Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1 (1992), 317-331

ROBERTO LA SCALA (*)

Basi di Gröbner e leggi di raddrizzamento per le bitabelle di Young (**)

1 - Introduzione

La teoria delle *basi di Gröbner* sta progressivamente rivelandosi non solo uno strumento efficiente per l'algebra computazionale ma anche un sistema di nozioni e metodi generali adatti ad unificare diverse teorie costruttive per algebre di tipo polinomiale. Lavorando in questa prospettiva Sturmfels e White [10] hanno recentemente riconosciuto come il fondamentale algoritmo di raddrizzamento per l'algebra delle bracket possa essere vantaggiosamente interpretato nell'ambito della più generale teoria delle basi di Gröbner. Più precisamente, le identità di Plücker risultano essere una base di Gröbner per l'ideale delle identità polinomiali soddisfatte dalle bracket e l'algoritmo di raddrizzamento non è altro che la procedura di riduzione a forma normale rispetto a tale base di Gröbner.

È ben noto che l'*algebra delle bracket* può essere vista come l'algebra generata dai minori di ordine massimo di una matrice rettangolare a termini generici e che, d'altra parte, algoritmi di raddrizzamento sono noti per il caso più generale dell'algebra generata dai minori di ordine qualsiasi. Nella presente nota ci si propone perciò di sviluppare un analogo dello studio di Sturmfels e White che permetta d'interpretare anche questi algoritmi di raddrizzamento generali nell'ambito della teoria delle basi di Gröbner.

La base del nostro lavoro è l'idea, dovuta a De Concini, Eisenbud e Procesi [4], di derivare il *teorema di base standard per i bideterminanti* (prodotti di mi-

(*) Dip. di Matematica, Univ. Pisa, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italia.
(**) Ricevuto il 4.11.1992. Classificazione AMS 13 P 10.

nori di ordine qualsiasi) dall'analogo teorema per le bracket mediante un processo di deomogeneizzazione. Nella teoria generale delle basi di Gröbner è ben noto infatti che una base di Gröbner si deomogenizza ancora in una base di Gröbner purché siano verificate alcune semplici condizioni di compatibilità con l'ordinamento dei termini.

La nota è organizzata come segue. Al numero 2 viene introdotta l'algebra delle bracket come quoziente dell'anello A dei polinomi in $\binom{n+d}{d}$ $(d \leq n)$ variabili indipendenti rispetto all'ideale omogeneo I generato dalla base di Gröbner costituita dai polinomi di raddrizzamento per le tabelle. Notiamo che la definizione che sarà data di tabella come di una forma canonica per i prodotti di coordinate plückeriane differisce da quella usuale di una presentazione qualsiasi di tali prodotti (commutativi). Come sarà chiaro dal contesto, tale scelta è stata motivata dalla volontà di utilizzare la teoria ordinaria delle basi di Gröbner.

Sempre al numero 2 è definito il morfismo di deomogeneizzazione φ come un omomorfismo dall'algebra libera A al sottoanello B dei polinomi in $N = \binom{n+d}{d} - 1$ variabili. Un risultato di teoria generale assicura che la base di Gröbner dell'ideale I si trasforma attraverso φ ancora in una base di Gröbner per l'ideale deomogeneizzato $J = \varphi(I)$.

Al numero 3 s'introduce un'algebra B'/J' isomorfa a B/J al fine di recuperare la proprietà di omogeneità per contenuto delle leggi di raddrizzamento, persa nel processo di deomogenizzazione. I termini di B'/J' si rappresentano come tabelle doppie.

Infine, nel numero 4 è data un'interpretazione concreta per l'algebra B'/J'. Essa è isomofa alla letterplace algebra C, cioè l'algebra dei polinomi negli entries di una generica matrice $n \times d$, secondo la corrispondenza che associa ogni bitabella al suo bideterminante. Questo risultato è ottenuto per via geometrica interpretando B/J come l'anello delle coordinate di una componente affine della varietà di Grassmann.

Per le definizioni relative alla teoria delle basi di Gröbner si rimanda all'articolo di Sturmfels e White ed all'articolo espositivo di Buchberger [3].

2 - Il morfismo di deomogeneizzazione per l'algebra delle bracket

Sia K un campo qualsiasi oppure l'anello degli interi. Siano n e d due interi positivi, diciamo $d \leq n$, e poniamo $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Sia $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+d}\}$ un alfabeto linearmente ordinato. Indichiamo con A l'anello dei polinomi nelle

