Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 271-281

G. BONANZINGA e G. RESTUCCIA (*)

Sistemi di derivazioni e gruppi formali (**)

Introduzione

Sia A una k-algebra commutativa, essendo k un campo fissato, e sia $\mathrm{Der}_k(A)$ l'algebra di Lie di tutte le k-derivazioni di A in sè. Dato un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ di dimensione n su k, dove per gruppo formale di dimensione n si indica un insieme di n serie formali

$$\boldsymbol{F} = (F_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \ldots, F_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) \qquad \boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) \qquad \boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$F_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in k[\![\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]\!] = k[\![X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]\!]$$

è noto che è possibile definire l'azione su A dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F})$ di tutte le k-derivazioni di A in sè che risultino $\boldsymbol{F}$-invarianti [4], [7], [8], [9].

Si può inoltre definire l'azione di un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ di dimensione n sulla k-algebra A.

Ora in [8] si è provato che se $\boldsymbol{F}$ è un gruppo formale di dimensione 1 su k e la k-algebra A è locale su un campo k separabilmente chiuso di caratteristica $p > 0$ e tale che ammetta una p-base su k, allora ogni azione dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F})$ su A è $\boldsymbol{F}$-integrabile, nel senso che tale azione può essere sollevata ad un'azione del gruppo formale $\boldsymbol{F}$ su A.

Senza alcuna ipotesi su k, il risultato vale solo se $\boldsymbol{F}$ è isomorfo al gruppo additivo $\boldsymbol{F}_a$ o al gruppo moltiplicativo $\boldsymbol{F}_m$.

Nel nostro lavoro noi esaminiamo la nozione di sistema di derivazioni nel senso di [2], [6], che deriva in maniera naturale dalla definizione dell'azione dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F})$ associata ad un gruppo formale di dimensione n.

(*) Dip. di Matem., Univ. Messina, Contrada Papardo, salita Sperone 31, 98166 Sant'Agata ME, Italia.

(**) Ricevuto il 29.10.1993. Classificazione AMS 16 L 01.

In [6] è stata studiata, sotto qualche condizione, l'integrabilità forte di un sistema di derivazioni di A su R di caratteristica $p > 0$. Tale integrabilità forte equivale, nel linguaggio dei gruppi formali, alla $\boldsymbol{F}_a$-integrabilità di un'azione dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F}_a)$ associata al gruppo formale $\boldsymbol{F}_a$ su A, essendo $\boldsymbol{F}_a$ il gruppo additivo n-dimensionale.

Precisamente nel n. 1 studiamo l'algebra di Lie ristretta associata ad un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ di dimensione n, determinandone la base. Inoltre si determinano le costanti individuate dall'espressione mediante i vettori della base della p-esima potenza di ogni vettore della base di $L(\boldsymbol{F})$, nel caso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$ oppure $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$.

Nel n. 2 definiamo l'azione di un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ sulla k-algebra A, e, nel caso in cui A sia separabile su k ed ammetta una p-base su k, si prova che ogni azione di $\boldsymbol{F}_a$ su A oppure di $\boldsymbol{F}_m$ su A è $\boldsymbol{F}$-integrabile.

1 - Algebra di Lie ristretta

Tutti gli anelli sono assunti commutativi, con identità. Denoteremo sempre con k un campo di caratteristica positiva $p > 0$.

Sia A una k-algebra commutativa e sia $d\colon A \to A$ una k-derivazione di A in A. Sia $\mathrm{Der}_k(A)$ *l'algebra di Lie ristretta* delle derivazioni di A in sé su k, con $[d, d'] = d \circ d' - d' \circ d$, $\forall d, d' \in \mathrm{Der}_k(A)$ e $d^p \in \mathrm{Der}_k(A)$.

