Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 371-381

A. R. SAMBUCINI (*)

Integrazione per seminorme in spazi localmente convessi (**)

Introduzione

In [3] C. Castaing, A. Touzani, M. Valadier hanno introdotto un integrale per multifunzioni semplici a valori in sottoinsiemi non vuoti, limitati, chiusi e convessi di uno spazio vettoriale topologico E localmente convesso.

Partendo da [3] e da [2] in questo lavoro è stata fornita una teoria di integrazione per multifunzioni, alternativa a quella introdotta in [1]. Il concetto di integrabilità qui usato è quello alla Grothendieck [6], che è una forma più debole dalla integrabilità *forte* introdotta in [2] ed esteso poi in [8] al caso multivoco. La differenza tra l'integrazione in senso forte e quella per semimorme, entrambe estensioni dell'integrazione alla Bochner, risiede nel fatto che, nel secondo tipo, la succesione di multifunzioni semplici definente dipende dalle seminorme.

Di tale integrale sono studiate le proprietà, insieme a teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Sono state poi introdotte e confrontate per tale integrale alcune definizioni di assoluta continuità analoghe a quelle riportate in [7]. I risultati conseguenti in questo lavoro poi utilizzati per ottenere teoremi di Radan-Nikodym in tale assetto.

L'autore desidera ringraziare i prof. D. Candeloro e A. Martellotti per aver suggerito questa ricerca e per le numerose discussioni sull'argomento.

1 - Notazioni

Sia Ω un insieme e Σ una sua σ-algebra. Siano X uno spazio vettoriale localmente convesso e separato e Q un insime filtrante di seminorme continue su X definenti la topologia di X.

(*) Dip. di Matem., Univ. Perugia, via Pascoli, Perugia, Italia.

(**) Ricevuto il 6 Giugno 1994. Classificazione AMS 28 B 20. Lavoro svolto nell'ambito del GNAFA del CNR.

Sia $\mathcal{D} = \{(L, m): L \subset Q,\ L$ è finito, $m \in N\}$. Su $\mathcal{D}$ introduciamo la seguente relazione: $(L_1, m_1) \preccurlyeq (L_2, m_2)$ se e solo se $L_1 \subseteq L_2$ e $m_1 \leqslant m_2$. Poiché Q è filtrante, per ogni $L \subset Q$, L finito, esistono $p_L \in Q$ e $c_L > 1$ tali che $h_p(\cdot, \{0\}) \leqslant c_L h_{p_L}(\cdot, \{0\})$ per ogni $p \in L$. Ad esempio, se $L = \{p_1, \dots, p_r)$, è possibile scegliere $p_L = p_1 + p_2 + \dots + p_r$ e $c_L = 1$.

Denoteremo con $\mathcal{C}_c(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti, chiusi limitati e convessi di X e con Y un sottospazio di $\mathcal{C}_c(X)$ completo. Per ogni $p \in Q$ introduciamo su $\mathcal{C}_c(X)$ la pseudometrica di Hausdorff h_p associata a p, così definita: $h_p(K_1, K_2) = \max\{e_p(K_1, K_2), e_p(K_2, K_1)\}$ dove $e_p(K_1, K_2) = \sup\limits_{x \in K_1} \inf\limits_{y \in K_2} p(x-y)$. Data $F\colon \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ diremo che F è limitata se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che, per ogni $\omega \in \Omega$, $h_p(F(\omega), \{0\}) \leqslant K_p$.

