriveremo in modo abbreviato $A[t_1, \ldots, t_k]$. Qualora non tutti i termini fossero sostituibili in A, si considererà prima della sostituzione un'opportuna variante alfabetica di A (in modo che i termini diventino sostituibili); la formula risultante sarà ancora indicata con $A[t_1, \ldots, t_k]$. Adotteremo analoghe convenzioni per la sostituzione nelle variabili di un termine.

Definizione 1. Siano $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ linguaggi del primo ordine. Sia $H \in \Phi(\mathcal{L}')$ tale che $\mathrm{Lib}(H) = \{x_1\}$. Sia F un'applicazione dall'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{C}(\mathcal{L})$ dei simboli extralogici di $\mathcal{L}$ all'insieme $\Phi(\mathcal{L}') \cup \mathcal{F}(\mathcal{L}') \cup \mathcal{C}(\mathcal{L}')$ tale che se $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$, allora $F(P) \in \Phi(\mathcal{L}')$ con $\mathrm{Lib}(F(P)) = \{x_1, \ldots, x_k\}$; se $f \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L})$, allora $F(f) \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L}')$; se $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, allora $F(c) \in \mathcal{C}(\mathcal{L}')$.

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ teorie rispettivamente in $\mathcal{L}$ e in $\mathcal{L}'$. Diremo che la coppia $\mathcal{H} = (H, F)$ è una *seminterpretazione di* $\mathcal{T}$ *in* $\mathcal{T}'$ (e la indicheremo con $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$) se:

i. $$\vdash_{\mathcal{T}'} (\exists x) H[x] \qquad x \in \mathcal{V}$$

ii. $$\vdash_{\mathcal{T}'} H[x_1] \wedge \ldots \wedge H[x_k] \to H[F(f)(x_1, \ldots, x_k)] \qquad f \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L})$$

iii. $$\vdash_{\mathcal{T}'} H[F(c)] \qquad c \in \mathcal{C}(\mathcal{L}).$$

Diremo che H è l'*universo* della seminterpretazione $\mathcal{H}$.

Per ogni $t \in \mathcal{T}\!erm(\mathcal{L})$ definiremo il termine $t_{\mathcal{H}} \in \mathcal{T}\!erm(\mathcal{L}')$ in modo ricorrente come segue

$$x_{\mathcal{H}} = x \qquad c_{\mathcal{H}} = F(c) \qquad (f(t_1, \ldots, t_k))_{\mathcal{H}} = F(f)(t_{1\mathcal{H}}, \ldots, t_{k\mathcal{H}}).$$

Per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$, posto $\{y_1, \ldots, y_n\} = \mathrm{Lib}(A)$, definiremo la formula $A_{\mathcal{H}} \in \Phi(\mathcal{L}')$ nel seguente modo:

$$(P(t_1, \ldots, t_k))_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad F(P)[t_{1\mathcal{H}}, \ldots, t_{k\mathcal{H}}] \wedge H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n]$$

$$(t_1 \doteq t_2)_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad (t_{1\mathcal{H}} \doteq t_{2\mathcal{H}}) \wedge H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n]$$

$$(\neg B)_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad \neg B_{\mathcal{H}} \wedge H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n].$$

Se $\copyright$ è un connettivo binario, allora:

$$(B \copyright C)_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad (B_{\mathcal{H}} \copyright C_{\mathcal{H}}) \wedge H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n]$$

$$((\exists x) B)_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad (\exists x)(H[x] \wedge B_{\mathcal{H}})$$

$$((\forall x) B)_{\mathcal{H}} \quad \text{è} \quad (\forall x)(H[x] \to B_{\mathcal{H}}) \wedge H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n] .$$

Definizione 2. Per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$ con $\{y_1, \ldots, y_n\} = \mathrm{Lib}(A)$ definiremo la formula $A^{\mathcal{H}}$ nel seguente modo: $A^{\mathcal{H}} = H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_n] \to A_{\mathcal{H}}$.

Ricordiamo che, secondo le convenzioni stipulate, le sostituzioni libere e simultanee vengono eseguite previo opportuno cambio alfabetico.

Definizione 3. Sia $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \rightharpoonup \mathcal{T}'$ una seminterpretazione di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$; diremo che $\mathcal{H}$ è un'*interpretazione di* $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ (e scriveremo $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$) se:

i. $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}}$ $\qquad$ A assioma non logico di $\mathcal{T}$

ii. $\vdash_{\mathcal{T}'} F(P) \to H[x_1] \wedge \ldots \wedge H[x_k]$ $\qquad$ $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$.

Data una coppia $\mathcal{H} = (H, F)$ è utile mettere in evidenza un'altra nozione; per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$ definiremo la formula A^* nel seguente modo:

$(P(t_1, \ldots, t_k))^*$ è $F(P)[t_{1\mathcal{H}}, \ldots, t_{k\mathcal{H}}]$, $(t_1 \doteq t_2)^*$ è $(t_{1\mathcal{H}} \doteq t_{2\mathcal{H}})$, $(\neg B)^*$ è $\neg B^*$.