Definizione 1. Sia A una k-algebra commutativa. Un insieme finito $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ di derivazioni di A su k ($d_i \in \mathrm{Der}_k(A)$) sarà chiamato *sistema di derivazioni* se

$$[d_i, d_j] \in A\,d_1 + A\,d_2 + \dots + A\,d_n$$
$$d_i^p \in A\,d_1 + A\,d_2 + \dots + A\,d_n$$

con $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Diremo che il sistema di derivazioni $\mathcal{D}$ è un *sistema di derivazioni indipendenti* se $d_1, d_2, \dots, d_n$ sono linearmente indipendenti su A. Ovviamente, se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ tali che $\det(d_i(x_j)) \in U(A)$, allora $d_1, d_2, \dots, d_n$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 2 ([5]). Dicesi *gruppo formale di dimensione* n su k una n-upla $(F_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \dots, F_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ di serie di potenze $F_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in k[\![\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]\!]$ in $2n$ indeterminate $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, tali che

i. $$F_i(\boldsymbol{X}, 0) = X_i \qquad F_i(0, \boldsymbol{Y}) = Y_i$$

ii. $$F_i(F_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \boldsymbol{Z}) = F_i(\boldsymbol{X}, F_i(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}))$$

iii. $$F_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = F_i(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}).$$

Talvolta un gruppo formale di dimensione n è indicato semplicemente con $\boldsymbol{F}(X, Y)$.

Osservazione 1. La definizione è libera da caratteristica.

Esempio 1. Gruppo formale additivo di dimensione n.

$$\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)$$

dove $F_i = X_i + Y_i \in k[\![X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n]\!]$.

Esempio 2. Gruppo formale moltiplicativo di dimensione n.

$$\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = (X_1 + Y_1 + X_1 Y_1, \dots, X_n + Y_n + X_n Y_n)$$

dove $F_i = X_i + Y_i + X_i Y_i \in k[\![X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n]\!]$.

Sia $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$. Denoteremo con $\boldsymbol{Y}^\alpha$ il prodotto $Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \dots Y_n^{\alpha_n}$, essendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n$.

Definizione 3. Sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un gruppo formale di dimensione n su k. Sia $g(\boldsymbol{X}) \in k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ e siano $d_{j\alpha}: k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!]$, $\alpha \in N^n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, le applicazioni definite da

$$g(F_j(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) = \sum_{\alpha \geqslant 0} d_{j\alpha}(g(\boldsymbol{X}))\boldsymbol{Y}^\alpha = \sum_{\alpha \geqslant 0} h_{j\alpha}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^\alpha .$$

Diremo che una funzione $t: k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ è *$\boldsymbol{F}$-invariante* se risulta

$$t \circ d_{j\alpha} = d_{j\alpha} \circ t, \qquad \forall \alpha \in N^n, \forall j, 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Proposizione 1. *Sia* $\mathrm{Der}_k(k[\![\boldsymbol{X}]\!])$ *l'algebra di Lie ristretta delle k-derivazioni di $k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ e sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un gruppo formale di dimensione n su k. L'insieme delle k-derivazioni $d \in$* $\mathrm{Der}_k(k[\![\boldsymbol{X}]\!])$ *che risultano $\boldsymbol{F}$-invarianti, è un'algebra di Lie ristretta, di dimensione n, sottoalgebra di* $\mathrm{Der}_k(k[\![\boldsymbol{X}]\!])$. *Questa verrà denotata con $L(\boldsymbol{F})$.*

Dimostrazione. Se $a, b \in k$ e $t, t': k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ sono funzioni $\boldsymbol{F}$-invarianti, allora $at + bt'$ e $t \circ t'$ sono ancora $\boldsymbol{F}$-invarianti. Ne segue che se $d, d' \in \mathrm{Der}_k(k[\![\boldsymbol{X}]\!])$ sono $\boldsymbol{F}$-invarianti, anche $[d, d']$ è $\boldsymbol{F}$-invariante e d^p è $\boldsymbol{F}$-invariante.

