Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 341-354

GIANCARLO CANTARELLI (*)

Sulla limitatezza parziale dei moti dei sistemi olonomi scleronomi (**)

1 - Introduzione

Sia S un sistema materiale con n gradi di libertà, soggetto a vincoli olonomi, bilaterali, fissi e lisci (sistema *olonomo scleronomo*), e sia $q^T = (q_1, \ldots, q_n)$ una n-upla di coordinate lagrangiane *indipendenti*, variabili in $\boldsymbol{R}^n$. Sia $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\,\dot{q}$ l'energia cinetica di S, dove $A = A(q)$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, *definita positiva* per ogni $q \in \boldsymbol{R}^n$, e di classe $C^1(\boldsymbol{R}^n)$. La sollecitazione attiva agente sul sistema S sia costituita da forze derivanti da un potenziale *generalizzato*, con energia potenziale $\pi = \pi(t, q)$ di classe $C^1(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n)$, e da altri tipi di forze di componenti lagrangiane $Q^T = (Q_1, \ldots, Q_n)$, funzioni definite e continue in $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$. Le funzioni $A(q)$, $\pi(t, q)$, $Q(t, q, \dot{q})$ siano inoltre sufficientemente regolari in modo da assicurare l'unicità delle soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S.

Nel presente lavoro si forniscono delle condizioni sufficienti per la limitatezza parziale (cioè rispetto ad una parte delle variabili: $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, secondo la definizione di A. S. Oziraner [6]) delle soluzioni delle equazioni di Lagrange

---

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 4.2.1994. Classificazione AMS 34 C 11. Lavoro eseguito con i fondi MURST, 40% e 60%.

del sistema S, utilizzando il metodo di confronto [5] e scegliendo come funzione di Liapunov la seguente funzione [2]

$$V(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + F(t, q), \tag{1.1}$$

che è la somma dell'energia cinetica di S e di un'opportuna funzione F: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ di classe C^1, la quale, in generale, differisce dall'energia potenziale π del sistema S. Questa funzione di Liapunov permette di studiare anche i casi in cui l'energia potenziale π *non è inferiormente limitata* in $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$.

Si suppone che la funzione di Liapunov (1.1) soddisfi in $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ alla disuguaglianza differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) = [Q^T + \frac{\partial(F - \pi)}{\partial q}]\,\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \leqslant g(t, T + F) \tag{1.2}$$

dove g: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ è una funzione continua e tale da assicurare l'unicità e l'esistenza globale in futuro di tutte le soluzioni $u(t, t_0, u_0)$ dell'*equazione differenziale di confronto* $\dot{u} = g(t, u)$. Allora, per il metodo di confronto, si ha

$$T(q(t), \dot{q}(t)) + F(t, q(t)) \leqslant u(t, t_0, u_0) \quad \text{in } I \tag{1.3}$$

dove $q = q(t)$ è una qualunque soluzione delle equazioni di Lagrange, definita nell'intervallo massimale destro di esistenza $I = [t_0, \omega)$, e $u(t, t_0, u_0)$ è la soluzione dell'equazione di confronto soddisfacente la condizione iniziale

$$u(t_0) = u_0 \geqslant T(q(t_0), \dot{q}(t_0)) + F(t_0, q(t_0)).$$

In 2 si forniscono delle condizioni sufficienti per la limitatezza parziale del più generale sistema olonomo scleronomo S. L'originalità dei Teoremi 1 e 2 consiste nel fatto che non si richiede la limitatezza delle soluzioni dell'equazione di confronto. Vengono inoltre stabiliti due teoremi (Teoremi 3, 4) nei quali si suppone che le soluzioni $u(t, t_0, u_0)$ siano limitate. Il Teorema 3 generalizza alcuni risultati di [7], [3].

Alcuni esempi illustrano i principali risultati ottenuti.

