Riv. Mat. Univ. Parma (5) 3 (1994), 203-208

MARIA KONSTANTINIDOU (*)

Un théorème de représentation pour une classe d'hypertreillis finis faiblement $\wedge$-distributifs (**)

Il est nécéssaire pour ce qui suit de rappeler la définition de hypertreillis [3].

Dèfinition. On appelle *hypertreillis* une hyperstructure $(H, \dot{\vee}, \wedge)$ [$\dot{\vee}$ hyperopération et $\wedge$ opération] telle que pour tous a, b et c de H on a:

$$a \in a \dot{\vee} a \qquad a \wedge a = a$$

$$a \dot{\vee} b = b \dot{\vee} a \qquad a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \dot{\vee} b) \dot{\vee} c = a \dot{\vee} (b \dot{\vee} c) \qquad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \in [a \dot{\vee} (a \wedge b)] \cap [a \wedge (a \dot{\vee} b)]$$

$$a \in a \dot{\vee} b \Leftrightarrow b = b \wedge a.$$

On sait [3] qu'en général, et contrairement à la théorie classique, dans un hypertreillis $(L, \dot{\vee}, \wedge)$, le supremum de deux éléments $a, b \in L$ n' existe pas, mais encore, dans le cas où il existe, il n'est pas connu si $\sup(a, b) \in a \dot{\vee} b$.

On considère, dans ce qui suit, un hypertreillis $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ fini.

Puisque L est fini, il a d'une part un élément minimum, et d'autre part, puisque chaque chaîne ascendante est stationnaire, selon [3] elle a aussi un élément maximum. Par conséquence, pour tout $a, b \in L$, on aura $A = \{x \in L \mid x \geqslant a, b\} \neq \emptyset$, et, étant donné que L est fini, il existe $d = \bigwedge_{x \in A} x$ et surtout $d = \sup(a, b)$. Ainsi, il résulte la

(*) Aristotle University of Thessaloniki, School of Technology, Mathematics Division, Thessaloniki 54006, Greece.

(**) Reçu le 23 Avril 1993. Classificazione AMS 06 D 05.

Proposition 1. *Dans chaque hypertreillis fini, pour tout couple de ses éléments il existe leur supremum.*

Si pour tout $a, b \in L$ on pose $a \vee b = \sup(a, b)$ alors, puisque dans l'hypertreillis $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ on a $a \wedge b = \inf(a, b)$, on aura

Proposition 2. *A chaque hypertreillis fini* $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ *il correspond un treillis* $(L, \vee, \wedge)$ *avec le même support.*

On symbolise dans ce qui suit et où il est nécéssaire par L_h l'hypertreillis et par L_t le treillis qui lui correspond.

Si on suppose que dans L_h l'hyperopération est la suivante

$$a \dot{\vee} b = \{x \in L \mid x \vee a = x \vee b = a \vee b\}$$

alors évidemment $a \vee b \in a \dot{\vee} b$.

Remarque 1. D'aprés les travaux [1], [4], [6] on a les résultats suivants:

a) Puisque l'hypéropération dans L_h est associative, L_t est *modulaire*, et inversement.

b) Si dans L_h la relation $(a \dot{\vee} b) \wedge c \subset (a \dot{\vee} c) \wedge (b \dot{\vee} c)$, pour tout $a, b, c \in L$, est valable. Autrement dit, si L_h est *faiblement* $\wedge$*-distributif*, alors L_t est *distributif* et inversement. Le fait que L_h soit faiblement $\wedge$*-distributif*, n'implique pas qu'il est aussi *faiblement* $\vee$*-distributif*, c'est-à-dire

$$(a \wedge b) \dot{\vee} c \subset (a \dot{\vee} c) \wedge (b \dot{\vee} c),$$

pour tout $a, b, c \in L$.

Désormais on considère que L_h est aussi *faiblement* $\wedge$*-distributif* et par conséquent que L_t est *distributif* [Rem. 1.*b*].