Noi identificheremo $L(\boldsymbol{F})$ con il k-spazio vettoriale avente come base i vettori $\boldsymbol{d}_1^F(d_1, 0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{d}_2^F = (0, d_2, 0, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{d}_n^F = (0, 0, \dots, 0, d_n)$; essendo d_i la k-derivazione definita sulla p-base $X_1, X_2, \dots, X_n$ di $k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ su $k^p[\![\boldsymbol{X}^p]\!]$ come segue

$$d_i(X_j) = \frac{\partial F_i(\boldsymbol{X}, 0)}{\partial Y_j} \qquad \text{con} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \forall d \in L(\boldsymbol{F}).$$

Per ogni i risulta inoltre: $d_i^p = c_{i1}^F d_1 + c_{i2}^F d_2 + \dots + c_{in}^F d_n$ dove c_{ij}^F sono costanti univocamente definite e $d_1, \dots, d_n$ è la base di $L(\boldsymbol{F})$. Risulta infatti $d = \lambda_1 \boldsymbol{d}_1^F + \dots + \lambda_n \boldsymbol{d}_n^F = (\lambda_1 d_1, \dots, \lambda_n d_n) = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n$.

Poiché $L(\boldsymbol{F})$ è un'algebra di Lie ristretta, $\forall d \in L(\boldsymbol{F})$, $d^p \in L(\boldsymbol{F})$, onde l'asserto.

Teorema 1. *Sia $\boldsymbol{F}$ un gruppo formale di dimensione n su k, $L(\boldsymbol{F})$ l'algebra di Lie ristretta associata ad $\boldsymbol{F}$ con base le k-derivazioni $\boldsymbol{d}_1^F, \boldsymbol{d}_2^F, \dots, \boldsymbol{d}_n^F$. Siano*

$$d_{j\alpha}\colon k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!] \qquad \alpha \in N^n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

le applicazioni definite da $g(F_j(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) = \sum_{\alpha \geqslant 0} d_{j\alpha}(g(\boldsymbol{X}))\boldsymbol{Y}^\alpha$, essendo $g(\boldsymbol{X}) \in k[\![\boldsymbol{X}]\!]$.

Allora risulta

$$\boldsymbol{d}_j^F = d_{j(\delta_j^1, \dots, \delta_j^n)} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

e le funzioni $d_{j(\delta_j^1, \dots, \delta_j^n)}\colon k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ sono derivazioni.

Pertanto, posto $1_j = (\delta_j^1, \dots, \delta_j^n)$, $\mathcal{D} = \{d_{j1_j}\}$ forma un sistema di derivazioni indipendenti.

Dimostrazione. Sugli elementi della p-base $X_1, \dots, X_n$ di $k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ su $k^p[\![\boldsymbol{X}^p]\!]$ risulta

$$\boldsymbol{d}_j^F(X_j) = d_j(X_j) = \frac{\partial F_j(\boldsymbol{X}, 0)}{\partial Y_j}.$$

Posto $g(\boldsymbol{X}) = X_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, segue $d_{j(0,0,\dots,0)}(X_j) = X_j$, da cui $d_{j(0,0,\dots,0)} = \mathrm{id}_{k[\![\boldsymbol{X}]\!]}$, mentre $d_{j(\delta_j^1, \dots, \delta_j^n)}(X_j) = d_j^F(X_j)$. Segue l'asserto.

Proposizione 2. *Siano $\boldsymbol{F}_a$ il gruppo formale additivo di dimensione n ed* $\mathbf{F}_m$ *il gruppo formale moltiplicativo di dimensione n.* (Esempi 1 e 2). *Allora, se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$, si ha $c_{ij}^F = 0$, mentre, se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$ si ha $c_{ij}^F = \delta_{ij}$ $\forall i, j$ $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Dimostrazione. Poiché $X_1, \ldots, X_n$ è una p-base di $k[\![X]\!]$ su $k^p[\![X^p]\!]$, è sufficiente definire la derivata d_i^p sulla p-base.