$N+1$ variabili algebricamente indipendenti $[a_{i_1}\dots a_{i_d}]$ con $a_{i_h}\in\mathcal{X}$ e $a_{i_1}<\dots<a_{i_d}$. Sia ora $B\subset A$ il sottoanello generato dalle N variabili $[a_{i_1}\dots a_{i_d}]\neq[a_{n+1}\dots a_{n+d}]$. Notiamo che l'algebra B è canonicamente un'immagine omomorfa di A secondo il cosiddetto *morfismo di deomogeneizzazione* $\varphi\colon A\to B$

$$\varphi[a_{i_1}\dots a_{i_d}]=\begin{matrix} 1 & \text{se } [a_{i_1}\dots a_{i_d}]=[a_{n+1}\dots a_{n+d}] \\ [a_{i_1}\dots a_{i_d}] & \text{altrimenti.}\end{matrix}$$

Vogliamo assegnare ora un ideale omogeneo $I\subset A$. Al fine di definire un suo sistema di generatori cominciamo con l'ordinare parzialmente le variabili $[a_{i_1}\dots a_{i_d}]$. Diremo allora che $[a_{i_1}\dots a_{i_d}]\trianglelefteq[a_{j_1}\dots a_{j_d}]$ se $a_{i_1}\leqslant a_{j_1},\dots,a_{i_d}\leqslant a_{j_d}$. Sarà utile nel seguito avere una presentazione canonica per i *termini* (prodotti di variabili) di A. Raffiniamo allora $\trianglelefteq$ con l'ordinamento lessicografico, poniamo cioè $[a_{i_1}\dots a_{i_d}]<[a_{j_1}\dots a_{j_d}]$ se esiste k tale che $a_{i_h}=a_{j_h}$ per $h<k$ e $a_{i_k}<a_{j_k}$.

È comodo indicare i termini di A scrivendo una sotto l'altra le variabili. Diremo allora che un termine si presenta in forma canonica se le sue variabili sono crescenti dall'alto verso il basso rispetto a $\leqslant$. In tal caso diremo che il termine è una *tabella*. Poiché l'ordine $\leqslant$ è totale possiamo associare una tabella ad ogni termine di A. Se passiamo all'ordine parziale $\trianglelefteq$ otteniamo invece un sottoinsieme dei termini. Diremo allora che una tabella è *standard* se le sue variabili sono crescenti rispetto a $\trianglelefteq$.

Esempio 1. $n=3$, $d=3$. $\begin{bmatrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3\end{bmatrix}$ è una tabella non standard mentre $\begin{bmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4\end{bmatrix}$ è standard.

Per brevità chiameremo *violazione* ogni tabella quadratica non standard. Abbiamo così che le tabelle standard sono tutti e soli i termini non divisibili per una violazione.

Definiamo ora la famiglia di generatori dell'ideale $I\subset A$. Sia $[T]=\begin{bmatrix} a_{i_1}\dots a_{i_d} \\ a_{j_1}\dots a_{j_d}\end{bmatrix}$ una generica violazione ovvero esiste qualche k tale che $a_{i_k}>a_{j_k}$. Consideriamo il seguente polinomio

$$[T]+\sum\operatorname{sgn}(h)\begin{bmatrix} a_{i_1}\dots a_{i_{k-1}} & a_{h_{k+1}}\dots & a_{h_{d+1}} \\ a_{h_1}\dots & a_{h_k}a_{j_{k+1}}\dots & a_{j_d}\end{bmatrix}.$$

La somma è estesa ad ogni combinazione $a_{h_1}<\dots<a_{h_k}$ diversa da $a_{j_1}<\dots<a_{j_k}$ nell'alfabeto $\{a_{j_1},\dots,a_{j_k},a_{i_k},\dots,a_{i_d}\}$. Con $a_{h_{k+1}}<\dots<a_{h_{d+1}}$ abbiamo indicato la

combinazione complementare di $a_{h_1} < \ldots < a_{h_k}$ e $\operatorname{sgn}(h)$ è il segno della permutazione

$$\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\, i_k & \ldots & i_d \\ h_1 & \ldots & h_k\, h_{k+1} & \ldots & h_{d+1} \end{pmatrix}.$$

Valgono inoltre le seguenti convenzioni: se in una *tabella formale*

$$\begin{bmatrix} a_{i_1} \ldots a_{i_{k-1}} & a_{h_{k+1}} \ldots & a_{h_{d+1}} \\ a_{h_1} \ldots & a_{h_k} a_{j_{k+1}} \ldots & a_{j_d} \end{bmatrix}$$

uno stesso simbolo compare due volte in una stessa riga allora ad essa non è associato alcun termine. Se in una riga i simboli non compaiono in modo strettamente crescente da sinistra verso destra allora ad essa è associata la variabile che si ottiene riscrivendo i simboli in questo modo, moltiplicata per il segno della permutazione utilizzata.

Chiaramente queste convenzioni equivalgono ad aver esteso le variabili di A a tutte le d-uple in $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+d}\}$ ed aver aggiunto ad I le identità di antisimmetria.