Un élément $a \in L_h$, s'appelle $\dot{\vee}$*-irreductible* si la relation $a = \sup(a_1, a_2)$ implique $a = a_1$ ou $a = a_2$. C'est-à-dire que les éléments $\dot{\vee}$*-irreductibles* de L_h sont les même que les éléments $\vee$-irreductibles de L_t, et ainsi on peut parler d'éléments $\vee$*-irreductibles* de L. Soit donc $J(L)$ l'ensemble des éléments $\vee$*-irreductibles* et différents de zéro de L et $H(J(L))$ l'ensemble des sous-ensembles héréditaires de $J(L)$ (1). On sait [2] que $(H(J(L)), \cup, \cap)$ est un treillis distributif fini

(1) Un sous ensemble X d'un ensemble ordonné A s'appelle *héréditaire*, si $x \in X$ et $y \leq x$, $y \in A$, entraîne $y \in X$.

(ici désigné par $H(J(L))_t$) avec élément minimum $\emptyset$, et que l'application $\phi\colon L_t \to H(J(L))_t$ telle que

$$(*) \qquad \phi\colon a \in L \mapsto J_a = \{x \in J(L) \mid x \leqslant a\} \in H(J(L))$$

est un isomorphisme.

Il est évident que on a l'égalité $H(J(L)) = \{J_a = (a] \cap J(L)\}_{a \in L}$ où $(a]$ est l'idéal principal qui est engendré par $a \in L$.

On définit dans l'ensemble $H(J(L))$ l'*hyperopération*

$$J_a \dot{\cup} J_b = [\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x, J_a \cup J_b]$$

ou $J_a \triangle J_b = (J_a - J_b) \cup (J_b - J_a)$ et $[,]$ signifie un segment, et l'opération $J_a \dot{\cap} J_b = J_a \cap J_b$, $\forall J_a, J_b \in H(J(L))$ (on utilise $\cap$ au lieu de $\dot{\cap}$).

Théoréme. *L'hyperstructure* $(H(J(L)), \dot{\cup}, \cap)$ *est un hypertreillis isomorphe*(2) à $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ *avec l'application* ϕ *definie par* $(*)$.

Pour démontrer ce théoréme il faut démontrer d'abord deux lemmes.

Si dans $H(J(L))$ on définit l'*hyperopération*

$$(1) \qquad J_a \mathring{\cup} J_b = \{J_x\colon J_x \cup J_a = J_x \cup J_b = J_a \cup J_b\} \qquad \forall J_a, J_b \in H(J(L))$$

et l'*operation* $\cap$, on a

Lemme 1. *L'hyperstructure* $(H(J(L)), \mathring{\cup}, \cap)$ *est un hypertreillis* $[H(J(L))_h]$ *isomorphe à* $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ *avec l'application* ϕ *definie par* $(*)$.

Démonstration. En effet, $(H(J(L)), \mathring{\cup}, \cap)$ est un hypertreillis, parce que

1. $J_a \mathring{\cup} J_a \ni J_a \cup J_a = J_a$
2. $J_a \mathring{\cup} J_b = J_b \mathring{\cup} J_a$, c'est évident.

Puisque $H(J(L))_t$ est fini et distributif, donc modulaire, d'après [**1**], [**6**] nous avons, pour tout $J_a, J_b, J_c \in H(J(L))$:

3. $(J_a \mathring{\cup} J_b) \mathring{\cup} J_c = J_a \mathring{\cup} (J_b \mathring{\cup} J_c)$

---

(2) Deux hypertreillis $(H_1, \dot{\vee}, \wedge)$, $(H_2, \dot{\vee}, \wedge)$ sont dits *isomorphes*, s'il existe une application biunivoque f de H_1 sur H_2 telle que on ait $f(a \dot{\vee} b) = f(a) \dot{\vee} f(b)$ et $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

4. $(J_a \overset{\circ}{\cup} J_b) \cap J_a \ni (J_a \cup J_b) \cap J_a = J_a \quad (J_a \cap J_b) \overset{\circ}{\cup} J_a \ni (J_a \cap J_b) \cup J_a = J_a$

5. $J_a \in J_a \overset{\circ}{\cup} J_b \Leftrightarrow J_a \cup J_a = J_a = J_a \cup J_b \Leftrightarrow J_a \cap J_b = J_b$.

Les axiomes qui concernent l'opération $\cap$ sont évidemment valables parce que $\cap$ est l'operation de $H(J(L))_t$.

Maintenant, on va démontrer la deuxième partie du lemme. Puisque l'application ϕ definie par $(*)$ est un isomorphism de L_t dans $H(J(L))_t$ elle est biunivoque et

$$\phi(\alpha \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b) \qquad \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$$

autrement dit $J_{a \vee b} = J_a \cup J_b$ et $J_{a \wedge b} = J_a \cap J_b$.