Supponiamo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$. Risulta

$$d_i^p(X_j) = c_{ir}^F d_r(X_j) = c_{ir}^F \frac{\partial F_r(\boldsymbol{X}, 0)}{\partial Y_j} = c_{ir}^F \cdot \delta_j^r = c_{ij}^F .$$

D'altra parte $d_i^p(X_j) = d_i^{p-1} \circ d_i(X_j) = d_i^{p-1}(\delta_{ij}) = 0$. Ne segue $c_{ij}^F = 0$, $\forall i, j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$ risulta

$$d_i^p(X_j) = c_{ir}^F d_r(X_j) = c_{ir}^F \frac{\partial F_r(\boldsymbol{X}, 0)}{\partial Y_j} = c_{ir}^F \delta_j^r (1 + X_j) = c_{ij}^F (1 + X_j).$$

D'altra parte

$$d_i^p(X_j) = d_i^{p-1} \circ d_i(X_j) = d_i^{p-1}((1 + X_j)\delta_{ij})$$

$$= d_i^{p-2} \circ d_i((1 + X_j)\delta_{ij}) = d_i^{p-2}((1 + X_j)\delta_{ij}) = \ldots = (1 + X_j)\delta_{ij}.$$

Ne segue che $\forall i, j$ $c_{ij}^F = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Osservazione 2. Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$ risulta $d_1^p = 0, \ldots, d_n^p = 0$. Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$, risulta $d_1^p = d_1, \ldots, d_n^p = d_n$.

2 - Azione di un gruppo formale

Se A una k-algebra, essendo k un campo di caratteristica qualunque e sia $\mathrm{Der}_k(A)$ l'algebra di Lie di tutte le derivazioni di A in sè che si annullano su k. Dato un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ di dimensione n su k, sia inoltre $L(\boldsymbol{F})$ l'algebra di Lie di tutte le derivazioni di A in sè che risultino $\boldsymbol{F}$-invarianti.

Definizione 4. Si definisce *azione di $L(\boldsymbol{F})$ su A* un morfismo di algebre di Lie $\varphi\colon L(\boldsymbol{F}) \to \mathrm{Der}_k(A)$. Se $\mathrm{char}\, k = p$, allora deve verificarsi ulteriormente che $\varphi(d^p) = \varphi(d)^p$.

Definizione 5. Sia $\boldsymbol{F}$ un gruppo formale di dimensione n ed A una k-algebra. Si definisce *azione del gruppo formale* $\boldsymbol{F}$ su A un morfismo di k-algebre $\boldsymbol{D}\colon A \to A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ tale che $\boldsymbol{D}(a) \equiv a \mod (X_1, \ldots, X_n)$ $\forall a \in A$ ed inoltre il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "D"] & A[\![X_1, \dots, X_n]\!] = A[\![X]\!] \arrow[d, "F_A"] \\ A[\![X]\!] \arrow[r, "D_Y"] & A[\![X, Y]\!] \end{tikzcd}$$

sia commutativo, cioè $F_A \circ D = D_Y \circ D$, dove i morfismi di k-algebre sono dati da:

$$F_A(g(X)) = g(F(X, Y)) \qquad D_Y(\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha) = \sum_\alpha D(a_\alpha) Y^\alpha$$

Una definizione equivalente è

Definizione 5'. *Azione del gruppo formale* F su A è un morfismo di k-algebre $D: A \to A[\![X_1, \dots, X_n]\!] = A[\![X]\!]$ tale che, se $D(a) = \sum_\alpha D_\alpha(a) X^\alpha$, $a \in A$, allora $D_0 = \mathrm{id}_A$ e $\forall \alpha, \beta \in N^n$, $1 \leq s, t \leq n$ si ha

$$\sum_s D_{\mathrm{st}}(a) F_t(X, Y)^s = \sum_{\alpha, \beta} D_{t\alpha} \circ D_{\beta t}(A) X^\alpha Y^\beta .$$

Definizione 6. Sia k un anello ed A una k-algebra. Una *differenziazione n-dimensionale* di A è un omomorfismo E da A in $A[\![X_1, X_2, \dots, X_n]\!] = A[\![X]\!]$ tale che $E(a) \equiv a \mod (X_1, X_2, \dots, X_n)$ e precisamente

$$E(a) = \sum_\alpha D_\alpha(a) X^\alpha$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$.