2 - Integrale di multifunzioni

Sia $\mu\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}_0^+$ una massa (cioè una misura finitamente additiva) limitata e sia $F\colon \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione. Nel caso in cui F sia semplice, $(F = \sum\limits_{n=1}^{n} 1_{A_i} C_i$, $C_i \in \mathcal{C}_c(X)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n)$, si definisce come in [3] e [8] $\int\limits_E F \, d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap E) C_i$. Posto $M(E) = \int\limits_E F \, d\mu$, in [8], si ottengono i seguenti risultati:

Lemma. *Se F, G sono multifunzioni semplici, per ogni $p \in Q$ risulta, per ogni $E \in \Sigma$*

$$h_p\Big(\int_E F \, d\mu, \int_E G \, d\mu\Big) \leqslant \int_E h_p(F, G) \, d\mu \qquad |M|_p(E) = \int_E h_p(F, \{0\}) \, d\mu$$

dove $|M|_p(E) = \sup\limits_{(A_i) \in P(E)} \sum\limits_{i \in I} h_p(M(A_i), \{0\})$ e $P(E)$ denota la famiglia di tutte le partizioni finite di E costituite da insiemi Σ-misurabili.

In uno spazio vettoriale topologico localmente convesso possono essere introdotti diversi tipi di misurabilità e di integrabilità. In [8] erano stati introdotti i concetti di totale misurabilità ed integrabilità in questo modo:

Definizione 1. $F\colon \Omega \to Y$ è *totalmente μ-misurabile* se esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n)_n$ tale che, per ogni $p \in Q$,

i$_0$. $h_p(F_n, F)$ è misurabile per ogni $n \in N$ e $h_p(F_n, F)$ μ-converge a zero.

Definizione 2. Data $F: \Omega \to Y$ misurabile, F è *μ-integrabile* se esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n)_n$ che soddisfa $\mathbf{i}_0$ e tale che, per ogni $p \in Q$, risulti

$$\mathbf{i}_1. \qquad \lim_{m,\, n \to \infty} \int_\Omega h_p(F_n, F_m)\, d\mu = 0.$$

Per ogni $E \in \Sigma$ la successione $(\int_E F_n\, d\mu)_n$ è di Cauchy in Y. Si pone allora $\int_E F\, d\mu = x_E$ dove $x_E \in Y$ ed è tale che $\lim_{n \to \infty} h_p(x_E, \int_E F_n\, d\mu) = 0$.

Nel caso in cui la successione definente $(F_n)_n$ dipenda da $p \in Q$ si ottenga le definizioni di totale misurabilità ed integrabilità per seminorme.

Definizione 3. $F: \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ è *totalmente misurabile per seminorme* o *p-misurabile* se per ogni $p \in Q$, esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che

$\mathbf{p}_0$. $h_p(F_n^p, F)$ è misurabile per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $h_p(F_n, F)$ μ-converge a zero.

Definizione 4. $F: \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ è *integrabile per seminorme* o *p-integrabile* se per ogni $p \in Q$ esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che sussista $\mathbf{p}_0$ ed inoltre risulti:

$\mathbf{p}_1$. $h_p(F_n^p, F) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e, per ogni $E \in \Sigma$, $\lim_{n \to \infty} \int_E h_p(F_n^p, F)\, d\mu = 0$

$\mathbf{p}_2$. per ogni $E \in \Sigma$ esiste ed è unico $x_E \in \mathcal{C}_c(X)$ tale che $\lim_{n \to \infty} h_\infty(\int_E F_n^p\, d\mu, x_E) = 0$.

In tal caso si pone $x_E = \int_E F\, d\mu$.

È ovvio che se F è a valori in Y ed è μ-integrabile allora è anche p-integrabile. Inoltre se lo spazio X è di Banach le definizioni date coincidono poiché lo spazio $\mathcal{C}_c(X)$ è completo.

Introduciamo ora alcune definizioni di assoluta continuità analoghe a quelle riportate in [7]:

Definizione 5. Siano $F: \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione p-integrabile e $\mu: \Sigma \to \mathbf{R}$ una massa limitata. Diremo che $\int F\, d\mu$ è *assolutamente continuo rispetto a* μ (e scriveremo $\int F\, d\mu \ll \mu$), se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste un $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$ con $|\mu|(E) < \delta$, si ha $\int_E h_p(F, \{0\})\, d|\mu| < \varepsilon$.