En ce qui concerne l'hyperoperation, on a:

$$\text{si } x \in a \dot{\vee} b = \{z \in L \mid z \vee a = z \vee b = a \vee b\},$$

alors $\phi(x) \in \phi(a \dot{\vee} b) = \{\phi(z)\}_{z \in a \dot{\vee} b}$ et en plus $\phi(x \vee a) = \phi(x \vee b) = \phi(a \vee b)$, soit $J_x \cup J_a = J_x \cup J_b = J_a \cup J_b$, c'est-à-dire $J_x = \phi(x) \in J_a \overset{\circ}{\cup} J_b$, et donc $\phi(a \dot{\vee} b) \subset J_a \overset{\circ}{\cup} J_b$.

Inversement, si $J_x \in J_a \overset{\circ}{\cup} J_b$ alors

$$J_x \cup J_a = J_x \cup J_b = J_a \cup J_b \Rightarrow \phi(x \vee a) = \phi(x \vee b) = \phi(a \vee b)$$

$$\Rightarrow x \vee a = x \vee b = a \vee b \Rightarrow x \in a \dot{\vee} b \Rightarrow J_x = \phi(x) \in \phi(a \dot{\vee} b)$$

$$\Rightarrow J_a \overset{\circ}{\cup} J_b \subset \phi(a \dot{\vee} b), \qquad \text{donc} \qquad \phi(a \dot{\vee} b) = J_a \overset{\circ}{\cup} J_b.$$

Puisque les conditions rélatives aux opérations $\cap$ et $\wedge$ sont évidemment vérifiées, on a que ϕ est un isomorphisme de L_h sur $H(J(L))_h$.

Remarque 2.

a. Puisque L_t est distributif er fini, d'aprés [4], pour tout $a, b \in L$, $J_a \overset{\circ}{\cup} J_b$ est un segment avec element maximum $J_a \cup J_b$.

b. $\bigcup_{x \in J_a} J_x = J_a$, parce que, si $x \in J_a$ alors, puisque $x \leqslant a$ on aura $\bigvee_{x \in J_a} x \leqslant a$ et par conséquent $J_{\bigvee_{x \in J_a} x} = \bigcup_{x \in J_a} J_x \subset J_a$. Inversement si $z \in J_a$ alors $z \in J(L)$ et en plus $z \leqslant \bigvee_{x \in J_a} x \Rightarrow z \in J_{\bigvee_{x \in J_a} x} = \bigcup_{x \in J_a} J_x$, donc $J_a \subset \bigcup_{x \in J_a} J_x$, d'où l'egalité qu'on voulait démontrer.

Selon b. on a

c. $$\bigcup_{w \in J_a \cap J_b} J_W \subset \bigcup_{x \in J_a} J_x = J_a$$

d. $$\bigcup_{z \in J_a - J_b} J_z \subset \bigcup_{u \in J_a} J_u = J_a .$$

Lemme 2. $J_a \overset{\circ}{\cup} J_b = J_a \dot{\cup} J_b$, $\forall J_a, J_b \in H(J(L))$.

Démonstration. Tout d'abord, $J_a \dot{\cup} J_b$, selon la définition, est un segment avec élément maximum le $J_a \cup J_b$. Pour démontrer alors le lemme, après la remarque 2 a. il suffit de démontrer que $\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x = \min (J_a \overset{\circ}{\cup} J_b)$.

En vertu des b, c, d, de la remarque 2, on aura

$$\Big(\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x\Big) \cup J_a = \Big(\bigcup_{s \in J_a - J_b} J_s\Big) \cup \Big(\bigcup_{t \in J_b - J_a} J_t\Big) \cup J_a = \Big(\bigcup_{t \in J_b - J_a} J_t\Big) \cup J_a$$

$$= \Big(\bigcup_{t \in J_b - J_a} J_t\Big) \cup J_a \cup \Big(\bigcup_{p \in J_a \cap J_b} J_p\Big) = \Big(\bigcup_{q \in (J_b - J_a) \cup (J_a \cap J_b)} J_q\Big) \cup J_a$$

$$= \Big(\bigcup_{q \in J_b} J_q\Big) \cup J_a = J_b \cup J_a = J_a \cup J_b$$

parce que $(J_b - J_a) \cup (J_a \cap J_b) = J_b$.

