Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 211-227

FIORENZA MORINI (*)

Sugli anelli Φ_s-semplici (**)

Introduzione

Il problema di caratterizzare gli anelli aventi il semigruppo delle traslazioni sinistre o destre soddisfacente a particolari condizioni non pare sia stato considerato in letteratura.

Scopo di questo lavoro è quello di iniziare una ricerca sistematica in tal senso: precisamente ci occuperemo qui degli anelli il cui semigruppo $\Phi_s (\Phi_d)$ delle traslazioni sinistre (destre) sia 0-semplice che diremo brevemente Φ_s-semplici (risp. Φ_d-semplici); diremo Φ-semplici gli anelli che sono contemporaneamente Φ_s e Φ_d-semplici.

Curiosamente, salvo al più nel caso nilpotente, si prova che se il semigruppo Φ_s è semplice allora anche il semigruppo Φ_d deve essere semplice.

Si sono completamente caratterizzati gli anelli nilpotenti Φ_s-semplici, anzi il Teorema 2 fornisce una tecnica per costruire tutti e soli tali anelli partendo da un gruppo abeliano G e da un semigruppo ciclico di endomorfismi di G soddisfacente a particolari condizioni.

Nel caso non nilpotente si prova che un anello R Φ_s-semplice è somma di un anello A Φ_s-semplice con $A^2 = A$ e dell'annullatore $A(R)$ di R. Inoltre un anello R è Φ_s-semplice con $R = R^2$, se e solo se l'annullatore di R è un ideale massimale che contiene tutti gli ideali propri di R.

Infine si è mostrato che tali anelli rientrano nella classe degli anelli ad ideali

(*) Dip. di Automazione Industriale, Facoltà di Ingegneria, Univ. Brescia, Via Valotti 9, 25133 Brescia, Italia.

(**) Ricevuto il 13.9.93. Classificazione AMS 16 S 99. Lavoro eseguito con parziale contributo MURST.

massimali (cfr. [4]) ed in quella ad ideali annullatori studiati da vari autori e generalizzati ai quasi-anelli in [1].

1 - Definizioni e risultati preliminari

Per le notazioni e le nozioni elementari facciamo riferimento a [2] spesso senza esplicito richiamo. Tuttavia indicheremo con $\Phi_s = \{\varphi_a\colon x \to ax \mid a \in R\}$ e $\Phi_d = \{\psi_a\colon x \to xa \mid a \in R\}$ rispettivamente gli insiemi delle traslazioni sinistre e destre di un anello R.

Ricordato che un semigruppo si dice 0-*semplice* se è con zero e privo di ideali, nel presente lavoro ci occuperemo degli anelli soddisfacenti alla seguente

Definizione A. Chiamiamo Φ_s-*semplici* (Φ_d-*semplici*) gli anelli R tali che il semigruppo $[\Phi_s, \circ]$, ($[\Phi_d, \circ]$) rispetto alla composizione è 0-semplice; Φ-*semplici* quando sono 0-semplici i semigruppi delle traslazioni sinistre e destre.

Poiché gli zero-anelli sono ovviamente Φ-semplici, nel seguito R *indicherà sempre un anello non zero-anello.*

Indicato con $A_s(R)$, $A_d(R)$ e $A(R)$ gli annullatori rispettivamente sinistro, destro e bilatero di R, iniziamo con la

Osservazione 1. Se R è un anello allora il semigruppo $[\Phi_s, \circ]$ risulta isomorfo al semigruppo moltiplicativo di $R/A_s(R)$.

Infatti la corrispondenza $\alpha\colon R \to \Phi_s$, $a \mapsto \varphi_a$, risulta un epimorfismo di semigruppi e $\operatorname{Ker}\alpha$ è una congruenza del semiguppo moltiplicativo di R e si osserva che $x(\operatorname{Ker}\alpha)y$ se e solo se $x - y \in A_s(R)$ e questo implica che $[\Phi_s, \circ]$ è isomorfo ad $[R/A_s(R), \bullet]$.

Osservazione 2. Se R è Φ_s-semplice, allora $R^3 = 0$ e $|R/A_s(R)| = 2$ oppure $R = R^2 + A_s(R)$.

Posto infatti $Q = [R/A_S(R), \bullet]$ si ha che Q^2 è un ideale di Q e pertanto essendo R Φ_s-semplice, Q è semplice per l'Osservazione 1, ne segue che $Q^2 = 0$ oppure $Q^2 = Q$.