$\int F\, d\mu$ è *scalarmente dominato* rispetto a μ se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $\int_E h_p(F, \{0\})\, d|\mu| \leqslant K_p\, |\mu|(E)$.

L'integrale introdotto nella Definizione 4 è ben definito.

Teorema 2. *Sia F una multifunzione p-integrabile e siano $(F_n^p)_n$, $(G_n^p)_n$ due successioni definenti per F. Denotati allora per ogni $E \in \Sigma$ con x_E, y_E quegli elementi di $\mathcal{C}_c(X)$ per i quali*

$$\lim_{n\to\infty} h_p(\int_E F_n^p \,\mathrm{d}\mu, x_E) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} h_p(\int_E G_n^p \,\mathrm{d}\mu, y_E) = 0$$

risulta $x_E = y_E$.

Dimostrazione. Si prova facilmente che $h_p(x_E, y_E) = 0$ per ogni $p \in Q$ e quindi $x_E = y_E$ poiché entrambi sono chiusi.

Proposizione 5. *Siamo F, G due multifunzioni μ-integrabili. Allora per ogni $p \in Q$*

$$h_p(\int_E F\,\mathrm{d}\mu, \int_E G\,\mathrm{d}\mu) \leq \int_E h_p(F, G)\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Dimostrazione. Ovvia.

Definizione 6. Sia ora $\mu: \Sigma \to \boldsymbol{R}$ una massa a variazione limitata. Una multifunzione F si dice *integrabile per seminorme rispetto a μ* se è integrabile per seminorme rispetto a $|\mu|$ ed in tal caso si pone:

$$\int F\,\mathrm{d}\mu = \int F\,\mathrm{d}\mu^+ - \int F\,\mathrm{d}\mu^- = \int F\,\mathrm{d}\mu^+ \dot{+} \int -F\,\mathrm{d}\mu^- = \overline{\int F\,\mathrm{d}\mu^+ + \int -F\,\mathrm{d}\mu^-}.$$

Infatti, se F è integrabile per seminorme rispetto a $|\mu|$, esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ definente. La $\mathbf{p}_0$ segue immediatamente dal fatto che $\mu^{\pm} \leq |\mu|$, poiché $\int h_p(F_n^p, F)\,\mathrm{d}\mu^{\pm} \leq \int h_p(F^p, F)\,\mathrm{d}\mu \to \infty$ segue la $\mathbf{p}_1$. Per quanto riguarda la $\mathbf{p}_2$, per ogni $E \in \Sigma$, denotato con x_E l'elemento di $\mathcal{C}_c(X)$ tale che $\int_E F\,\mathrm{d}|\mu| = x_E$, i valori

$$x_E^+ = \begin{matrix} x_E & \text{se } \mu(E) > 0 \\ \{0\} & \text{se } \mu(E) \leq 0 \end{matrix} \qquad x_E^- = \begin{matrix} x_E & \text{se } \mu(E) < 0 \\ \{0\} & \text{se } \mu(E) \geq 0 \end{matrix}$$

soddisfano la $\mathbf{p}_2$ per μ^+ e μ^- rispettivamente.

Analogamente a [8] $h_p(\int_E F\,\mathrm{d}\mu, \{0\}) \leq \int_E h_p(F, \{0\})\,\mathrm{d}|\mu|$ e posto $M(E) = \int_E F\,\mathrm{d}\mu$, risulta $|M|_p(E) = \int_E h_p(F, (0\})\,\mathrm{d}|\mu|$ per ogni $E \in \sigma$.

3 - Alcuni teoremi di convergenza

D'ora in poi μ si suppone a valori in $\boldsymbol{R}$ e limitata ed F a valori in Y.

Definizione 7. Una famiglia finita o numerabile di insiemi a due a due disgiunti $(E_i)_i \in \Sigma$ si darà una *μ-esaustione* di Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \boldsymbol{N}$ tale che $|\mu|(\Omega - \bigcup_{i \leq N} E_i) < \varepsilon$.