2 - Condizioni sufficienti per la limitatezza parziale delle soluzioni delle equazioni di Lagrange

Sia $x^T = (q_1, \ldots, q_m)$ il vettore costituito dalle prime m ($\leqslant n$) coordinate lagrangiane, e sia y un vettore avente per componenti *tutte* le rimanenti coordinate $(q_{m+1}, \ldots, q_n)$ ed eventualmente alcune coordinate lagrangiane del vettore x.

Col simbolo ξ si indica un vettore avente per componenti alcune delle coordinate lagrangiane. Inoltre con i simboli $\|q\|$, $\|x\|$, $\|y\|$, $\|\xi\|$ si indicano le norme euclidee dei vari vettori nei rispettivi spazi vettoriali, mentre con K_* si indica la classe delle funzioni continue φ: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *strettamente crescenti*, con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(s) \to \infty$ per $s \to \infty$.

Sussiste il teorema.

Teorema 1. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistano globalmente in futuro, e che inoltre siano soddisfatte le condizioni*

i *esiste una funzione* F: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *di classe* C^1 *tale che si abbia*

$$[Q^T + \frac{\partial(F - \pi)}{\partial q}]\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \leqslant g(t, T + F) \qquad \textit{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

dove g: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ *è una funzione continua e tale da assicurare, per ogni* $t_0 \geqslant 0$ *e* $u_0 \geqslant 0$, *l'unicità e l'esistenza globale in futuro della soluzione* $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ *dell'equazione differenziale di confronto* $\dot{u} = g(t, u)$.

ii *esistono una funzione* $\varphi \in K_*$ *e, per ogni* $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, *una costante* $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ *tali che si abbia*

$$F(t, q) \geqslant \alpha u(t)\varphi(\|x\|) \qquad \textit{in } [t_0, \infty) \times \boldsymbol{R}^n .$$

Allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono x-equilimitate, cioè $\forall \rho > 0$, $\forall t_0 \geqslant 0$, $\exists L > 0$ *per cui risulta*

$$\|x(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| < L \quad \forall t \geqslant t_0 \quad \forall (q_0, \dot{q}_0) \mid \|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leqslant \rho . \tag{2.1}$$

Assegnati ad arbitrio $\rho > 0$ e $t_0 \geqslant 0$, sia

$$\gamma = \max\{T(q_0, \dot{q}_0) + F(t_0, q_0) \mid \|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leqslant \rho\} .$$

Si indichi con $u(t)$ una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale di confronto soddisfacente la condizione iniziale $u_0 = u(t_0) > \gamma$, e con $q(t) = q(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ una qualsiasi soluzione delle equazioni di Lagrange con $\|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leqslant \rho$.

Posto, per brevità, $T(q(t), \dot{q}(t)) = T(t)$ e $F(t, q(t)) = F(t)$, per la condizione **i** del teorema si riconosce (utilizzando il metodo di confronto) che lungo la soluzione $q(t)$ sussiste la seguente disuguaglianza

$$T(t) + F(t) < u(t) \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.2}$$

e quindi, per la condizione **ii** del teorema, esiste una costante $\alpha = \alpha(t_0, u_0) > 0$ tale che

$$\alpha u(t)\,\varphi(\|x(t)\|) \leqslant F(t) < u(t) \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.3}$$

dove $x(t) = x(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$, da cui si ottiene

$$\varphi(\|x(t)\|) < \frac{1}{\alpha} \qquad \text{in } [t_0, \infty)$$

ed è perciò soddisfatta la (2.1) con $L = \varphi^{-1}(\frac{1}{\alpha})$.

Nel caso particolare (ed assai frequente) in cui l'equazione di confronto è lineare, si possono ottenere delle condizioni sufficienti per la limitatezza parziale *uniforme* delle soluzioni delle equazioni di Lagrange. Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema 2. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistano globalmente in futuro, e che inoltre siano soddisfatte le seguenti condizioni*

i′ *esiste una funzione* F: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *di classe* C^1 *tale che si abbia*

$$[Q^T + \frac{\partial(F-\pi)}{\partial q}]\,\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \leqslant v(t)(T+F) \qquad \textit{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

dove v: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *è una funzione continua*

ii′ *esistono una funzione* $\varphi \in K_*$ *ed una funzione continua* h: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$, *tali che, per ogni* $(t, q) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$, *si abbia*

$$F(t, q) = h(q)\exp\{\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\} \qquad h(q) \geqslant \varphi(\|x\|).$$

Allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono x-uniformemente limitate (cioè la costante L, che compare nella (2.1), *è indipendente da* t_0).