Nel primo caso risulta $R^2 \subseteq A_s(R)$ e dunque $R^3 = 0$ ed inoltre, poiché Q è uno zero-semigruppo, un qualunque sottoinsieme di Q di due elementi, di cui uno uguale a zero, è un suo ideale. Poiché Q è semplice si ha $|Q| = 2$.

Altrimenti per ogni x di R esistono $y, z \in R$ tali che $x + A_s(R) = yz + A_s(R)$. Ne segue il secondo caso.

Osservazione 3. Se R è Φ_s-semplice allora $A_s(R) = 0$ implica $A_d(R) = 0$.

Infatti se $A_s(R) = 0$ allora R, risultando isomorfo ad $R/A_s(R)$, è semplice come semigruppo e dunque $A_d(R) = 0$.

Osserviamo che se si considerano anelli Φ_d-semplici si ottengono risultati analoghi ai precedenti.

2 - Anelli Φ_s-semplici nilpotenti

Gli anelli Φ-semplici nilpotenti sono caratterizzati dal

Teorema 1. *L'anello R è Φ-semplice con $R^3 = 0$, se e solo se sussiste uno (ed uno solo) dei seguenti fatti:*

1. *$R/A(R)$ è uno zero-anello di ordine 4 il cui gruppo additivo è il gruppo trirettangolo*

2. *$R/A(R)$ è uno zero-anello di ordine 2.*

Infatti per le Osservazioni 1 e 2 $R/A_s(R)$ e $R/A_d(R)$ sono zero-anelli di ordine 2. Se $A_d(R) \neq A_s(R)$ allora $R = A_d(R) + A_s(R)$ e pertanto $R/A_s(R)$ è isomorfo ad $A_d(R)/A(R)$, dunque $|A_d(R)/A(R)| = 2$ ed analogamente $|A_s(R)/A(R)| = 2$. Allora $A(R)$ è massimale in $A_s(R)$ e in $A_d(R)$. Ne segue il caso 1. Altrimenti $A_d(R) = A_s(R)$ e si ottiene il caso 2.

Viceversa sia $A_d(R) \neq A_s(R)$, come nel caso 1, allora $R/A(R)$ è somma diretta di due zero-anelli di ordine 2 e pertanto R risulta somma di ideali A_1 e A_2 contenenti $A(R)$ e tali che $|A_1/A(R)| = |A_2/A(R)| = 2$. D'altra parte $A_s(R)$ ed $A_d(R)$ devono essere ideali di R diversi da R e pertanto $A_s(R)/A(R)$ ed $A_d(R)/A(R)$ sono ideali di $R/A(R)$ e come tali sono zero-anelli di ordine due ed inoltre

$$R/A(R) = A_s(R)/A(R) \oplus A_d(R)/A(R),$$

così $R = A_s(R) + A_d(R)$. Allora $R/A_s(R)$ è isomorfo ad $(R/A(R))/(A_s(R)/A(R))$ e di qui subito l'asserto. Il resto è ovvio.

Detto *completamente Φ-semplice* un anello tale che i semigruppi di traslazioni destre e sinistre sono privi di ideali destri e di ideali sinistri, dal Teorema 1 segue immediatamente il

Corollario 1. *Se R è Φ-semplice con $R^3 = 0$, allora R è completamente Φ-semplice.*

Il caso degli anelli Φ_s-semplici nilpotenti è invece completamente caratterizzato dal

Teorema 2. *Sia R un anello Φ_s-semplice nilpotente, allora $[\Phi_s, \circ]$ è un semigruppo ciclico generato da un endomorfismo f nilpotente di indice 2 di R^+ con* $\operatorname{car}(\operatorname{Im} f) = 2$ *e tale che*:

1. $\operatorname{Im} f \subseteq A_s(R)$ 2. $|R/A_s(R)| = 2$.