Se $\copyright$ è un connettivo binario, allora:

$(B \copyright C)^*$ è $B^* \copyright C^*$, $((\exists x) B)^*$ è $(\exists x)(H[x] \wedge B^*)$, $((\forall x) B)^*$ è $(\forall x)(H[x] \to B^*)$.

Lemma 1. *Sia* $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e sia* $A \in \Phi(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}(A) = \{y_1, \ldots, y_k\}$. *Allora si ha:*

i. $\mathrm{Lib}(A) = \mathrm{Lib}(A_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Lib}(A^{\mathcal{H}}) = \mathrm{Lib}(A^*)$

ii. $\vdash_{\mathcal{T}'} A_{\mathcal{H}} \leftrightarrow H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_k] \wedge A^*$.

Dimostrazione. Sia la **i** che la **ii** si dimostrano per induzione sull'altezza delle formule.

2 - Il teorema (fondamentale) sintattico

Vogliamo ora dimostrare che un'interpretazione fra teorie traduce ogni teorema A della prima teoria in un teorema $A^{\mathcal{H}}$ della seconda teoria. I Lemmi 2,..., 10 servono per concludere (Teorema 1) che, data $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, allora $A^{\mathcal{H}}$ è un teorema di $\mathcal{T}'$, per ogni assioma logico di A di $\mathcal{L}$. Per l'assiomatizzazione del calcolo dei predicati, abbiamo adattato quella di [3] a un linguaggio con tutti i connettivi ed in particolare con entrambi i quantificatori; in sostanza, è sufficiente aggiungere ai 6 schemi di assiomi di [3] lo schema

$$(\exists x)A \leftrightarrow \neg (\forall x) \neg A \, .$$

In tutto il seguito del paragrafo, supporremo che $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ anche senza esplicita menzione.

Lemma 2. *Se A è una tautologia di $\mathcal{L}$, allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}}$.

Dimostrazione. Sia A una tautologia di $\mathcal{L}$; allora A^* è una tautologia di $\mathcal{L}'$ e dunque anche $H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_k] \to A^*$ è una tautologia. Per il Lemma 1 si ha che $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}}$.

I successivi Lemmi 3, 4 servono per la dimostrazione del Lemma 5.

Lemma 3. *Siano* $t, \tau_1, \ldots, \tau_h, t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}(t) = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ *e siano* $y_1, \ldots, y_h$ *variabili individuali; allora si ha:*

i. $$\vdash_{\mathcal{T}'} H[z_1] \to \ldots \to H[z_n] \to H[t_{\mathcal{H}}]$$

ii. $$\left(t\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = t_{\mathcal{H}}\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ (\tau_1)_{\mathcal{H}}, \ldots, (\tau_h)_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}$$

iii. $$t\left[t_1\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}, \ldots, t_k\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}\right] = t[t_1, \ldots, t_k]\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Tutte e tre le affermazioni si possono dimostrare per induzione sull'altezza del termine t.

Lemma 4. *Sia* $A \in \Phi(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}(A) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, *siano* $t, \tau_1, \ldots, \tau_h, t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ *e* $x, y_1, \ldots, y_h$ *variabili individuali; allora si ha:*

i. $$\vdash A\left[t_1\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}, \ldots, t_k\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}\right] \leftrightarrow A[t_1, \ldots, t_k]\begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_h \\ \tau_1, \ldots, \tau_h \end{bmatrix}$$

ii. $$\vdash\left(A\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}\right)^* \leftrightarrow A^* \begin{bmatrix} x \\ t_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Entrambe si possono dimostrare per induzione sull'altezza delle formule; per la **i.** nella base dell'induzione si utilizza il Lemma 3; per la **ii.** nella base dell'induzione si utilizzano il Lemma 3 e la **i.**

Lemma 5. *Sia A l'assioma logico* $(\forall x)B \to B\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$, *dove t è sostituibile a x in B; allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$.

Dimostrazione. Se A è $(\forall x)B \to B\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$ con t sostituibile a x in B, allora A^* è la formula $(\forall x)(H[x] \to B^*) \to \left(B\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}\right)^*$, che per il Lemma 4 è equivalente a $(\forall x)(H[x] \to B^*) \to B^*\begin{bmatrix} x \\ t_{\mathcal{K}} \end{bmatrix}$. Per il Lemma 1, $A^{\mathcal{K}}$ è equivalente in $\mathcal{T}'$ a

$$H[z_1] \to \dots \to H[z_k] \to (\forall x)(H[x] \to B^*) \to B^*\begin{bmatrix} x \\ t_{\mathcal{K}} \end{bmatrix}, \quad \text{ove} \quad \{z_1, \dots, z_k\} = \mathrm{Lib}\,(A),$$

e, utilizzando il Lemma 3, si dimostra che questa formula è un teorema di $\mathcal{T}'$.