Assegnato ad arbitrio $\rho > 0$, sia

$$\delta = \max\{T(q_0, \dot{q}_0) + h(q_0) \mid \|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leqslant \rho\},$$

e sia $q(t)$ una qualsiasi soluzione delle equazioni di Lagrange con $\|q(t_0)\| + \|\dot{q}(t_0)\| \leqslant \rho$.

Posto, per comodità, $\lambda(t) = \exp\{\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\}$, per la condizione **i**′ del teorema si ottiene la disuguaglianza

$$T(t) + F(t) \leqslant \frac{\lambda(t)}{\lambda(t_0)}(T(t_0) + F(t_0)) \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.5}$$

e poiché $T(t_0) + F(t_0) = T(q_0, \dot{q}_0) + \lambda(t_0)h(q_0) \leqslant \delta\lambda(t_0)$ (essendo $\lambda(t) \geqslant 1$), per la condizione (ii)$'$ del teorema si ha

$$\lambda(t)\varphi(\|x(t)\|) \leqslant F(t) \leqslant \delta\lambda(t) \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.6}$$

da cui segue che

$$\varphi(\|x(t)\|) < \delta \qquad \text{in } [t_0, \infty). \tag{2.7}$$

È perciò soddisfatta la (2.1) con la costante $L = \varphi^{-1}(\delta)$, che è *indipendente* da t_0.

Per verificare che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono globalmente in futuro, come si suppone nei teoremi precedenti, si può fare ricorso ai criteri stabiliti in [7], [2], [3], oppure si può introdurre un'opportuna ipotesi sull'energia cinetica, come è illustrato dal seguente corollario dei precedenti teoremi.

Corollario 1. *Si supponga che siano soddisfatte le condizioni* **i**, **ii** *del Teorema* 1 (*o* **i**$'$, **ii**$'$ *del Teorema* 2), *unite alla seguente*

iii *esiste una funzione continua* b: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+ = (0, \infty)$ *tale che si abbia*

$$T(q, \dot{q}) \geqslant b(\|x\|)\|\dot{y}\|^2 \qquad \textit{in } \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

dove y è il vettore avente per componenti almeno tutte le coordinate lagrangiane $q_{m+1}, \ldots, q_n$.

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono globalmente in futuro ed inoltre sono x-equilimitate (*o x-uniformemente limitate*).

Si supponga, per assurdo, che una soluzione $q(t)$ delle equazioni di Lagrange sia definita nell'intervallo massimale destro di esistenza $[t_0, \omega)$ limitato, cioè che sia $t_0 < \omega < \infty$. Allora, come è ben noto, si ha

$$\lim_{t \to \omega^-} \{\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\|\} = \infty . \tag{2.8}$$

Seguendo la dimostrazione del Teorema 1 si ottiene la (2.2), valida però soltanto nell'intervallo limitato $[t_0, \omega)$, da cui si deducono le due disuguaglianze

$$\alpha\varphi(\|x(t)\|) < 1 \qquad \text{in } [t_0, \omega) \tag{2.9}$$

$$T(t) \leqslant k \qquad \text{in } [t_0, \omega) \tag{2.10}$$

dove k è il massimo della funzione continua $u(t)$ in $[t_0, \omega]$. Posto $B = \min\{b(\|x\|) \mid \|x\| \leqslant \varphi^{-1}(\frac{1}{\alpha})\}$, per la condizione **iii** del corollario, dalla (2.10) si ottiene

$$B\|\dot{y}(t)\|^2 < k \qquad \text{in } [t_0, \omega) \tag{2.11}$$

e poiché $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y(t)\| \leqslant \|\dot{y}(t)\|$ (la derivata $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ che compare a primo membro va sostituita con la derivata destra negli eventuali istanti in cui è $y(t) = 0$), integrando rispetto al tempo sull'intervallo $[t_0, \omega)$ si ottiene