$$D_0 = \mathrm{id}_A \qquad D_\gamma(a \cdot b) = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} D_\alpha(a) \cdot D_\beta(b), \qquad \forall a, b \in A \text{ e } \forall \alpha, \beta, \gamma \in N^n.$$

Una definizione equivalente è

Definizione 6'. Sia k un anello ed A una k-algebra. Una *differenziazione* D *di dimensione n* di A è un insieme di applicazioni lineari $\{D_\alpha: A \to A;\ \alpha \in N^n\}$ tali che

$$D_0 = \mathrm{id}_A \qquad D_\gamma(A \cdot b) = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} D_\alpha(a) \cdot D_\beta(b) \quad \forall a, b \in A \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in N^n.$$

Osservazione 3. $D_{(1, 0, \dots, 0)} = D_1, \dots, D_{(0, \dots, 0, 1)} = D_n$ sono derivazioni di A su k (cfr. [2]).

Definizione 7. Un sistema $\mathscr{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ di derivazioni si dice *integrabile* se esiste una differenziazione di dimensione n, $E: A \to A[\![X]\!]$ con $E(a) = \sum_{\alpha} D_\alpha(a) X^\alpha$, tale che $D_0 = \mathrm{id}_A$, $D_1 = d_1, \ldots, D_n = d_n$.

Definizione 8. Una differenziazione n-dimensionale $D = \{D_\alpha : A \to A; \alpha \in N^n\}$ si dice *iterativa* se

$$D_\alpha \circ D_\beta = \binom{\alpha + \beta}{\alpha} D_{\alpha+\beta} \qquad \forall \alpha, \beta \in N^n.$$

Definizione 9. Un *sistema di derivazioni* $\mathscr{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ si dice *fortemente integrabile* se esiste una differenziazione iterativa di dimensione n tale che $D_1 = d_1, \ldots, D_n = d_n$.

Sia $\boldsymbol{D}: A \to A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ un'azione di un gruppo formale $\boldsymbol{F}$ su A e sia $t: k[\![\boldsymbol{X}]\!] \to k[\![\boldsymbol{X}]\!]$ una mappa k-lineare. Allora si definisce la mappa k-lineare $\varphi_{\boldsymbol{D}}(t): A \to A$ mediante la relazione

$$\varphi_{\boldsymbol{D}}(t)(a) = \sum D_\alpha(a)\, t(\boldsymbol{X}^\alpha)_{X=0} \qquad \forall a \in A.$$

Proposizione 3. *Sia $\boldsymbol{D}$ un'azione di $\boldsymbol{F}$ su A. Allora $\varphi_{\boldsymbol{D}}: L(\boldsymbol{F}) \to \mathrm{Der}_k(A)$ è un'azione di $L(\boldsymbol{F})$ sulla k-algebra A.*

Dimostrazione. Si prova che, se $d \in L(\boldsymbol{F})$, allora $\varphi_{\boldsymbol{D}}(d)$ è una k-derivazione di A. Inoltre $\varphi_{\boldsymbol{D}}(d \circ d') = \varphi_{\boldsymbol{D}}(d) \circ \varphi_{\boldsymbol{D}}(d')$, $\forall d, d' \in L(\boldsymbol{F})$. Segue l'asserto.

Proposizione 4. *Sia $\boldsymbol{D}$ un'azione di $\boldsymbol{F}$ su A e sia* $\mathrm{char}\, \kappa = p > 0$. *Allora, $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, si ha $D_i^p = \sum_{i=1}^{n} c_i^F D_i$.*

Dimostrazione. Si ottiene $\varphi_{\boldsymbol{D}}(d_i^F) = D_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, da cui l'asserto.

Definizione 10. Un'azione φ dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F})$ sulla k-algebra A è detta *$\boldsymbol{F}$-integrabile* se esiste un'azione $\boldsymbol{D}$ del gruppo formale $\boldsymbol{F}$ su A tale che $\varphi_{\boldsymbol{D}} = \varphi$.