Lemma 6. *Se A è uno degli assiomi logici* $B \to (\forall x)B$, *dove* $x \notin \mathrm{Lib}\,(B)$, *oppure* $(\forall x)(B \to C) \to (\forall x)B \to (\forall x)C$, *oppure* $(\exists x)B \leftrightarrow \neg (\forall x) \neg B$, *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$.

Dimostrazione. In ciascuno dei tre casi si dimostra che A^* è una formula valida, quindi anche $H[z_1] \wedge \dots \wedge H[z_k] \to A^*$ la è; la conclusione segue dal Lemma 1.

Lemma 7. *Se* $x \in \mathcal{V}$, *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} (x \doteq x)^{\mathcal{K}}$.

Dimostrazione. Ovviamente $(x \doteq x)^{\mathcal{K}}$ è valida.

I seguenti Lemmi 8 e 9 servono per la dimostrazione del Lemma 10. Se $t \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ e $x, y \in \mathcal{V}$, indicheremo con $t[x; y]$ il termine ottenuto da t sostituendo y in qualche presenza di x; se inoltre $A \in \Phi(\mathcal{L})$, indicheremo con $A[x; y]$ la formula ottenuta da B sostituendo y in qualche presenza libera di x, essendo y sostituibile a x in quelle presenze della x dove effettivamente avviene la sostituzione.

Lemma 8. *Siano* $t, t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}\,(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ *e siano* $x, y \in \mathcal{V}$; *allora si ha:*

i. $$t[x; y]_{\mathcal{K}} = t_{\mathcal{K}}[x; y]$$

ii. $$t[t_1[x; y], \dots, t_k[x; y]] = t[t_1, \dots,, t_k][x; y].$$

Dimostrazione. Essendo la sostituzione parziale una generalizzazione della sostituzione totale, la dimostrazione procede sulle stesse linee di quella del Lemma 3, cioè per induzione sull'altezza di t.

Lemma 9. *Sia* $A \in \Phi(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}(A) = \{x_1, \ldots, x_k\}$; *siano* $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ *e siano* $x, y \in \mathcal{V}$; *allora si ha:*

i. $$\vdash A[t_1[x; y], \ldots, t_k[x; y]] \leftrightarrow A[t_1, \ldots, t_k][x; y]$$

ii. $$\vdash A[x; y]^* \leftrightarrow A^*[x; y].$$

Dimostrazione. Come per il lemma precedente, la dimostrazione procede sulle stesse linee del Lemma 4, cioè per induzione sull'altezza delle formule. Per la **i** nella base dell'induzione si utilizza il Lemma 8, per la **ii** nella base dell'induzione si utilizzano il Lemma 8 e la **i**.

Lemma 10. *Sia A l'assioma logico* $(x \doteq y) \to B \to B[x; y]$; *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$.

Dimostrazione. Si ha che A^* è $(x \doteq y) \to B^* \to B[x; y]^*$. Per il Lemma 9, questa formula è equivalente a $(x \doteq y) \to B^* \to B^*[x; y]$; quindi $\vdash_{\mathcal{T}'} A^*$ e a fortiori $\vdash_{\mathcal{T}'} H[z_1] \wedge \ldots \wedge H[z_k] \to A^*$. Per il Lemma 1, si ha la tesi.

Teorema 1. *Se* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$, *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} ((\forall y)A)^{\mathcal{K}}$. *Se A è un assioma logico, allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$.

Dimostrazione. Se $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$, per il Lemma 1 si ha che
$$H[z_1], \ldots, H[z_k] \vdash_{\mathcal{T}'} A^* \quad \text{ove} \quad \{z_1, \ldots, z_k\} = \mathrm{Lib}(A).$$
Sia che $y \in \mathrm{Lib}(A)$ sia che $y \notin \mathrm{Lib}(A)$, si ha che $H[w_1], \ldots, H[w_i] \vdash_{\mathcal{T}'} H[y] \to A^*$ ove $\{w_1, \ldots, w_i\} = \mathrm{Lib}(A) \setminus \{y\}$. Generalizzando ora su y, osservando che $(\forall y)(H[y] \to A^*)$ è per definizione $((\forall y)A)^*$ e utilizzando il Lemma 1 si prova la prima parte.

Sia poi $A = (\forall y_n, \ldots, y_1)B$ ove $n \geqslant 0$ e B è un assioma dei sette schemi analizzati. Si osservi che per $n = 0$, si ricade in uno dei Lemmi 2, 5, 6, 7 o 10. In generale la seconda parte del teorema si dimostra applicando n volte la prima parte.

I successivi Lemmi 11 e 12 servono per il Teorema 2, che asserisce che si ha $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{K}}$ per ogni teorema A di $\mathcal{T}$.