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(t_0)\| + \sqrt{kB^{-1}}(\omega - t_0) \qquad \text{in } [t_0, \omega). \tag{2.12}$$

Dato che ogni coordinata lagrangiana $q_1, \ldots, q_n$ compare in almeno uno dei due vettori x, y, risulta $\|q\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, e quindi, per la (2.9) e la (2.12), si ha

$$\|q(t)\| < \Lambda = \varphi^{-1}(\frac{1}{\alpha}) + \|y(t_0)\| + \sqrt{kB^{-1}}(\omega - t_0) \quad \text{in } [t_0, \omega). \tag{2.13}$$

A questo punto è sufficiente ricordare (cfr. [3]) che esiste sempre una funzione continua $a\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$, tale che si abbia

$$T(q, \dot{q}) \geqslant a(\|q\|)\|\dot{q}\|^2 \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \tag{2.14}$$

per cui, indicando con A il minimo della funzione continua $a(s)$ nell'intervallo limitato $[0, \Lambda]$, per la (2.13) si ottiene

$$A\|\dot{q}(t)\|^2 \leqslant T(t) \leqslant k \qquad \text{in } [t_0, \omega) \tag{2.15}$$

e quest'ultima disuguaglianza, unita alla (2.13), è in contradizione con la (2.8).

Quando i coefficienti dell'energia cinetica T sono funzioni della sola x (come succede, ad esempio, quando S è un sistema con coordinate *cicliche* o *quasi cicliche* ed x è il vettore delle coordinate posizionali), allora la condizione **iii** del Corollario 1 risulta soddisfatta per $\dot{y} = \dot{q}$ (cfr. [3]). Per la (2.14), ciò è sempre verificato quando $x = q$, per cui sussiste il seguente corollario.

Corollario 2. *Se sono soddisfatte le condizioni* **i**, **ii** *del Teorema* 1 *e se si ha $x = q$, allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono global-*

mente in futuro e sono q-equilimitate. Se invece sono soddisfatte le condizioni **i**$'$, **ii**$'$ *del Teorema 2 e si ha $x = q$, allora la limitatezza è uniforme.*

Esempio 1 (cfr. l'esempio 1 di [3]). Si consideri il sistema S costituito da un elemento P di massa m, vincolato ad appartenere alla superficie liscia generata dalla rotazione, attorno all'asse z di una terna inerziale $0xyz$, della curva di equazioni $x = f(z)$, $y = 0$, dove f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_0^+$ è una funzione di classe C^1, soddisfacente in $\boldsymbol{R}$ la condizione $f(z) \geqslant \varphi(|z|)$ con $\varphi \in K_*$.

Si supponga inoltre che l'elemento sia soggetto ad una forza di tipo elastico $-k(t)\,\overrightarrow{P_*P}$, dove P_* è la proiezione ortogonale di P sull'asse z e k: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ è una funzione *crescente* di classe C^1.

Tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono globalmente in futuro, come è già stato dimostrato in [3], o come sarebbe possibile verificare mediante il Corollario 1.

Scegliendo come coordinate lagrangiane (indipendenti) la quota z e l'angolo orientato ϑ che il semipiano zP forma col semipiano fisso $y = 0$, $x \geqslant 0$, l'energia potenziale dell'unica forza attiva assume l'espressione

$$\pi(t, z) = \frac{1}{2} k(t) f^2(z). \tag{2.16}$$

Tenuto conto della (1.2) si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + \pi) = \frac{1}{2}\dot{k}(t) f^2(z) \leqslant \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}(T + \pi) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2 \tag{2.17}$$

da cui si riconosce che tutte le condizioni del Teorema 2 risultano soddisfatte con

$$F(t, z) = \pi(t, z) \qquad v(t) = \dot{k}(t)(k(t))^{-1} \qquad h(q) = \frac{1}{2} k(0) f^2(z) \qquad x = z$$

e perciò le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono *z-uniformemente limitate.*