Osservazione 4. Se $\mathrm{char}\, k = 0$, ogni azione φ di $L(\boldsymbol{F}) \to \mathrm{Der}_k(A)$ è sempre $\boldsymbol{F}$-integrabile. Più precisamente, se $d_1, \ldots, d_n$ è una base di $L(\boldsymbol{F})$ su k, determinata da $d_i(X_j) = \dfrac{\partial F_i(\boldsymbol{X}, 0)}{\partial Y_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, e $D_i = \varphi(d_i)$, allora $\boldsymbol{D}: A \to A[\![X]\!]$ con $\boldsymbol{D}(a) = \sum_{\alpha} \dfrac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1}, \ldots, D_n^{\alpha_n}(a) X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, è l'unica azione di $\boldsymbol{F}$ su A tale che $\varphi_{\boldsymbol{D}} = \varphi$.

Proposizione 5.

a. *Sia $\boldsymbol{D}'$ un'azione del gruppo formale $\boldsymbol{F}_a$ di dimensione n sulla k-algebra A. Sia $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ il sistema di derivazioni indipendenti, base dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F}_a)$. Supponiamo che esista una differenziazione n-dimensionale iterativa $\boldsymbol{D}$ tale che $D_1 = d_1, \ldots, D_n = d_n$. Allora $\boldsymbol{D}'$ è $\boldsymbol{F}_a$-integrabile.*

b. *Sia $\boldsymbol{D}''$ un'azione del gruppo formale $\boldsymbol{F}_m$ su A.* Sia $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ *il sistema di derivazione indipendenti, base dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F}_m)$. Supponiamo che esista una differenziazione n-dimensionale di A su k $\boldsymbol{D} = \{D_\alpha : A \to A;\ \alpha \in N^n\}$ tale che $D_{(1,0,\ldots,0)} = d_1, \ldots, D_{(0,\ldots,0,1)} = d_n$ ed inoltre $D_\alpha \circ D_\beta = \sum \binom{\gamma}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha+\beta-\gamma} D_\gamma$. Allora $\boldsymbol{D}''$* è *$\boldsymbol{F}_m$-integrabile.*

La dimostrazione discende immediatamente dalla proprietà

$$\sum_{\alpha,\beta} D_\alpha \circ D_\beta(a) X^\alpha Y^\beta = \sum_s D_s(a) F(X, Y)^s$$

ponendo successivamente $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$ ed $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$ (Esempi 1 e 2).

Corollario 1. *Sia $\boldsymbol{D}$ un'azione del gruppo formale $\boldsymbol{F}_a$. Sia $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ il sistema di derivazioni indipendenti, base dell'algebra di Lie $L(\boldsymbol{F}_a)$. Allora se $\mathcal{D}$ è fortemente integrabile, $\boldsymbol{D}$ è $\boldsymbol{F}_a$-integrabile.*

La dimostrazione discende dalla Definizione 9 e dalla Proposizione 5.

Se char $k = p > 0$, un'azione di $L(\boldsymbol{F})$ su $\mathrm{Der}_k(A)$ non è sempre $\boldsymbol{F}$-integrabile. Risultati positivi, quando $\dim(L(\boldsymbol{F})) = 1$, si trovano in [7]. Qui noi affrontiamo il caso di $\dim(L(\boldsymbol{F})) = n$, con $n > 1$ ottenendo il

Teorema 2. *Sia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$ (gruppo formale additivo di dimensione n su k) ovvero $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$ (gruppo formale moltiplicativo di dimensione n su k), essendo k un campo di caratteristica positiva p. Siano (A, m) una k-algebra locale e $\varphi: L(\boldsymbol{F}) \to \mathrm{Der}_k(A)$ un'azione di $L(\boldsymbol{F})$ su k.*

Posto $\varphi_D(d_i^F) = D_i \in \mathrm{Der}_k(A)$, $1 \leq i \leq n$, sia $A^0 = \{a \in A \mid D_1(a) = \ldots = D_n(a) = 0\}$ il sottoanello di A delle costanti rispetto alle derivazioni $D_1, \ldots, D_n$.