Lemma 11. *Sia* $B \in \Phi(\mathcal{L}')$, *sia* $\mathrm{Lib}(B) = \{w_1, \ldots, w_r\}$ *con* $r \geqslant 1$, *sia* $\{y_1, \ldots, y_p\} \supseteq \mathrm{Lib}(B)$ *e tale che* $\vdash_{\mathcal{T}'} H[y_1] \wedge \ldots \wedge H[y_p] \to B$. *Allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} H[w_1] \wedge \ldots \wedge H[w_r] \to B$.

Dimostrazione. Posto $k = \mathrm{card}\,(\{y_1, \ldots, y_p\} \setminus \{w_1, \ldots, w_r\})$, si procede per induzione su k.

Lemma 12. *Sia* $B \in \mathcal{E}n(\mathcal{L}')$; *sia* $\{y_1, \dots, y_p\}$ *tale che risulti* $\vdash_{\mathcal{T}'} H[y_1] \wedge \dots \wedge H[y_p] \rightarrow B$. *Allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} B$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{M}$ un modello di $\mathcal{T}'$ ed $s\colon \mathcal{V} \rightarrow M$ tale che $\models_{\mathcal{M}} H[y_l][s]$ per ogni $l = 1, \dots, p$ (visto che $\vdash_{\mathcal{T}'} (\exists x) H[x]$, una tale s esiste). Allora $\models_{\mathcal{M}} B[s]$ ed essendo B un enunciato $\models_{\mathcal{M}} B$. Segue la tesi per l'arbitrarietà di $\mathcal{M}$.

Teorema 2. *Se* $\vdash_{\mathcal{T}} A$, *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}}$.

Dimostrazione. Utilizzando i Lemmi 11, 12 e il Teorema 1, si procede per induzione sulle lunghezze delle dimostrazioni in $\mathcal{T}$.

3 - La categoria *Teor*

In questo paragrafo ci occuperemo di strutturare la classe delle teorie in modo da ottenere una categoria di cui esse siano gli oggetti. Una prima scelta dei morfismi può essere la seguente: se $\mathcal{H}$ è un'interpretazione di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$, allora prendiamo $\mathcal{H}$ come freccia; chiaramente è spontaneo porre $\mathcal{D}om(\mathcal{H}) = \mathcal{T}$ e $\mathcal{C}od(\mathcal{H}) = \mathcal{T}'$. Finora abbiamo quindi descritto un grafo orientato. Si tratta ora di definire una composizione fra interpretazioni. A tale scopo premettiamo i seguenti lemmi.

Lemma 13. *Sia* $\mathcal{H}\colon \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$, *sia* $A \in \Phi(\mathcal{L})$, *siano* $x, y, y_1, \dots, y_h \in \mathcal{V}$ *con* y *sostituibile a* x *in* A, *siano* $t_1, \dots, t_h \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$ *con* $t_1, \dots, t_h$ *sostituibili rispettivamente a* $y_1, \dots, y_h$ *in* A. *Allora si ha che*

i. $$\vdash_{\mathcal{T}'} A\begin{bmatrix} y_1, \dots, y_h \\ t_1, \dots, t_h \end{bmatrix}_{\mathcal{H}} \leftrightarrow A_{\mathcal{H}}\begin{bmatrix} y_1, \dots, y_h \\ (t_1)_{\mathcal{H}}, \dots, (t_h)_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \wedge H[z_1] \wedge \dots \wedge H[z_k]$$

ove $\{z_1, \dots, z_k\} = \mathrm{Lib}\left(A\begin{bmatrix} y_1, \dots, y_h \\ t_1, \dots, t_h \end{bmatrix}\right)$

ii. $$\vdash A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{H}} \leftrightarrow A_{\mathcal{H}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Per induzione sull'altezza di A. Nelle basi di entrambe le induzioni si utilizzano i Lemmi 3 e 4.

Lemma 14. *Siano* $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$. *Definiamo* $\mathcal{J} = (J, L)$ *nel seguente modo:*

$$J = H_{\mathcal{K}} \qquad L(P) = F(P)_{\mathcal{K}} \qquad L(f) = G(F(f)) \qquad L(c) = G(F(c))$$

con $P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, $f \in F(\mathcal{L})$, $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. *Allora:*

i. $$(t_{\mathcal{H}})_{\mathcal{K}} = t_{\mathcal{J}} \qquad t \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$$

ii. $$\vdash_{\mathcal{T}''} (A_{\mathcal{H}})_{\mathcal{K}} \leftrightarrow A_{\mathcal{J}} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}).$$