Viceversa se R^+ è un gruppo abeliano ed f è un endomorfismo nilpotente di indice 2 di R^+ tale che $\operatorname{car}(\operatorname{Im} f) = 2$, *allora ogni sottogruppo A_s di R^+, soddisfacente alle condizioni 1 e 2, individua uno ed un solo anello Φ_s-semplice.*

Per le Osservazioni 1 e 2 Φ_s è isomorfo al semigruppo moltiplicativo di $R/A_s(R)$ ed ha ordine 2. Ne segue che Φ_s è formato dell'endomorfismo nullo e da un endomorfismo f di R^+ tale che $f^2 = 0$ essendo $R/A_s(R)$ uno zero-anello. Ne segue banalmente che $\operatorname{Im} f = R^2$. Allora essendo $R^2 \subseteq A_s(R)$ in quanto R è nilpotente abbiamo la condizione 1. Inoltre poiché $\operatorname{car}(R/A(R)) = 2$ per l'Osservazione 1.2.5 di [3] $\operatorname{car} R^2 = 2$. Ne segue l'asserto.

Viceversa dimostriamo che la struttura $[R; +, \bullet]$ con $[R, +] = R^+$ e il prodotto definito dalla

$$a \bullet x = \begin{matrix} 0 & \text{se } a \in A_s(R) \\ f(x) & \text{se } a \notin A_s(R) \end{matrix}$$

è un anello Φ_s-semplice.

Infatti si verifica banalmente la proprietà associativa e distributiva a sinistra del prodotto sfruttando il fatto che f è nilpotente di indice 2 ed $\operatorname{Im} f \subseteq A_s$.

Verifichiamo ora la proprietà distributiva a destra.

Osserviamo inizialmente che poiché $|R/A_s| = 2$ ogni elemento di R appartiene ad A_s oppure è della forma $z + t$, con $z \in R$ e $t \in A_s$. Ne segue che la somma di due elementi di R appartiene ad A_s solo se sono entrambi elementi di A_s oppure entrambi sono della forma $z + t$, in quanto per ipotesi $2z \in A_s$ ($\operatorname{car} R/A(R) = 2$).

Allora per ogni a, b, x di R, i casi possibili sono $(a+b) \notin A_s$, $a, b \in A_s$, $a, b \notin A_s$. Nei primi due casi si ha banalmente che $(a + b)x = ax + bx$. Altrimenti $a = z + t$ e $b = z + t'$ con $t, t' \in A_s$. Ma anche in quest'ultimo caso risulta: $(a + b)x = 0$ poiché $a + b \in A_s$ ed $ax + bx = 2f(x) = 0$ essendo $\operatorname{car} \operatorname{Im} f = 2$.

Inoltre banalmente R risulta unico e Φ_s-semplice.

3 - Anelli Φ_s-semplici non nilpotenti

Osservazione 4. Sia R un anello Φ_s-semplice non nilpotente, allora $A_d(R) = A_s(R) = A(R)$, $A(R^2) = A(R)$ ed $R^2 = R^3$.

Se infatti fosse $A_d(R) \neq A_s(R)$ allora $R = A_s(R) + A_d(R)$ e risulterebbe $R^3 = 0$ contro il supposto.

Inoltre ovviamente risulta $A(R) \subseteq A(R^2)$ e poiché ora $A(R)$ è massimale (R Φ-semplice) allora $A(R) = A(R^2)$, perché è $A(R^2) \neq R$ essendo R non nilpotente. Inoltre per l'Osservazione 2 risulta $R = R^2 + A(R)$ da cui segue $R^2 = R^3$.

Dopo l'Osservazione 4 possiamo concludere che *un anello R Φ_s-semplice non nilpotente è Φ-semplice con $A(R)$ massimale.*

Osservazione 5. Sia R un anello Φ_s-semplice non nilpotente, allora gli ideali di R sono tutti e soli quelli di $A(R)$ oppure sono somme di ideali di $A(R)$ con R^2.

Sia I un ideale di R non contenuto in $A(R)$; poiché ora $A(R)$ è massimale risulta $R = I + A(R)$ e pertanto R/I è isomorfo ad $A(R)/(I \cap A(R))$. Ne segue che R/I deve essere uno zero-anello e cioè $R^2 \subseteq I$; posto $H = I \cap A(R)$ si ha che $R^2 + H \subseteq I$. Visto che ora $R = R^2 + A(R)$ allora, per ogni elemento i di I, esistono $a \in R^2$ e $b \in A(R) \cap I = H$ tali che $i = a + b$ e pertanto risulta $I = R^2 + H$.

Dopo l'Osservazione 5 è immediata la

Osservazione 6. Sia R un anello Φ_s-semplice non nilpotente. Posto $K = R^2 \cap A(R)$, si ha che R^2/K è semplice e K contiene tutti gli ideali di R^2.