Supponiamo che:

1. *A sia separabile su k*
2. *esistano $x_1, \ldots, x_n \in A$ tali che* $\det(\varphi_D(d_i^F)(x_j)) \notin m$
3. *A^0 ammetta una p-base finita su k contenente $x_1^p, \ldots, x_n^p$.*

Allora φ è $\boldsymbol{F}$-integrabile.

Dimostrazione. Caso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$. Si ha $D_i^p = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Rimpiazzando $D_1, D_2, \ldots, D_n$ con opportune combinazioni lineari, si può assumere che $\det(D_i(x_j)) = \delta_{ij}$, ([6], theorem 5). Ne segue che $x_1, \ldots, x_n$ è una p-base di A su A^0 ([3], theorem 1).

Caso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$. Si ha $D_i^p = D_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Per induzione su n, si può supporre che $D_i(x_j) = (1 + x_j)\delta_{ij}$.

Per $n = 1$, l'asserto segue da [7] (corollary 3.6) ed inoltre x_1 è una p-base di A su $A_1 = \{a \in A \mid D_1(a) = 0\}$ ([7], corollary 3.6). Con un procedimento di induzione analogo a quello contenuto in [3] (theorem 1) si può allora provare che $x_1, \ldots, x_n$ è una p-base di A su A^0.

Sia Γ_0 la p-base finita di A^0 su k contenente $x_1^p, \ldots, x_n^p$. Poniamo

$$\Gamma = \{\Gamma_0 - \{x_1^p, \ldots, x_n^p\}\}$$

Allora, considerato l'ideale

$$I = (X_1^p - x_1^p, X_2^p - x_2^p, \ldots, X_n^p - x_n^p)A^0[X_1, \ldots, X_n],$$

si ha: $A = A^0[X_1, \ldots, X_n]/I$.

La successione esatta

$$I/I^2 \to \Omega_k(A^0[\boldsymbol{X}]) \otimes A \simeq (\Omega_k(A^0) \otimes A) \oplus AdX_1 \otimes \ldots \otimes AdX_n \to \Omega_k(A) \to 0$$

mostra allora che

$$\Omega_k(A) \simeq (\Omega_k(A^0) \otimes A/Adx_1^p + \ldots + Adx_n^p) \oplus Adx_1 \oplus \ldots \oplus Adx_n$$

è libero finito di base $\{d\Gamma, dx_1, \ldots, dx_n\}$. Poichè A è finito su $k[A^p]$, si deduce allora che $B = \{\Gamma, x_1, \ldots, x_n\}$ è una p-base di A su k ([5], proposition 38.G). Inoltre su questa p-base, per i risultati provati prima, si ha

$$D_i(x_j) = \frac{\partial F_i(\boldsymbol{x}, 0)}{\partial y_j} \qquad D_i(y) = 0 \ \ \forall y \in \Gamma.$$

Si consideri la funzione $s\colon B \to A[\![\boldsymbol{X}]\!]$ definita da:

$$s(x_i) = F_i(x_i, X_i) = x_i + X_i \ \text{ se } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$$

$$s(x_i) = F_i(x_i, X_i) = x_i + X_i + x_iX_i \ \text{ se } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m$$

$$s(y) = y, \ \text{ se } y \in \Gamma.$$

Grazie al lemma 3.1 di [7] la funzione s si estende (univocamente) ad un morfismo di k-algebre $\boldsymbol{D}: A \to A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ con $D_0 = \mathrm{id}_A$. Proviamo che $\boldsymbol{D}$ è un'azione del gruppo formale $\boldsymbol{F}_a$ (o $\boldsymbol{F}_m$) sulla k-algebra A tale che $\varphi_D = \varphi$.

