Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 325-330

OSVALDO FERRI (*)

Sulle caratterizzazioni grafiche delle quadriche nello spazio affine $AG(3, q)$ (**)

1 - Introduzione

Seguendo le notazioni di G. Tallini in [12] e [13], chiameremo *carattere di indice s*, rispetto ai piani, di un k-insieme K di $AG(3, q)$ il numero t_s dei piani di $AG(3, q)$ che intersecano K esattamente in s punti. Inoltre diremo che K è di *classe* $[m_0, m_1, \dots, m_l]_2$, rispetto ai piani, se ogni piano di $AG(3, q)$ può incontrare K solamente in $m_0, m_1, \dots, m_l$ punti (con $m_0 < m_1 < \dots < m_l$). Diremo poi che K è di *tipo* $(m_0, m_1, \dots, m_l)_2$, rispetto ai piani, se è di classe $[m_0, m_1, \dots, m_l]_2$ ed è $t_m \neq 0$, per ogni $m = m_0, m_1, \dots, m_l$.

Nei lavori [3], [4], [5], [6], [7], sono stati caratterizzati i vari tipi di quadriche di $AG(3, q)$, come k-insiemi di data classe rispetto ai piani, ad eccezione dei coni quadrici.

In questo lavoro completiamo la caratterizzazione delle quadriche di $AG(3, q)$ esaminando appunto il caso rimasto dei *coni quadrici*. Inoltre diamo anche un'altra caratterizzazione dei paraboloidi ellittici, diversa da quella di [3]. Precisamente dimostriamo il teorema

Teorema 1. *In* $AG(3, q)$, $q > 3$, *un* k-*insieme* K, *di classe* $[0, 1, q-1, q, q+1, 2q-1]_2$, *rispetto ai piani, con* $k \geq q^2$, *per il quale si*

(*) Dip. di Matem. Pura e Appl., Univ. L'Aquila, Via Vetoio, 67010 Coppito (AQ), Italia.

(**) Ricevuto il 17.6.1993. Classificazione AMS 51 B 26.

abbia la proprietà

(1.1) *per ogni retta non appartenente a K passa, al più, un piano $(2q-1)$-secante K*

è tale che $k = q^2$ e, se contiene qualche retta, risulta un cono quadrico se q è dispari o un cono proiettante un $(q+1)$-arco se q è pari; se K non contiene rette, esso è una q^2-calotta che si completa aggiungendo un punto del piano improprio di $PG(3, q)$, ampliamento di $AG(3, q)$, e quindi, se q è dispari, esso è un paraboloide ellittico.

2 - Dimostrazione del teorema 1

Incominciamo a stabilire alcune proposizioni.

Proposizione 1. *In $AG(3, q)$, $q > 3$, un k-insieme K, con $k \geqslant q^2$ e cioè $k = q^2 + a$ $(a \geqslant 0)$, di classe $[0, 1, q-1, q, q+1, 2q-1]_2$, soddisfacente la (1.1), è tale che ogni retta non appartenente a K incontra K in al più due punti. Inoltre, se K contiene una retta, allora o $k = q^2$ oppure $k = q^2 + q - 1$. Nel primo caso dei piani per tale retta uno è q-secante K ed ogni altro è $(2q-1)$-secante K, nel secondo caso tutti i piani per tale retta sono $(2q-1)$-secanti K.*

Dimostrazione. Sia s una retta h-secante K, con $2 \leqslant h \leqslant q$. Indicati con W_i i numeri dei piani per s che siano i-secanti K, $i = q-1, q, q+1, 2q-1$, risulta

$$\begin{aligned} &W_{q-1} + W_q + W_{q+1} + W_{2q-1} = q+1 \\ &(q-1-h)\, W_{q-1} + (q-h)\, W_q + (q+1-h)\, W_{q+1} + (2q-1-h)\, W_{2q-1} = q^2 + a - h. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Eliminando W_{q-1} si ottiene

$$W_q + 2W_{q+1} + qW_{2q-1} = hq + a + 1\,. \tag{2.2}$$

Si ha, per la $(2.1)_1$ e la (2.2)

$$hq + 1 \leqslant hq + a + 1 = W_q + 2W_{q+1} + qW_{2q-1} \leqslant q + 1 + (q-1)\, W_{2q-1} + W_{q+1}. \tag{2.3}$$