In corrispondenza ad un arbitrario numero reale $r > 0$, siano S_r^+ (1) e C_r i sot-

(1) Un insieme simile ad S_r^+ è stato introdotto da I. Tereki e L. Hatvani in *Lyapunov functions of the mechanical energy type*, Prikl. Mat. Mekh. 49 (1985), 894-899; J. Appl. Math. Mech. 49 (1985), 683-687.

toinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$ così definiti

$$S_r^+ = \bigcup_{t \geqslant 0} \{q \in \boldsymbol{R}^n \mid F(t, q) \leqslant r\} \tag{2.18}$$

$$C_r = \{q \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}. \tag{2.19}$$

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 3. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistano globalmente in futuro e che inoltre siano soddisfatte le seguenti condizioni*

i″ *è verificata la condizione* **i** *del Teorema* 1, *e inoltre tutte le soluzioni dell'equazione di confronto sono limitate*

ii″ *esistono una funzione* $\varphi \in K_*$ *e, per ogni* $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, *una costante* $\alpha = \alpha(t_0, u_0)$ *tali che si abbia*

$$F(t, q) \geqslant \alpha u(t)\, \varphi(\|x\|) \qquad \textit{in } [t_0, \infty) \times \boldsymbol{R}^n$$

iii′ *fissati ad arbitrio* $r > 0$, $\widehat{r} > 0$, *esiste una costante* $\beta = \beta(r, \widehat{r}) > 0$ *tale che si abbia*

$$T(q, \dot{q}) \geqslant \beta \|\dot{\xi}\|^2 \qquad \textit{in } (S_r^+ \cap C_{\widehat{r}}) \times \boldsymbol{R}^n$$

dove $\dot{\xi}$ *è un vettore che ha per componeti alcune velocità lagrangiane.*

Allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono $(x, \dot{\xi})$*-equilimitate, cioè* $\forall \rho > 0$, $\forall t_0 \geqslant 0$, $\exists M > 0$ *per cui risulta* .

$$\|x(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| + \|\dot{\xi}(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| < M \tag{2.20}$$

$\forall (q_0, \dot{q}_0)$ *tale che* $\|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leqslant p$ *e* $\forall t \geqslant t_0$.

Se inoltre sono soddisfatte le ulteriori condizioni

iv *le soluzioni dell'equazione di confronto sono uniformemente limitate*

v *esiste una funzione continua* $H\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^+$ *tale che si abbia* $F(t, q) \leqslant H(q)$ *in* $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$

vi *la costante* α *è indipendente da* t_0

allora la limitatezza è uniforme.

Siano assegnati $\rho > 0$, $t_0 \geqslant 0$, e sia $q(t)$ una qualsiasi soluzione delle equazioni di Lagrange con $\|q(t_0)\| + \|\dot{q}(t_0)\| \leqslant \rho$. Seguendo la dimostrazione del Teorema 1, si perviene alla (2.4), la quale assicura la *x-equilimitatezza* delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Inoltre, data la limitatezza delle soluzioni dell'equazione differenziale di confronto, per ogni $t_0 \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, esiste una costante $r = r(t_0, u_0)$ tale che si abbia $u(t, t_0, u_0) < r$, per ogni $t \geqslant t_0$.

Dalla (2.2) si ottengono allora le seguenti disuguaglianze

$$F(t) < r \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.21}$$

$$T(t) < r \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.22}$$

e la (2.21), unita alla (2.4), implica che $q(t) \in S_r \cap C_L$, per ogni $t \geqslant t_0$. Di conseguenza, posto $\xi(t) = \xi(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$, per la condizione (iii)$'$ del Teorema 3, esiste una costante $\beta = \beta(r, L) > 0$ tale che si abbia

$$T(t) \geqslant \beta\|\dot{\xi}(t)\|^2 \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.23}$$

da cui segue che, tenuto conto della (2.22),

$$\|\dot{\xi}(t)\| \leqslant \sqrt{r\beta^{-1}} \qquad \text{in } [t_0, \infty). \tag{2.24}$$

La (2.20) risulta quindi soddisfatta ponendo $M = L + \sqrt{r\beta^{-1}}$.