Sia $\{E_i\}_i$ μ-esaustione di Ω tale che $\Omega = \bigcup_{i \in N} E_i$. Sia $(C_n)_n$ una successione in Y tale che per ogni $p \in Q$ esiste $r_p > 0$, per cui $h_p(C_n, \{0\}) \leq r_p$ per ogni n. Definiamo $F = \sum_{i=1}^{\infty} C_i 1_{E_i}$. F è μ-integrabile (Proposizione 2.9 di [7]) e quindi p-integrabile.

Teorema 3. *Se F è p-misurabile e per ogni $p \in Q$ la funzione scalare $h_p(F, \{0\})$ è μ-integrabile, allora la F è p-integrabile.*

Dimostrazione. Per ogni $p \in Q$ sia $(G_n^p)_p$ una successione di multifunzioni semplici che soddisfa $\mathbf{p}_0$. Costruiamo una nuova successione di multifunzioni semplici, a partire dalla $(G_n^p)_n$, che soddisfi anche la proprietà $\mathbf{p}_1$. Intanto $h_p(G_n^p, F) \leq h_p(G_n^p, \{0\}) + h_p(F, \{0\})$ e quindi è integrabile.

Sia $B_{n,k}^p = \{x \colon h_p(G_n^p, F) > \frac{1}{k\mu(\Omega)}\}$, poiché per ogni $p \in Q$ G_n^p $|\mu|$-converge ad F, per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ sia ha $\lim_{n \to \infty} |\mu|(B_{n,k}^p) = 0$ e quindi, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{1}{k}$, esisterà $N(k) > k$ tale che, per ogni $n \geq N(k)$, $|\mu|(B_{n,k}^p) < \frac{1}{k}$. Sia $H_k^p = G_{N(k)}^p 1_{(B_{N(k),k}^p)^c}$. H_k^p è una multifunzione semplice per costruzione; inoltre, per ogni $\alpha > 0$

$$|\mu|(\{z \colon h_p(H_k^p, F) > \alpha\}) \leq |\mu|(\{x \in \Omega - B_{N(k),k}^p \colon h_p(G_{N(k)}^p, F) > \alpha\}) + |\mu|(B_{N(k),k}^p)$$

e poiché il secondo membro della disuguaglianza tende a zero per $k \to \infty$, per ogni $p \in Q$ H_k^p $|\mu|$-converge ad F. Ora, fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q$ e scelto $\delta(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ come quello della assoluta continuità dell'integrale di $h_p(F, \{0\})$, per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ tale $\frac{1}{k} \leq \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$ si ha

$$\int_\Omega h_p(H_k^p, F)\,\mathrm{d}|\mu| = \int_{\Omega - B_{N(k),k}^p} h_p(G_{N(k)}^p, F)\,\mathrm{d}|\mu| + \int_{B_{N(k),k}^p} h_p(F, \{0\})\,\mathrm{d}|\mu|$$

$$\leq \frac{1}{k} + \int_{B_{N(k),k}^p} h_p(F, \{0\})\,\mathrm{d}|\mu| \leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon .$$

Mostriamo ora che esiste ed è unico per ogni $E \in \Sigma$, in elemento $I_E \in Y$ tale che, per ogni $p \in Q$, $\lim_{k \to \infty} h_p(\int_E H_k^p \, d\mu, I_E) = 0$.

Per quanto visto sopra, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste $K(\varepsilon, p) \in N$ tale che, per ogni $k \geqslant K(\varepsilon, p)$ si ha $\int_\Omega h_p(H_k^p, F) \, d|\mu| < \varepsilon$. Costruiamo ora una successione generalizzata in questo modo: fissati $(L, m) \in \mathcal{D}$ e posto $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ sia $K(m, p_L) \in N$ tale che per ogni $k \geqslant K(m, p_L)$, $\int_\Omega h_{p_L}(H_k^{p_L}, F) \, d|\mu| < \dfrac{1}{m}$.