Se $h < q$, cioè se s non appartiene a K, essendo, per la (1.1), $W_{2q-1} \leqslant 1$, si hanno le seguenti eventualità:

$$W_{2q-1} = 1 \overset{(2.3)}{\Longrightarrow} hq + 1 \leqslant 2q + W_{q+1} \Rightarrow (h-2)\,q + 1 \leqslant W_{q+1} \leqslant q \Rightarrow h = 2$$

$$W_{2q-1} = 0 \overset{(2.3)}{\Longrightarrow} hq + 1 \leqslant q + 1 + W_{q+1} \Rightarrow (h-1)\,q \leqslant W_{q+1} \leqslant q + 1 \Rightarrow h = 2\,.$$

Si è così provato che

$$h < q \Rightarrow h = 2 \tag{2.4}$$

cioè che ogni retta non contenuta in K incontra K in, al più, due punti, ossia la prima parte della Proposizione 1.

Se $h = q$, cioè s è contenuta in K, dalla (2.3) si ha

$$q^2 + 1 \leqslant q + 1 + (q-1)\,W_{2q-1} + W_{q+1} \Rightarrow q^2 - q \leqslant (q-1)\,W_{2q-1} + W_{q+1}$$

da cui

$$q \leqslant W_{2q-1} + \frac{1}{q-1}\,W_{q+1}\,. \tag{2.5}$$

Supponendosi $q > 3$ ed essendo, per la $(2.1)_1$, $W_{q+1} \leqslant q + 1$, si ha

$$\frac{1}{q-1}\,W_{q+1} \leqslant 1 \tag{2.6}$$

e cioè due casi sono possibili a seconda che $W_{q+1} = 0$ oppure $W_{q+1} = q - 1$.

Nel primo caso, $W_{q+1} = 0$, dalla (2.5), si ha: $W_{2q-1} \geqslant q$, cioè $W_{2q-1} = q$ oppure $W_{2q-1} = q + 1$. Risulta

$$W_{2q-1} = q \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} W_q = a + 1 \overset{(2.1)_1}{\Longrightarrow} a = 0 \quad W_{q-1} = 0 \Rightarrow k = q^2 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &W_{2q-1} = q + 1 \overset{(2.1)_1}{\Longrightarrow} W_{q-1} = W_q = W_{q+1} = 0 \\ &\overset{(2.2)}{\Longrightarrow} a = q - 1 \Rightarrow k = q^2 + q - 1\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nel secondo caso, $W_{q+1} = q - 1$, dalla (2.5) si ha: $W_{2q-1} \geqslant q - 1$ e quindi, per la $(2.1)_1$, risulta $q + 1 \geqslant W_{2q-1} + W_{q+1} \geqslant 2(q-1)$ e cioè $q \leqslant 3$, ossia l'assurdo supponendosi $q > 3$. Da ciò e dalle (2.7) e (2.8), segue la seconda parte della Proposizione 1. Si ha così l'asserto.