Infine, se sono soddisfatte anche le condizioni **iv**, **vi** allora le costanti α ed r dipendono soltanto da u_0, e quindi da γ, che, se è soddisfatta la **v**, è indipendente da t_0. È facile, a questo punto, verificare che anche la costante M precedentemente definita è indipendente da t_0.

Se la condizione **ii**$''$ del Teorema 3 non risulta sodisfatta è possibile ottenere un criterio di limitatezza parziale sostituendo, nella condizione **iii**$'$, l'insieme $C_{\bar{r}}$ con $\boldsymbol{R}^n$.

Sussiste infatti il seguente corollario.

Corollario 3. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistano globalmente in futuro, che sia soddisfatta la condizione* **i**$''$ *del Teorema* 3 *e che inoltre sia soddisfatta la seguente condizione*

iii$''$ *fissato ad arbitrio* $r > 0$, *esiste una costante* $\beta = \beta(r) > 0$ *tale che si abbia*

$$T(q, \dot{q}) \geqslant \beta\|\dot{\xi}\|^2 \qquad in\ S_r^+ \times \boldsymbol{R}^n.$$

Allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono ξ-equilimitate, e la limitatezza è uniforme se sono soddisfatte anche le condizioni **iv**, **v** *del Teorema* 3.

Il seguente corollario del Teorema 3 generalizza il Teorema 4 di [3].

Corollario 4. *Si supponga che sia soddisfatta la condizione* **i**″ *del Teorema* 3, *e che inoltre siano soddisfatte le condizioni*

ii‴ *esiste una funzione* $\varphi \in K_*$ *tale che si abbia*

$$F(t, q) \geqslant \varphi(\|x\|) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n$$

iii‴ *esiste una funzione continua* b: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$ *tale che si abbia*

$$T(q, \dot{q}) \geqslant b(\|x\|)\|\dot{y}\|^2 \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n .$$

Allora tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono globalmente in futuro e sono $(x, \dot{y})$*-equilimitate. Se sono soddisfatte anche le condizioni* **iv**, **v** *del Teorema* 3, *la limitatezza è uniforme.*

Seguendo la dimostrazione del teorema citato (Teorema 4 di [3], dove $F = \pi$), si riconosce che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistono globalmente in futuro.

Assegnati ad arbitrio $t_0 \geqslant 0$ e $u_0 \geqslant 0$, sia $r = r(t_0, u_0)$ l'estremo superiore in $[t_0, \infty)$ della soluzione $u(t, t_0, u_0)$ (che per la condizione **i**″ del Teorema 3 è limitata). Per la condizione **ii**‴ del corollario si ha

$$F(t, q) \geqslant \frac{u(t, t_0, u_0)}{r} \varphi(\|x\|) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^n \tag{2.25}$$

e quindi è soddisfatta la condizione **ii**″ del Teorema 3 con $\alpha = \dfrac{1}{r}$.

Inoltre, la condizione **iii**′ del Teorema 3 è soddisfatta con $\xi = y$, essendo, per ipotesi, $b(s)$ una funzione continua e strettamente positiva.

Infine si osserva che se le soluzioni dell'equazione di confronto sono uniformemente limitate, la costante α è indipendente da t_0, e perciò la **vi** del Teorema 3 risulta soddisfatta.

Sussiste inoltre il seguente corollario del Teorema 3.