Dimostrazione. Per il punto **i** si procede per induzione sull'altezza del termine t. Per il punto **ii** si procede per induzione sull'altezza delle formule. Il passo induttivo è semplice. Occupiamoci quindi solo delle formule atomiche. Per esempio se A è la formula $P(t_1, \ldots, t_k)$ con $\mathrm{Lib}(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, allora $(A_{\mathcal{H}})_{\mathcal{K}}$ è la formula $F(P)[t_{1\mathcal{H}}, \ldots, t_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{K}} \wedge H[z_1]_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[z_n]_{\mathcal{K}}$ che, per il Lemma 13 e il Lemma 1, è equivalente in $\mathcal{T}''$ alla formula $F(P)_{\mathcal{K}}[(t_{1\mathcal{H}})_{\mathcal{K}}, \ldots, (t_{k\mathcal{H}})_{\mathcal{K}}] \wedge H[z_1]_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[z_n]_{\mathcal{K}}$. Per il punto **i** e per il Lemma 13, questa formula è equivalente a $F(P)_{\mathcal{K}}[t_{1\mathcal{J}}, \ldots, t_{k\mathcal{J}}] \wedge H_{\mathcal{K}}[z_1] \wedge \ldots \wedge H_{\mathcal{K}}[z_n]$; ma quest'ultima è una variante alfabetica della formula $(P(t_1, \ldots, t_k))_{\mathcal{J}}$.

Teorema 3. *Siano* $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$; *sia* $\mathcal{J} = (J, L)$ *definita come nel Lemma* 14. *Allora* $\mathcal{J}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}''$, *cioè* $\mathcal{J}$ *è un'interpretazione di* $\mathcal{T}$ *in* $\mathcal{T}''$.

Dimostrazione. Utilizzando il Lemma 1 si dimostra facilmente che $\mathrm{Lib}(L(P)) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ per ogni $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$ e che $\mathrm{Lib}(J) = \{x_1\}$. Sia $x \in \mathcal{V}$, allora $\vdash_{\mathcal{T}'} (\exists x) H[x]$. Per il Teorema 2 si ha che $\vdash_{\mathcal{T}''} ((\exists x) H[x])^{\mathcal{K}}$, ma $((\exists x) H[x])^{\mathcal{K}} = (\exists x)(K[x] \wedge H[x]_{\mathcal{K}})$. Per il Lemma 1, questa formula è equivalente in $\mathcal{T}''$ alla formula $(\exists x) H[x]_{\mathcal{K}}$. Per il Lemma 13 $\vdash H[x]_{\mathcal{K}} \leftrightarrow H_{\mathcal{K}}[x]$; ne segue che $\vdash (\exists x) H[x]_{\mathcal{K}} \leftrightarrow (\exists x) H_{\mathcal{K}}[x]$; quindi $\vdash_{\mathcal{T}''} (\exists x) H_{\mathcal{K}}[x]$. Ma $H_{\mathcal{K}}[x]$ e $J[x]$ differiscono al più per il nome delle variabili vincolate, quindi sono equivalenti. Si ha dunque che $\vdash_{\mathcal{T}''} (\exists x) J[x]$ e la **i** della Definizione 1 è provata.

Sia $f \in \mathcal{F}_k(\mathcal{L})$, allora $\vdash_{\mathcal{T}'} H \wedge \ldots \wedge H[x_k] \to H[F(f)(x_1, \ldots, x_k)]$. Per il Teorema 2 segue $\vdash_{\mathcal{T}''} (H \wedge \ldots \wedge H[x_k] \to H[F(f)(x_1, \ldots, x_k)])^{\mathcal{K}}$. Per la Definizione 2, con facili passaggi proposizionali, tenuto presente il Lemma 1, si ha che

$$\vdash_{\mathcal{T}''} K \wedge \ldots \wedge K[x_k] \wedge H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[x_k]_{\mathcal{K}} \to H[F(f)(x_1, \ldots, x_k)]_{\mathcal{K}}.$$

Per il Lemma 1 $\vdash_{\mathcal{T}''} H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[x_k]_{\mathcal{K}} \to H[F(f)(x_1, \ldots, x_k)]_{\mathcal{K}}$; per il Lemma 13 **i** $\vdash_{\mathcal{T}''} H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[x_k]_{\mathcal{K}} \to H_{\mathcal{K}}[(G \circ F)(f)(x_1, \ldots, x_k)]$.

Per il Lemma 13 **ii** $\vdash_{\mathcal{T}''} H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H_{\mathcal{K}}[x_k] \to H_{\mathcal{K}}[(G \circ F)(f)(x_1, \ldots, x_k)]$ che differisce al più per il nome delle variabili vincolate da

$$J \wedge \ldots \wedge J[x_k] \to J[L(f)(x_1, \ldots, x_k)].$$

Quindi anche la condizione **ii** della Definizione 1 è dimostrata.

Sia ora $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$; allora $\vdash_{\mathcal{T}'} H[F(c)]$ e $\vdash_{\mathcal{T}''} H[F(c)]^{\mathcal{K}} = H[F(c)]_{\mathcal{K}}$. Per il Lemma 13 segue $\vdash_{\mathcal{T}''} H[F(c)]_{\mathcal{K}} \leftrightarrow H_{\mathcal{K}}[(G \circ F)(c)]$, quindi $\vdash_{\mathcal{T}''} H_{\mathcal{K}}[(G \circ F)(c)]$. Questa formula differisce al più per il nome delle variabili vincolate da $J[L(c)]$; la condizione **iii** della Definizione 1 è dunque provata.