De même, on démontre que $\big(\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x\big) \cup J_b = J_a \cup J_b$.

Ainsi on a démontré que

(2) $$\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x \in J_a \overset{\circ}{\cup} J_b .$$

La différence symmetrique $J_a \triangle J_b \in P(L)$, laquelle n'est pas necessairement un élément de $H(J(L))$, satisfait à (1).

En effet $(J_a \triangle J_b) \cup J_a = (J_a - J_b) \cup (J_b - J_a) \cup J_a = J_a \cup J_b$, et de même on a $(J_a \triangle J_b) \cup J_b = J_a \cup J_b$.

Si $J_x \in J_a \dot{\cup} J_b$, alors $J_x \cup J_a = J_x \cup J_b = J_a \cup J_b$, d'où $J_a - J_b$ et $J_b - J_a$ sont inclus dans J_x, soit $J_a \triangle J_b \subset J_x \subset J_a \cup J_b$.

On va chercher maintenant le plus petit J_x, qui satisfait la relation ci-dessus.

Puisque L_t est fini alors tout ses idéaux sont principaux [8]. Par conséquent l'idéal de L_t qui est engendré par $J_a \triangle J_b$, noté par $(J_a \triangle J_b]$, sera celui qui est engendré par le $\sup (J_a \triangle J_b)$, c'est-à-dire $(J_a \triangle J_b] = (\sup (J_a \triangle J_b)]$. Donc, le plus petit élément de $H(J(L))$ qui contient le $J_a \triangle J_b$, sera

$$(\sup (J_a \triangle J_b)] \cap J(L) = J_{\sup (J_a \triangle J_b)} .$$

Mais étant donné que $H(J(L))$ est fini, on obtient

$$J_{\sup(J_a \triangle J_b)} = J_{\bigvee\limits_{x \in J_a \triangle J_b} x} = \bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x .$$

Par conséquent, et selon la relation (2) on obtient

$$\bigcup_{x \in J_a \triangle J_b} J_x = \min(J_a \overset{\circ}{\cup} J_b) .$$

Ceci achève la demonstration du Lemme 2.

Maintenant, la démonstration du théoréme résulte immédiatement par la combinaison des deux lemmes.

Remarque 3. Évidemment $(H(J(L)), \dot{\cup}, \cap)$ est un hypertreillis faiblement $\wedge$-distributif.

Références

[1] S. COMMER, *Multi-valued algebras and their graphical representations*, Math. and Computer Sc. Dept., The Citadel, Charleston, South Carolina, 29409, USA.

[2] G. GRÄTZER, *Lattice theory*, W. H. Freeman, San Francisco 1971.

[3] M. KONSTANTINIDOU et J. MITTAS, *An introduction to the theory of hyperlattices*, Math. Balkanica, 7, Beograd 1977.

[4] M. KONSTANTINIDOU et K. SERAFIMIDIS, *Hyperstructures dérivées d'un treillis particulier*, Rend. Mat., **13** (1993), 257-265.

[5] J. MITTAS et M. KONSTANTINIDOU, *Introduction à l'hyperalgèbre de Boole.* Math. Balkanica, **6**, Beograd 1976.

[6] J. MITTAS et M. KONSTANTINIDOU, *Contribution à la théorie des treillis en liaison avec des structures hypercompositionnelles y attachées,* Riv. Mat. Pura Appl., **14** (1994), 83-144.

[7] R. PROCESI-CAMPI et R. ROTA, *Stone's representation theorem for Boolean hyperalgebras*. Fourth Int. Congress on Algebraic hyperstructures and Applications 1990, World Scientific 1991.

[8] G. SZÁSZ *Théorie des treillis.* Monographie Univ. de Math., Dunod, Paris 1971.

Sommario

In [7] *R. Procesi-Ciampi e R. Rota hanno esteso alle iperalgebre di Boole forti* [5] *un teorema di rappresentazione classica relativo alle algebre di Boole. In questa nota si ottiene una estensione di un teorema di rappresentazione per reticoli distributivi finiti ad una classe di iper-reticoli finiti, che soddisfano una condizione più debole della distributività, detta $\wedge$-distributività debole.*

* * *