Corollario 5. *Se sono soddisfatte le condizioni* **i″**, **ii″** *del Teorema* 3 *con* $x = q$, *allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono* $(q, \dot{q})$*-equilimitate. Se sono soddisfatte anche le condizioni* **iv**, **v** *del Teorema* 3, *allora la limitatezza è uniforme.*

Esempio 2 (cfr. [1], cap. 6). Si consideri la seguente equazione differenziale, lineare, del secondo ordine

$$\ddot{x} + [2 + b(t) + c(t)]x = 0\,, \tag{2.26}$$

dove $b\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ e $c\colon \boldsymbol{R}^+ \to [-1, 1]$ sono due funzioni di classe C^1, con $\int^{\infty} |b(t)|\,dt < \infty$ e $\int^{\infty} |\dot{c}(t)|\,dt < \infty$.

La (2.26) è l'equazione di Lagrange di un sistema S con un solo grado di libertà, con energia cinetica $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$, e soggetto ad una sollecitazione che deriva da un potenziale generalizzato, con energia potenziale

$$\pi(t, x) = \frac{1}{2}[2 + b(t) + c(t)]x^2\,.$$

Scegliendo come funzione di Liapunov l'energia totale, non si ottengono risultati apprezzabili, mentre ponendo $F(t, x) = \frac{1}{2}[2 + c(t)]x^2$, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + F) \leqslant [\,|b(t)| + |\dot{c}(t)|\,](T + F) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R} \tag{2.27}$$

e quindi, in base alle ipotesi sulle funzioni $b(t)$ e $c(t)$, si riconosce che le soluzioni dell'equazione di confronto $\dot{u} = [\,|b(t)| + |\dot{c}(t)|\,]u$ sono *uniformemente limitate* ([4]).

Inoltre, essendo $|c(t)| \leqslant 1$, si ha $\frac{1}{2}x^2 \leqslant F(t, x) \leqslant \frac{3}{2}x^2$, per ogni $(t, x) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}$, per cui sono soddisfatte tutte le ipotesi del Corollario 5, e quindi *le soluzioni dell'equazione* (2.26) *sono uniformemente limitate sia rispetto a* x *sia rispetto a* $\dot{x}$.

Imponendo delle condizioni più restrittive alle soluzioni dell'equazione differenziale di confronto si ottiene il seguente teorema.

Teorema 4. *Si supponga che tutte le soluzioni delle equazioni di Lagrange esistano globalmente in futuro, che siano soddisfatte le prime tre condizioni del Teorema* 3, *e che inoltre, per ogni* $(t_0, u_0) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$ *esista una costante*

$\Omega = \Omega(t_0, u_0)$ *tale che si abbia*

$$\int_{t_0}^{\infty} \sqrt{u(t, t_0, u_0)}\, \mathrm{d}t \leq \Omega\,. \tag{2.28}$$

Allora le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono $(x, \xi, \dot{\xi})$*-equilimitate, cioè* $\forall \rho > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists N > 0$ *per cui risulta*

$$\|x(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| + \|\xi(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| + \|\dot{\xi}(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| < N \tag{2.29}$$

$\forall (q_0, \dot{q}_0)$ *tale che* $\|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leq \rho$ *e* $\forall t \geq t_0$.

Se inoltre la costante Ω *è indipendente da* t_0, *e se sono soddisfatte le ultime tre condizioni del Teorema* 3, *allora la limitatezza è uniforme.*

Per il precedente Teorema 3 *le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono* $(x, \dot{\xi})$*-equilimitate.*

Inoltre, seguendo la dimostrazione del Teorema 1, si riconosce che è

$$\|\dot{\xi}(t)\| \leq \sqrt{u(t)\beta^{-1}} \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.30}$$

dove $u(t) = u(t, t_0, u_0)$, con $u_0 > \gamma = \max\{T(q_0, \dot{q}_0) + F(t_0, q_0) \mid \|q_0\| + \|\dot{q}_0\| \leq \rho\}$, e β è una costante positiva la cui esistenza è assicurata dalla condizione **iii**$'$ del Teorema 3.

Poiché è $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi(t)\| \leq \|\dot{\xi}(t)\|$, integrando rispetto al tempo, e sfruttando la condizione (2.28), dalla (2.30) si ottiene

$$\|\xi(t)\| \leq \|\xi(t_0)\| + \Omega\beta^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{in } [t_0, \infty) \tag{2.31}$$

ed essendo $\|\xi(t_0)\| \leq \|q(t_0)\| \leq \rho$, si riconosce che è soddisfatta la (2.29) con $N = M + \rho + \Omega\beta^{-\frac{1}{2}}$.