Sia ora A un assioma non logico di $\mathcal{T}$; allora $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}}$. Essendo A un enunciato si ha che $\vdash_{\mathcal{T}'} A_{\mathcal{H}}$ e quindi $\vdash_{\mathcal{T}''} (A_{\mathcal{H}})^{\mathcal{K}}$. Essendo $A_{\mathcal{H}}$ un enunciato, $\vdash_{\mathcal{T}''} (A_{\mathcal{H}})_{\mathcal{K}}$. Per il Lemma 14 si ha allora che $\vdash_{\mathcal{T}''} A_{\mathfrak{J}}$, cioè $\vdash_{\mathcal{T}''} A^{\mathfrak{J}}$, e la **i** della Definizione 3 è dimostrata.

Sia infine $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$, allora $\vdash_{\mathcal{T}'} F(P) \to H \wedge \ldots \wedge H[x_k]$ e quindi si ha che $\vdash_{\mathcal{T}''} (F(P) \to H \wedge \ldots \wedge H[x_k])^{\mathcal{K}}$. Questa formula, per il Lemma 1, è equivalente in $\mathcal{T}''$ a $F(P)_{\mathcal{K}} \to H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H[x_k]_{\mathcal{K}}$. Per il Lemma 13 sia ha che $\vdash_{\mathcal{T}''} F(P)_{\mathcal{K}} \to H_{\mathcal{K}} \wedge \ldots \wedge H_{\mathcal{K}}[x_k]$. Questa formula differisce al più per il nome delle variabili vincolate da $L(P) \to J \wedge \ldots \wedge J[x_k]$ e la **ii.** della Definizione 3 è provata.

Dunque $\mathfrak{J}$ soddisfa tutte le condizioni della Definizione 3 e l'asserto resta provato.

Definizione 4. Nelle ipotesi del Teorema 3, indichiamo con $\mathcal{K}\mathcal{H}$ l'interpretazione $\mathfrak{J}$ di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}''$ ivi introdotta: $\mathcal{K}\mathcal{H} = (H_{\mathcal{K}}, L)$ ove $L(P) = F(P)_{\mathcal{K}}$ per ogni $P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ e $L(f) = G(F(f))$ per ogni $f \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ e $L(c) = G(F(c))$ per ogni $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. L'interpretazione $\mathcal{K}\mathcal{H}$ verrà detta *composizione* di $\mathcal{H}$ con $\mathcal{K}$.

Si osservi che la composizione di interpretazioni non si presta ad essere la composizione di morfismi di una categoria; si verifica infatti che, in generale, essa non è associativa. L'inconveniente può essere superato modificando opportunamente la nozione di morfismo. Conviene infatti identificare due interpretazioni quando, pur essendo formalmente diverse, esse sono equivalenti nel senso della successiva Definizione 5.

Lemma 15. *Siano $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ e $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ tali che si abbia $F(\sigma) = G(\sigma)$ per ogni $\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Sono equivalenti:*

i. $\vdash_{\mathcal{T}'} H \leftrightarrow K$ *e* $\vdash_{\mathcal{T}'} F(P) \leftrightarrow G(P)$ $\qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$

ii. $\vdash_{\mathcal{T}'} A_{\mathcal{H}} \leftrightarrow A_{\mathcal{K}}$ $\qquad A \in \Phi(\mathcal{L})$

iii. $\vdash_{\mathcal{T}'} A^{\mathcal{H}} \leftrightarrow A^{\mathcal{K}}$ $\qquad A \in \Phi(\mathcal{L})$.

Dimostrazione.

i ⇒ ii. Per induzione sull'altezza dei termini si dimostra che $t_{\mathcal{H}} = t_{\mathcal{K}}$ per ogni $t \in \mathcal{T}erm(\mathcal{L})$. Per induzione sull'altezza delle formule si dimostra che $\vdash_{\mathcal{T}'} A_{\mathcal{H}} \leftrightarrow A_{\mathcal{K}}$ per ogni $A \in \Phi(\mathcal{L})$.

ii ⇒ iii. Sia $A = (x_1 \doteq x_1)$. Dalla condizione **ii** si ha che $\vdash_{\mathcal{T}'} H \leftrightarrow K$ e quindi che $\vdash_{\mathcal{T}'} H[y] \leftrightarrow K[y]$ per ogni $y \in \mathcal{V}$. Ora con facili passaggi proposizionali si dimostra la condizione **iii**.

iii ⇒ i. Per assurdo non sia $\vdash_{\mathcal{T}'} H \leftrightarrow K$. Siano dunque $\mathfrak{M}$ un modello di $\mathcal{T}'$ e $s\colon \mathcal{V} \to M$ tali che $\not\models_{\mathfrak{M}} H \leftrightarrow K[s]$. Si ha

$$(\models_{\mathfrak{M}} H[s] \text{ e } \not\models_{\mathfrak{M}} K[s]) \quad \text{oppure} \quad (\not\models_{\mathfrak{M}} H[s] \text{ e } \models_{\mathfrak{M}} K[s]).$$