Posto allora $S_{(L,m)} = H^{p_L}_{m + K(m, p_L)}$, dimostriamo che la successione generalizzata $(\int_E S_{(L,m)} \, d\mu)_{(L,m)}$ è di Cauchy in Y per ogni $E \in \Sigma$. Fissati $p \in Q$ ed $\varepsilon > 0$ sia $(L^*, m^*) \in \mathcal{D}$ in modo che $p \in L^*$ ed $m^* > \dfrac{2}{\varepsilon}$, risulta allora, per ogni (L_1, m_1), $(L_2, m_2) \in \mathcal{D}$ con $(L^*, m^*) \leqslant (L_1, m_1)$, $(L^*, m^*) \leqslant (L_2, m_2)$:

$$h_p(\int_E S_{(L_1, m_1)} \, d\mu, \int_E S_{(L_2, m_2)} \, d\mu) \leqslant \int_E h_p(S_{(L_1, m_1)}, S_{(L_2, m_2)}) \, d|\mu|$$

$$\leqslant \int_E h_p(S_{(L_1, m_1)}, F) \, d|\mu| + \int_E h_p(S_{(L_2, m_2)}, F) \, d|\mu|$$

$$\leqslant \int_E h_{p_{L_1}}(S_{(L_1, m_1)}, F) \, d|\mu| + \int_E h_{p_{L_2}}(S_{(L_2, m_2)}, F) \, d|\mu| \leqslant \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leqslant \varepsilon .$$

Allora, per la completezza di Y, per ogni $E \in \Sigma$ esiste $I_E \in Y$ per il quale $\lim_{(L,m) \in \mathcal{D}} \int_E S_{(L,m)} \, d\mu = I_E$. Mostriamo che I_E soddisfa la $\mathbf{p}_2$, relativa a $(H_n^p)_n$, e quindi che F è p-integrabile. Fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q$, $E \in \Sigma$ esistono $m^* > \dfrac{3}{\varepsilon}$ ed L^* in modo che $p \in L^*$ e $h_p(\int_E S_{(L^*, m^*)} \, d\mu, I_E) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Scelto poi $k > \max\{K(m^*, p_L), K(m^*, p)\}$, risulta

$$h_p(\int_E H_k^p \, d\mu, I_E) \leqslant h_p(\int_E H_k^p \, d\mu, \int_E S_{(L,m)} \, d\mu) + h_p(\int_E S_{(L,m)} \, d\mu, I_E)$$

$$\leqslant \int_E h_p(H_k^p, H^{p_L}_{m + K(m, p_L)}) \, d|\mu| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leqslant \int_E h_p(H_k^p, F) \, d|\mu| + \int_E h_{p_L}(H^{p_L}_{m + K(m, p_L)}, F) \, d|\mu| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon$$

e quindi $\lim_{k \to \infty} h_p(\int_E H_k^p \, d\mu, I_E) = 0$.

Diamo ora un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 4 (di Vitali). *Sia $(F_n^p)_n$ una successione di multifunzioni p-inte-*

grabili tali che, per ogni $p \in Q$, F_n^p μ-converge ad F e $\int h_p(F_n^p, \{0\})\, d|\mu| \ll \mu$ uniformemente in n. Allora F è p-integrabile e

$$\lim_{n \to \infty} \int F_n^p\, d\mu = \int F\, d\mu .$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'integrabilità di F basta provare che per ogni $p \in Q$ la funzione scalare $h_p(F, \{0\})$ è μ-integrabile. Poiché, fissati $p \in Q$, $n \in N$, la funzione F_n^p è integrabile per seminorme, esiste una successione $(G_{n,k}^p)_k$ definente e quindi per ogni $\alpha > 0$ $\lim_{k \to \infty} \mu(\{x: h_p(F_n^p, G_{n,k}^p) > \alpha\}) = 0$ e $\lim_{k \to \infty} \int_\Omega h_p(F_n^p, G_{n,k}^p)\, d|\mu| = 0$. In corrispondenza allora di $\alpha = \frac{1}{2^n}$ esisterà $K = K(n, p)$ tale per ogni $k \geqslant K$

$$|\mu|(\{x: h_p(F_n^p, G_{n,k}^p) > \frac{1}{2^n}\}) < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \int_\Omega h_p(F_n^p, G_{n,k}^p)\, d|\mu| < \frac{1}{2^n} .$$