Proposizione 2. *In* $AG(3, q)$, $q > 3$, *un* k*-insieme* K, *con* $k \geqslant q^2$, *di classe* $[0, 1, q-1, q, q+1, 2q-1]_2$, *soddisfacente la* (1.1) *e che non contenga rette, risulta una* q^2*-calotta che si completa in* $PG(3, q)$, *ampliamento di* $AG(3, q)$, *in una* (q^2+1)*-calotta aggiungendo un punto improprio e quindi, se* q *è dispari, è un paraboloide ellittico.*

Dimostrazione. Poiché K non contiene rette, per la prima parte della Proposizione 1, risulta K una k-calotta, onde (cfr. [1]) è $k \leqslant q^2 + 1$. Ma non può essere $k = q^2 + 1$, perché una (q^2+1)-calotta di $PG(3, q)$ è (cfr. [1]) di tipo $(1, q+1)_2$ rispetto ai piani, mentre il piano improprio è esterno a K. Supponendosi $k \geqslant q^2$, si ha allora che K è una q^2-calotta di $AG(3, q)$ e quindi in $PG(3, q)$, ampliamento di $AG(3, q)$, K è necessariamente incompleta e si completa in una (q^2+1)-calotta aggiungendo un punto T del piano improprio, il quale quindi è tangente in T a $K \cup \{T\}$. Se ne deduce che, se q è dispari, K è (cfr. [1]) un *paraboloide ellittico.* Si ha così l'asserto.

Proposizione 3. *In* $AG(3, q)$, $q > 3$, *un* k*-insieme* K, *con* $k \geqslant q^2$, *di classe* $[0, 1, q-1, q, q+1, 2q-1]_2$, *soddisfacente la* (1.1) *e che contenga almeno una retta, risulta un cono proiettante un* $(q+1)$*-arco, onde* $k = q^2$ *e quindi, se* q *è dispari, (cfr.* [8] n. 174), K *è un cono quadrico.*

Dimostrazione. Sia s una retta di K, per la Proposizione 1, seconda parte, per s passano almeno q piani $(2q-1)$-secanti K. Sia α uno di tali piani. I punti di $K \cap \alpha - s$ sono in numero di $q - 1$ $(\geqslant 3)$. Tali punti non possono essere allineati su una retta parallela ad s, altrimenti tale retta sarebbe una $(q-1)$-secante K e ciò è escluso dalla Proposizione 1, prima parte. Esistono dunque due punti P_1 e P_2, tra i suddetti $q-1$, tali che la retta $r = P_1P_2$ risulti incidente K. Ma allora r ha tre punti distinti in comune con K (i punti P_1, P_2, $r \cap s$) e quindi appartiene a K (cfr. Proposizione 1). Ne segue che $K \cap \alpha = r \cup s$.

Se ne deduce che ogni piano che contiene una retta s di K, o incontra K solo in s oppure in due rette incidenti (cfr. Proposizione 1, seconda parte).

Sia allora Π un qualsiasi piano $(2q-1)$-secante K. Se non contiene rette di K, i $2q-1$ punti di $K \cap \Pi$ sono a tre a tre non allineati e quindi costituiscono un arco, onde $|K \cap \Pi| \leqslant q + 2$ ma ciò è assurdo essendo $|K \cap \Pi| = 2q - 1$ e $q > 3$. Ne segue la proprietà

(2.9) *Ogni piano* $(2q-1)$*-secante* K *incontra* K *in due rette incidenti.*

Sussiste anche la proprietà

(2.10) *La famiglia $\mathcal{R}$ delle rette contenute in K non può contenere due rette sghembe.*

Ragionando per assurdo, siano r_1 e r_2 due rette sghembe di $\mathcal{R}$. Sia A_1 un punto di r_1, esiste certamente un punto A_2 di r_2 tale che la retta A_1A_2 non appartiene a K. Il piano Π_1 per r_1 ed A_2 è $(2q-1)$-secante K (cfr. Proposizione 1, parte seconda). Analogamente il piano Π_2 per r_2 ed A_1 è $(2q-1)$-secante K. Evidentemente Π_1 è diverso da Π_2; dunque per la retta $A_1A_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2$ (non contenuta in K) passano due piani $(2q-1)$-secanti K e ciò è in contrasto con la (1.1). Ne segue la (2.10).