Le due situazioni sono analoghe, quindi senza ledere la generalità consideriamo la prima. Per il Lemma 1 $(\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}}$ è equivalente in $\mathcal{T}'$ a $H \to \neg(x_1 \doteq x_1)$ e $(\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{K}}$ è equivalente in $\mathcal{T}'$ a $K \to \neg(x_1 \doteq x_1)$. Si avrebbe che $\not\models_{\mathfrak{M}} H \to \neg(x_1 \doteq x_1)[s]$ e $\models_{\mathfrak{M}} K \to \neg(x_1 \doteq x_1)[s]$ quindi $\not\models_{\mathfrak{M}} (\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{H}} \leftrightarrow (\neg(x_1 \doteq x_1))^{\mathcal{K}}$ e questo è assurdo. Quindi intanto si ha che $\vdash_{\mathcal{T}'} H \leftrightarrow K$. Sia poi $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{L})$. Si ha che $F(P) \vdash_{\mathcal{T}'} H \to \ldots \to H[x_k] \to F(P)$. Per il Lemma 1 questa formula è equivalente in $\mathcal{T}'$ a $(P(x_1, \ldots, x_k))^{\mathcal{H}}$. Per ipotesi questa formula è equivalente in $\mathcal{T}'$ a $(P(x_1, \ldots, x_k))^{\mathcal{K}}$; per il Lemma 1 questa formula è equivalente in $\mathcal{T}'$ a $K \to \ldots \to K[x_k] \to G(P)$. Inoltre

$$F(P) \vdash_{\mathcal{T}'} H \wedge \ldots \wedge H[x_k] \vdash_{\mathcal{T}'} K \wedge \ldots \wedge K[x_k].$$

Applicando il *modus ponens*, si ha che $F(P) \vdash_{\mathcal{T}'} G(P)$. Analogamente si dimostra che $G(P) \vdash_{\mathcal{T}'} F(P)$ e con questo il lemma è dimostrato.

Come anticipato, conviene considerare equivalenti due interpretazioni $\mathcal{H}, \mathcal{K}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ quando coincidono, a meno di equivalenze in $\mathcal{T}'$.

Definizione 5. Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ due interpretazioni soddisfacenti le ipotesi del Lemma 15. Diremo che $\mathcal{H}$ è *equivalente a* $\mathcal{K}$ e scriveremo $\mathcal{H} \sim \mathcal{K}$, se

i. $\qquad \vdash_{\mathcal{T}'} H \leftrightarrow K$

ii. $\qquad \vdash_{\mathcal{T}'} F(P) \leftrightarrow G(P) \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Osserviamo che la relazione introdotta è di equivalenza sulla classe delle interpretazioni; il Lemma 17 dimostra che essa è compatibile con la composizione.

Lemma 16. *Sia* $\mathcal{H} = (H, F)\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$; *siano poi* $A, B \in \Phi(\mathcal{L})$ *con* $\mathrm{Lib}(A) = \mathrm{Lib}(B)$ *e tali che* $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow B$; *allora* $\vdash_{\mathcal{T}'} A_{\mathcal{H}} \leftrightarrow B_{\mathcal{H}}$.

Per la dimostrazione si utilizzano il Teorema 2 e il Lemma 1.

Lemma 17. *Siano* $\mathcal{H} = (H, F)$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{H}' = (H', F')$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *e siano* $\mathcal{K} = (K, G)$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ *e* $\mathcal{K}' = (K', G')$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ *tali che* $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}'$ *e* $\mathcal{K} \sim \mathcal{K}'$. *Allora* $\mathcal{K}\mathcal{H} \sim \mathcal{K}\mathcal{H}'$ *e* $\mathcal{K}\mathcal{H}' \sim \mathcal{K}'\mathcal{H}'$.

Dimostrazione. Useremo il Lemma 15 anche senza esplicita menzione. Per definizione $\mathcal{K}\mathcal{H} = (H_{\mathcal{K}}, R)$ e $\mathcal{K}\mathcal{H}' = (H'_{\mathcal{K}}, S)$ con R e S funzioni opportune. Per quanto visto $\vdash_{\mathcal{T}''} H_{\mathcal{K}} \leftrightarrow H'_{\mathcal{K}}$. Sia ora $P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, allora $R(P) = F(P)_{\mathcal{K}}$ e $S(P) = F'(P)_{\mathcal{K}}$. Segue che $\vdash_{\mathcal{T}''} R(P) \leftrightarrow S(P)$.

Sia $f \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, allora $R(f) = G(F(f)) = G(F'(f)) = S(f)$. Sia $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, allora $R(c) = G(F(c)) = G(F'(c)) = S(c)$. Segue che $\mathcal{K}\mathcal{H} \sim \mathcal{K}\mathcal{H}'$.