Sia allora $G_n^p = G_{n,K}^p$. La funzione $h_p(G_n^p, F)$ è misurabile poiché F lo è e G_n^p è semplice; inoltre, per ogni $\alpha > 0$ esisterà $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geqslant \bar{n}$ $\frac{1}{2^n} < \frac{\alpha}{2}$ e

$$\{x: h_p(G_n^p, F) > \alpha\} \subset \{x: h_p(G_{n,k}^p, F_n^p) > \frac{1}{2^n}\} \cup \{x: h_p(F_n^p, F) > \alpha - \frac{1}{2^n}\}$$

e quindi per ogni $p \in Q$ G_n^p $|\mu|$-converge ad F. Allora per la disuguaglianza

$$|h_p(G_n^p, \{0\}) - h_p(F, \{0\})| \leqslant h_p(G_n^p, F)$$

segue la convergenza in $|\mu|$-misura di $h_p(G_n^p, \{0\})$ ad $h_p(F, \{0\})$. Inoltre la successione $h_p(G_n^p, \{0\})$ è di Cauchy in media e quindi $h_p(F, \{0\})$ è μ-integrabile. Risulta infatti

$$\int_\Omega h_p(G_n^p, G_m^p)\, d|\mu| \leqslant \int_\Omega h_p(G_{n,K(n,p)}^p, F_n^p)\, d|\mu| + \int_\Omega h_p(F_n^p, F_m^p)\, d|\mu|$$

$$+ \int_\Omega h_p(F_m^p, G_{m,K(m,p)}^p)\, d|\mu| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} + \int_\Omega h_p(F_n^p, F_m^p)\, d|\mu| .$$

Posto $A_{n,m}^p = (x: h_p(F_n^p, F_m^p) > \alpha\}$ risulta $\lim_{n, m \to \infty} |\mu|(A_{n,m}^p) = 0$ e quindi

$$\int_\Omega h_p(F_n^p, F_m^p)\, d|\mu| = \int_{A_{n,m}^p} h_p(F_n^p, F_m^p)\, d|\mu| + \int_{\Omega - A_{n,m}^p} h_p(F_n^p, F_m^p)\, d|\mu|$$

$$\leqslant \alpha|\mu|(\Omega) + \int_{A_{n,m}^p} h_p(F_n^p, \{0\}) + h_p(F_m^p, \{0\})\, d|\mu|$$

e quindi per le ipotesi fatte segue l'integrabilità. Per il Teorema 3 F è quindi p-integrabile ed è possibile costruire, a partire dalla successione $(G_n^p)_n$, una nuova successione $(H_l^p)_l$ di multifunzioni semplici definente nel seguente modo. Sia $B_{n,l}^p = \{x\colon h_p(G_n^p, F) > \frac{1}{l\mu(\Omega)}\}$; in corrispondenza di $\frac{1}{l}$ esisterà $n(l) > l$ tale che per $n \geqslant n(l)$ $|\mu|(B_{n,l}^p) < \frac{1}{l}$. Si pone allora $H_l^p = G_{n(l)}^p 1_{(B_{n(l),l}^p)^c}$. Fissati dunque $\varepsilon > 0$, $p \in Q$, $\delta(\frac{1}{\varepsilon}, p) > 0$ come quello della assoluta continuità unifome di $\int h_p(F_n^p, \{0\})\, \mathrm{d}|\mu|$ rispetto a μ ed $E \in \Sigma$, sia $n'(\frac{\varepsilon}{5}) \in N$, tale che $\frac{1}{2n'-1} < \frac{\varepsilon}{5}$, e sia $l^* \in N$, $l^* > n' + \frac{1}{\delta}$, tale che per ogni $l > l^*$ $h_p(\int_E H_l^p\, \mathrm{d}l, \int_E F\, \mathrm{d}\mu) \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$. In corrispondenza di l^* rimane determinato anche $n(l^*) > l^* \in N$. Risulta allora, per ogni $l \geqslant l^*$ e per ogni $n \geqslant n(l)$