Per la Proposizione 1, seconda parte, e per la (2.9), risulta $|\mathcal{R}| \geqslant q+1$. Poiché le rette di $\mathcal{R}$ sono a due a due incidenti (cfr. (2.10)) esse, non potendo giacere tutte su un piano (essendo $|\mathcal{R}| \geqslant q+1$), passano tutte per un punto V ed inoltre sono a tre a tre non formanti fascio, quindi costituiscono un cono Γ proiettante un n-arco, con $n = |\mathcal{R}| \geqslant q+1$, inoltre è $n \leqslant q+2$.

Per ogni P appartenente a K passa una retta r di $\mathcal{R}$. Infatti, sia s una retta di $\mathcal{R}$, non per P, il piano per P e per s incontra K oltre che in s in una retta r per P (cfr. Proposizione 1, parte seconda e la proprietà (2.9)), ne segue che $\Gamma = K$.

Non può essere $n = q+2$ altrimenti esisterebbe un piano che interseca $K = \Gamma$ in $q+2$ punti e ciò è escluso (essendo $q > 3$). Rimane così completamente provata la Proposizione 3.

Dalle Proposizioni 2, 3 segue il Teorema 1.

Bibliografia

[1] A. Barlotti, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, Boll. Un. Mat. Ital. **10** (1955), 498-506.

[2] P. Biondi and N. Melone, *On sets of Plucker class two in $PG(3, q)$*, Ann. Discrete Math. **30** (1986), 99-103.

[3] O. Ferri, *Una caratterizzazione delle q^2-calotte di $AG(3, q)$*, Rend. Mat. Appl. **5** (1985), 285-289.

[4] O. Ferri, *Su una caratterizzazione dei paraboloidi iperbolici di $AG(3, q)$*, Rend. Mat. Appl. **6** (1986), 239-243.

[5] O. FERRI, *Proprietà grafiche caratterizzanti gli iperboloidi iperbolici di* $AG(3, q)$, Rend. Mat. Appl. **7** (1987), 131-137.

[6] O. FERRI, *Sui k-insiemi di classe* $[0, 1, q-1, q, q+1, 2q]_2$ *in* $AG(3, q)$ *con* $k \geqslant q^2 - q$, Riv. Mat. Pura Appl. **6** (1990), 63-74.

[7] O. FERRI, *Caratterizzazione degli iperboloidi ellittici di* $AG(3, q)$, Riv. Mat. Pura Appl. (in corso di stampa).

[8] B. SEGRE, *Lectures of modern geometries*, Cremonese, Roma 1961.

[9] G. TALLINI, *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti*, 1, 2, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **20** (1956), 311-317, 442-466.

[10] G. TALLINI, *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*, Ann. Mat. Pura Appl. **42** (1956), 119-164

[11] G. TALLINI, *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Appl. **16** (1957), 328-351.

[12] G. TALLINI, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione 30, Istit. Mat. Univ. Napoli (1973), 1-30.

[13] G. TALLINI, *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Teorie Combinatorie (Roma, Settembre 1973), Accad. Naz. Lincei 1976.

[14] G. TALLINI, *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois. Teoria dei codici correttori*, Sem. Geom. Combin., Dip. Mat. Univ. Roma La Sapienza, Quaderno 64, 1985.

[15] G. TALLINI, *Le (n)-varietà di uno spazio proiettivo* $P_{r,k}$, Sem. Geom. Combin., Dip. Mat. Univ. Roma La Sapienza, Quaderno 102, 1991.

[16] G. TALLINI, *Le (n)-varietà in spazi lineari*, Geometrie Combinatorie, Dip. Mat. Univ. Perugia 1992.

[17] G. TALLINI, *Le (n)-varietà di uno spazio proiettivo* $P_{r,k}$, Ratio Math. **5** (1992), 107-153.

Summary

In $AG(3, q)$, q *odd*, $q > 3$, *the quadric cones are characterized. A new characterization of the elliptic paraboloids is also given.*

* * *