Infine, se sono soddisfatte le rimanenti condizioni del Teorema 4, la costante N è indipendenbte da t_0, e quindi la limitatezza è uniforme.

Esempio 3. Sia S un sistema con due gradi di libertà, sia $q^T = (x, y)$ una coppia di coordinate lagrangiane indipendenti, e si abbia

$$\begin{aligned} &T(x, \dot{x}, \dot{y}) = a(x)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad && \pi(t, x) = e^{-t}\varphi(|x|) \\ &Q_x = -b(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{x} && Q_y = -c(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{y} \end{aligned} \tag{2.32}$$

dove a: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_0^+$ è una funzione continua, $\varphi \in K_*$, b: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}_0^+$ e c: $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}_0^+$ sono due funzioni continue, tali che si abbia

$$b(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \geqslant a(x) \leqslant c(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^4 . \tag{2.33}$$

Posto $F(t, x) = \pi(t, x)$, tenuto conto della (2.33), si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + \pi) \leqslant -(T + \pi) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^4 \tag{2.34}$$

e quindi, essendo $\dot{u} = -u$, si riconosce che le soluzioni $u(t, t_0, u_0) = u_0\, e^{-(t - t_0)}$ dell'equazione di confronto sono *uniformemente limitate*, e verificano inoltre la seguente condizione

$$\int_{t_0}^{\infty} \sqrt{u(t, t_0, u_0)}\, \mathrm{d}t = \sqrt{u_0}\, e^{\frac{t_0}{2}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{u_0} \tag{2.35}$$

per cui è soddisfatta la (2.28) con la costante $\Omega = 2\sqrt{u_0}$ che è indipendente da t_0.

Inoltre, assegnato $\widehat{r} > 0$, si indichi con A (> 0) il minimo della funzione continua $a(x)$ per $|x| \leqslant \widehat{r}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} F(t, x) &= u(t, t_0, u_0)\frac{e^{-t_0}}{u_0}\varphi(|x|) && \text{in } \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R} \\ T(x, \dot{x}, \dot{y}) &\geqslant A(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) && \text{in } C_{\widehat{r}} \times \boldsymbol{R}^2 . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Sono perciò soddisfatte la **ii**$''$ del Teorema 3, con $\alpha = e^{-t_0} u_0^{-1}$, e la **iii**$'$ dello stesso teorema, con $\beta = A$, $\xi^T = q^T = (x, y)$, e quindi *le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono equilimitate* (rispetto a tutte le variabili $x, y, \dot{x}, \dot{y}$).

Si osservi che la limitatezza *non è uniforme* perché la costante α dipende da t_0.

Bibliografia

[1] R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York 1953.

[2] G. CANTARELLI, *Nuovi criteri per l'esistenza globale in futuro dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **163** (1993), 247-264.

[3] G. CANTARELLI e C. RISITO, *Criteri di esistenza globale e di limitatezza per i sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **162** (1992), 383-394.

[4] R. CONTI, *Limitazioni in ampiezza delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1956), 344-349.

[5] R. CONTI, *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1956), 510-514

[6] A. S. OZIRANER, *On certain theorems of Liapunov's second method*, Prikl. Mat. Mekh. **36** (1972), 396-404; J. Appl. Math. Mech. **36** (1972), 373-381.

[7] C. RISITO, *Sull'esistenza globale e sulla limitatezza dei moti dei sistemi olonomi scleronomi*, Ann. Mat. Pura Appl. **132** (1992), 383-394.

Summary

By using the comparison method [5] *and the Liapunov function introduced in the previous paper* [2], *sufficient conditions for the partial boundedness of the motions of holonomic scleronomic systems with potential energy not (necessarily) bounded from below, are obtained, generalizing some results of* [7], [3].

* * *