Osservazione 7. Sia R un anello Φ_s-semplice non nilpotente, allora R^2 è un anello Φ-semplice non nilpotente.

Infatti Φ_s è semplice ed allora $\Phi_s^2 = \Phi_s$, perché Φ_s^2 è un ideale di Φ_s che non può essere nullo. Dunque Φ_s^2 risulta semplice onde R^2 è Φ_s-semplice non nilpotente e questo implica che R^2 è Φ-semplice (cfr. Osservazione 4).

Dopo l'Osservazione 7 si nota che se R è Φ_s-semplice non nilpotente allora $R = R^2 + A(R)$ ed R^2 è Φ-semplice non nilpotente con $R^2 = R^4 = (R^2)^2$. Basterà allora caratterizzare questi ultimi anelli ed a questo proposito abbiamo il

Teorema 3. *Sia R un anello non nilpotente; allora R è Φ_s-semplice con*

$R^2 = R$, se e solo se $A(R)$ è un ideale massimale, che contiene tutti gli ideali propri di R.

Infatti poiché R è Φ_s-semplice non nilpotente, allora $A(R) = A_s(R) = A_d(R)$ è massimale (Osservazione 4). Per ogni ideale I di R non contenuto in $A(R)$ risulta $R = I + A(R)$ e dunque $R^2 = I^2$ cioè per ipotesi $R = I^2 \subseteq I$ da cui $R = I$. Allora R è un anello con un unico ideale massimo, $A(R)$, che contiene tutti gli ideali di R.

Viceversa se $A(R)$ contiene tutti gli ideali propri di R ed R non è nilpotente, allora R^2 deve coincidere con R ed $A_s(R) = A_d(R) = A(R)$ e dunque Φ_s, isomorfo ad $R/A(R)$, è semplice.

Osservazione 8. Se R è un anello Φ_s-semplice non nilpotente con $R = R^2$, allora il gruppo additivo di R è un p-gruppo abeliano elementare per qualche primo p oppure è un gruppo divisibile.

Infatti se per ogni p primo, $pR \neq 0$ allora $pR = R$ non potendo essere $pR \subseteq A(R)$; ne segue che il gruppo additivo di R è divisibile.

Osservazione 9. Se R è un anello Φ_s-semplice non nilpotente con $R^2 = R$ ed R^+ p-gruppo abeliano elementare allora R è sottodirettamente riducibile oppure $A(R)$ è l'unico ideale di R.

Infatti per il Teorema 3 tutti gli ideali di R sono contenuti in $A(R)$, dunque tutti e soli i sottogruppi di $A(R)^+$ sono ideali di R. Ne segue per il Lemma 1.4.2 di [3] che l'intersezione degli ideali di R è zero a meno che $A(R)$ non sia isomorfo ad uno zero-anello su un gruppo $\boldsymbol{Z}_p$, p primo. Si ha così il secondo caso.

L'Osservazione 9 precisa che gli anelli R con tutti gli ideali massimali (cfr. [4]) e con un solo ideale sono Φ-semplici.

Osservazione 10. Se R è Φ_s-semplice non nilpotente non radicale, allora $A(R)$ coincide con $J(R)$.

Infatti $J(R)$ contiene $A(R)$, che è massimale: ne segue l'asserto.

Si può allora osservare che se R è Φ_s-semplice non nilpotente non radicale ed $R^2 = R$, allora $R/A(R)$ è semplice ed anche semisemplice.

Infine abbiamo la

Osservazione 11. Se R è Φ_s-semplice non nilpotente con $R^2 = R$, allora R è un anello ad ideali annullatori.

Infatti per ogni ideale I di R, I è contenuto in $A(R)$ e pertanto $IR = RI = 0$.

Bibliografia

[1] C. Cotti Ferrero e F. Morini, *On near-rings in which the ideals are annihilators*, Riv. Mat. Univ. Parma 2 (1993), 1-10.

[2] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus. Math. Monographs, **15**, J. Wiley, Chichester, England, 1968.

[3] R. L. Kruse and D. T. Prince, *Nilpotent rings*, Gordon and Breach, New York 1969.

[4] F. J. Perticani, *Commutative rings in which every proper ideal is maximal*, Fund. Math. **71** (1971), 193-197.

Summary

The subject of this paper is to study Φ_s-simple rings (i.e. rings such that their semigroup of the left (right) translations is with zero and simple). We obtain characterizations of such rings with further conditions.

* * *