$$h_p(\int_E F_n^p\, \mathrm{d}\mu, \int_E F\, \mathrm{d}\mu)$$

$$\leqslant h_p(\int_E F_n^p\, \mathrm{d}\mu, \int_E G_n^p\, \mathrm{d}\mu) + h_p(\int_E G_n^p\, \mathrm{d}\mu, \int_E G_{n(l)}^p 1_{(B_{n(l),l}^p)^c}\, \mathrm{d}\mu) + h_p(\int_E G_{n(l)}^p 1_{(B_{n(l),l}^p)^c}\, \mathrm{d}\mu, \int_E F\, \mathrm{d}\mu)$$

$$\leqslant \int_E h_p(F_n^p, G_n^p)\, \mathrm{d}|\mu| + \int_{E \cap B_{n(l),l}^p} h_p(G_n^p, \{0\})\, \mathrm{d}|\mu| + \int_{E - B_{n(l),l}^p} h_p(G_n^p, G_{n(l)}^p)\, \mathrm{d}|\mu| + \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{5} + \int_{E \cap B_{n(l),l}^p} h_p(G_n^p, F_n^p) + h_p(F_n^p, \{0\})\, \mathrm{d}|\mu| + \frac{2}{5}\varepsilon$$

$$\leqslant \frac{3}{5}\varepsilon + \int_{E \cap B_{n(l),l}^p} h_p(G_n^p, F_n^p)\, \mathrm{d}|\mu| + \int_{E \cap B_{n(l),l}^p} h_p(F_n^p, \{0\})\, \mathrm{d}|\mu| \leqslant \varepsilon.$$

Come conseguenza del Teorema di Vitali si ha

Teorema 5 (della Convergenza dominata). *Data una multifunzione p-misurabile F, sia $(F_n^p)_n$ una successione di multifunzioni che $|\mu|$-converge ad F e sia g una funzione μ-integrabile tale che per ogni $n \in N$ e per $p \in Q$ $h_p(F_n^p(x), \{0\}) \leqslant g(x)$ μ-quasi ovunque. Allora F è p-integrabile e*

$$\int_E F\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E F_n^p\, \mathrm{d}\mu .$$

Bibliografia

[1] R. J. AUMANN, *Integrals of sets valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 1-12.

[2] C. BLONDIA, *Integration in locally convex spaces*, Simon Stevin **55** (1981), 81-102.

[3] C. CASTAING, A. TOUZANI et A. VALADIER, *Théorème de Hoffmann-Jorgensen et application aux amarts multivoques*, Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 383-397.

[4] C. CASTAING and A. VALADIER, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. **580**, Springer, Berlin 1977.

[5] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part 1*, Interscience, New York 1958.

[6] D. GILLIAM, *On integration and Radon-Nikodym theorem in quasi-complete locally convex topological vector spaces*, J. Reine Angew. Math. **292** (1977), 125-137.

[7] A. MARTELLOTTI, K. MUSIAL and A. R. SAMBUCINI, *A Radon-Nikodym theorem for the Bartle-Dunford-Schwartz integral with respect to finitely additive measures*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 42 (1994), 625-633.

[8] A. MARTELLOTTI and A. R. SAMBUCINI, *A Radon-Nikodym theorem for multimeasures*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 42 (1994), 579-599.

Summary

Here we introduce an integral, which is an estension of the Grothendieck integral and give some convergence theorems.

* * *

Finito di stampare il 25 Luglio 1995 Nuova Tipografia Compositori Bologna