Per definizione $\mathcal{K}'\mathcal{H}' = (H'_{\mathcal{K}'}, T)$ con T funzione opportuna; per il Lemma 15, si ha che $\vdash_{\mathcal{T}''} H'_{\mathcal{K}} \leftrightarrow H'_{\mathcal{K}'}$. Sia $P \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, allora $T(P) = F'(P)_{\mathcal{K}'}$. Segue che $\vdash_{\mathcal{T}''} T(P) \leftrightarrow S(P)$. Sia $f \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, allora $T(f) = G'(H'(f)) = G(H'(f)) = S(f)$. Sia $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, allora $T(c) = G'(H'(c)) = G(H'(c)) = S(c)$. Segue che $\mathcal{K}\mathcal{H}' \sim \mathcal{K}'\mathcal{H}'$.

Dal lemma testé dimostrato segue

Corollario 1. *La relazione di equivalenza* $\sim$ *della Definizione* 5 *è una congruenza.*

Nel Corollario 1 va considerata la struttura di algebra parziale risultante dalla Definizione 4. Per le congruenze ed i quozienti delle algebre parziali si confronti [4].

Osserviamo che a meno di questa congruenza, la composizione di interpretazioni è associativa e ha elementi neutri. Valgono infatti i seguenti risultati:

Lemma 18. *Siano date le interpretazioni:* $\mathcal{H}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, $\mathcal{K}$: $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ *e* $\mathcal{J}$: $\mathcal{T}'' \to \mathcal{T}'''$. *Allora* $\mathcal{J}(\mathcal{K}\mathcal{H}) \sim (\mathcal{J}\mathcal{K})\mathcal{H}$.

Per la dimostrazione si utilizzano i Lemmi 14, 16.

Teorema 4. *Sia* $\mathcal{T}$ *una teoria, sia* $H = (x_1 \doteq x_1)$; *per ogni* $P \in P_k(\mathcal{L})$ *sia* $F(P) = P(x_1, \ldots, x_k)$ *e per ogni* $\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{C}(\mathcal{L})$ *sia* $F(\sigma) = \sigma$. *Allora la coppia* $\mathcal{T} = (H, F)$ *è un'interpretazione di* $\mathcal{T}$ *in* $\mathcal{T}$.

Nell'enunciato seguendo l'uso dei categoristi, è indicato con lo stesso simbolo un oggetto di una categoria e l'identità su di esso.

Dimostrazione. Per induzione sull'altezza delle formule si dimostra che

$$\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow A_{\mathcal{T}} \qquad A \in \Phi(\mathcal{L}). \tag{1}$$

Ne segue che $\vdash_{\mathcal{T}} A^{\mathcal{T}}$ per ogni teorema di A di $\mathcal{T}$. Gli altri requisiti della Definizione 3 sono chiaramente soddisfatti, da cui la tesi.

Definizione 6. Fissata $\mathcal{T}$, l'interpretazione $\mathcal{T}$ definita come nel Teorema 4 verrà detta *identità su* $\mathcal{T}$. Tale terminologia è giustificata dal

Lemma 19. *Siano* $\mathcal{H}\colon \mathcal{T}'' \to \mathcal{T}$ *e* $\mathcal{K}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$. *Allora* $\mathcal{K}\mathcal{T} \sim \mathcal{K}$ *e* $\mathcal{T}\mathcal{H} \sim \mathcal{H}$.

Il lemma è ovvia conseguenza di (1).

Corollario 2. *L'algebra parziale quoziente è una categoria che sarà indicata con* $\mathcal{T}eor$.

La composizione in $\mathcal{T}eor$ è così definita

$$[\mathcal{K}]\cdot[\mathcal{H}] = [\mathcal{K}\mathcal{H}] \qquad \mathcal{H}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}', \quad \mathcal{K}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}''.$$

References

[1] F. Dotti, *La 2-categoria delle teorie e il 2-funtore $\mathcal{M}od$*, Tesi di Laurea, Dip. di Matem., Univ. Parma, 1993-94.

[2] F. Dotti, *Quasi-isomorfismi fra teorie nei linguaggi con simboli funzionali*, Quad. Dip. Mat. **116**, Univ. Parma 1995.

[3] H. Enderton, *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, New York 1972.

[4] G. Grätzer, *Universal algebra*, Van Nostrand Reinhold, New York 1968.

[5] Y. I. Manin, *A course in mathematical logic*, Springer, Berlin 1977.

[6] E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino 1972.

[7] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of metamathematics*, PWN, Warsaw 1963.

[8] M. Servi, *L'ABC delle categorie in cinque lezioni*, Rapp. Matem. 258, Dip. di Matem., Univ. Siena 1993.

[9] J. R. Schoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, Mass., USA 1967.

Summary

In [1] *a suitable category* $\mathcal{T}eor$ *of first order theories has been defined for languages without function symbols. The morphisms are still the equivalence classes of interpretations; but this new setting requires a revised concept of «interpretation» between theories.*

* * *