Occorre verificare che $\boldsymbol{F}_A \circ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_Y \circ \boldsymbol{D}$, dove

$$\boldsymbol{F}_A: A[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \to A[\![X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]\!]$$

$$\boldsymbol{D}_Y: A[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \to A[\![X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n]\!]$$

sono morfismi di k-algebre dati da

$$\boldsymbol{F}_A(g(X_1, \ldots, X_n)) = g(F_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \ldots, F_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) \qquad \boldsymbol{D}_Y(\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha) = \sum_\alpha \boldsymbol{D}(a_\alpha) Y^\alpha .$$

Poichè B è una p-base di A su k, è sufficiente verificare l'uguaglianza solo sugli elementi della p-base. Se $y \in \Gamma$, allora entrambi i membri sono uguali ad y. Infatti $\boldsymbol{F}_A \circ \boldsymbol{D}(y) = \boldsymbol{F}_A(y) = y$ e $\boldsymbol{D}_Y \circ \boldsymbol{D}(y) = \boldsymbol{D}_Y(y) = y$.

Invece su ogni elemento $x_i \in B$, con $1 \leqslant i \leqslant n$, se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a$ otteniamo:

$$\boldsymbol{F}_A \circ \boldsymbol{D}(x_i) = \boldsymbol{F}_A(x_i + X_i) = x_i + X_i + Y_i$$

$$\boldsymbol{D}_Y \circ \boldsymbol{D}(x_i) = \boldsymbol{D}_Y(x_i + X_i) = \boldsymbol{D}(x_i) + \boldsymbol{D}(1) Y_i = x_i + X_i + Y_i .$$

In modo analogo si procede se $F = F_m$:

$$D_Y \circ D(x_i) = D_Y(x_i + X_i + x_i X_i) = D(x_i) + D(1) Y_i + D(x_i) Y_i$$

$$= x_i + X_i + x_i X_i + Y_i + (x_i + X_i + x_i X_i) Y_i = x_i + X_i + x_i X_i + Y_i + x_i Y_i + X_i Y_i + x_i X_i Y_i$$

$$\boldsymbol{F}_A \circ \boldsymbol{D}(x_i) = \boldsymbol{F}_A(x_i + X_i + x_i X_i) = x_i + (X_i + Y_i + X_i Y_i) + x_i (X_i + Y_i X_i Y_i)$$

$$= x_i + X_i + Y_i + X_i Y_i + x_i X_i + x_i Y_i + x_i X_i Y_i .$$

Il risultato è così provato.

Bibliografia

[1] V. Bonanzinga, *Integrable derivations in rings of characteristic* $p > 0$, Atti Accad. Peloritana Pericolanti, 70 (1992), 101-116.

[2] V. Bonanzinga, *Systems of integrable derivations*, Matematiche (Catania) 49 (1994).

[3] M. Crupi, *Subring of constants of a ring of characteristic* $p > 0$, Matematiche (Catania) 48 (1993), 203-212.

[4] A. FRÖHLIC, *Formal Groups*, Lectures Notes in Math. 7, Springer, Berlin 1968.

[5] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York 1980.

[6] H. MATSUMURA and G. RESTUCCIA, *Integrable derivations II*, Atti Accad. Peloritana Pericolanti **70** (1992), 153-172.

[7] A. TYC, *On F-integrable actions of the restricted Lie algebras of a formal group F in characteristic* $p > 0$. Nagoya Math. J. **115** (1989), 125-137.

[8] A. TYC, *Invariants of linearly reductive formal group actions*, J. Algebra, **101** (1986), 166-187.

[9] A. TYC and G. RESTUCCIA, *Regularity of the ring of invariants under certain actions of finite abelian Hopf algebras in characteristic p*, J. Algebra **159** (1993), 347-357.

Summary

Let F be an n-dimensional formal group over a field k of characteristic $p > 0$. If A is a local k-algebra and F is the n-dimensional additive formal group F_a over k or the n-dimensional multiplicative formal group F_m over k, then any action of the Lie algebra of the F-invariant derivations of A results to be F-integrable, when some convenient conditions involving A and its derivations are satisfied.

* * *