Esempio 2. $[T] = \begin{bmatrix} a_1 a_4 a_5 \\ a_2 a_3 a_4 \end{bmatrix}$. Se scegliamo la *violazione* $a_4 > a_3$ allora a $[T]$ è associato il *polinomio formale*

$$\begin{bmatrix} a_1 a_4 a_5 \\ a_2 a_3 a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_2 a_4 a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_4 \\ a_2 a_5 a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_5 \\ a_3 a_4 a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 \\ a_3 a_5 a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ a_4 a_5 a_4 \end{bmatrix}$$

ovvero il polinomio di A $\quad \begin{bmatrix} a_1 a_4 a_5 \\ a_2 a_3 a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_4 \\ a_2 a_4 a_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 \\ a_3 a_4 a_5 \end{bmatrix}$.

Al variare della violazione $[T]$ resta dunque descritto in A un sistema di forme quadratiche moniche a coefficienti interi che definiscono I come l'ideale omogeneo generato. Questi polinomi si chiamano i *polinomi di raddrizzamento per le tabelle* e il loro insieme verrà denotato con il simbolo $\mathcal{G}_I$. Notiamo che ogni elemento di $\mathcal{G}_I$ è pure *omogeneo per contenuto* nel senso che le tabelle che lo compongono contengono tutte le stesse lettere ripetute con la stessa molteplicità. Poniamo ora $J = \varphi(I)$ e $\mathcal{G}_J = \varphi(\mathcal{G}_I)$. Poiché l'omomorfismo φ è suriettivo abbiamo che J è un ideale di B e un sistema di generatori per J è dato da $\mathcal{G}_J$. Per come abbiamo definito φ è chiaro però che l'ideale $J \subset B$ non è omogeneo per grado e neppure per contenuto.

È ben noto che il quoziente A/I è *l'algebra delle bracket* o, equivalentemente, l'anello delle coordinate omogenee della varietà di Grassmann $G_{d-1, n+d-1}$ immersa in $\boldsymbol{P}^N$ mediante l'immersione plückeriana. Corrispondentemente B/J è l'anello delle coordinate della componente affine $G_{d-1, n+d-1} - H$ ottenuta sottraendo alla grassmanniana l'iperpiano $H \subset \boldsymbol{P}^N$ di equazione $[a_{n+1} \dots a_{n+d}] = 0$.

Un risultato fondamentale per l'algebra A/I è che una sua base lineare è data dai resti (le immagini attraverso $A \to A/I$) delle tabelle standard. Sia ora $[T] + \sum \pm [T_i]$ un generico polinomio di raddrizzamento ove $[T]$ è la violazione. Tenuto conto che le tabelle standard sono esattamente i termini non divisibili per le violazioni nel linguaggio delle basi di Gröbner questo risultato significa che gli elementi $\mathcal{G}_I$ costituiscono una base di Gröbner dell'ideale $I = (\mathcal{G}_I)$ rispetto ad ogni ordine ammissibile sui termini di A tale che $[T] > [T_i]$ per ogni i (cfr. [**10**]). Definiamo allora un ordinamento che verifichi queste proprietà.

Ordinate le variabili $[a_{\underline{i}}] = [a_{i_1} \dots a_{i_d}]$ secondo $\leqslant$, siano

$$[S] = \begin{bmatrix} a_{\underline{i}_1} \\ \vdots \\ a_{\underline{i}_r} \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} a_{\underline{j}_1} \\ \vdots \\ a_{\underline{j}_s} \end{bmatrix}$$

due tabelle di A. Diremo che $[S] < [T]$ se $r < s$ oppure per $r = s$ se $a_{\underline{i}_1} \dots a_{\underline{i}_r} < a_{\underline{j}_1} \dots a_{\underline{j}_s}$ nell'ordine lessicografico cioè esiste k tale che $a_{\underline{i}_h} = a_{\underline{j}_h}$ per $h < k$ e $a_{\underline{i}_k} < a_{\underline{j}_k}$ nell'ordine dato. Proviamo ora che quest'ordine per i termini di A soddisfa davvero le proprietà richieste.

Abbiamo che $\leqslant$ è *moltiplicativo* nel senso che, se $[T_1]$, $[T_2]$ e $[T_3]$ sono tre tabelle e $[T_1] < [T_2]$, allora la tabella formata dal prodotto $[T_1][T_3]$ è minore di quella ottenuta da $[T_2][T_3]$. Infatti, presentati i termini di A come prodotti di potenze invece che come tabelle è facile verificare che l'ordine $\leqslant$ coincide esattamente con l'inverso graduato dell'ordine lessicografico sulle sequenze (di lunghezza $N + 1$) degli esponenti. È ben noto che questo è un ordinamento ammissibile (fra i più efficenti) nel senso della teoria delle basi Gröbner.

Abbiamo inoltre che, rispetto all'ordinamento $\leqslant$, ogni violazione

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{i_1} \dots a_{i_d} \\ a_{j_1} \dots a_{j_d} \end{bmatrix} \quad \text{con } a_{i_k} > a_{j_k}$$

è il massimo fra i termini del polinomio di raddrizzamento ad essa associato. Infatti, tenuto conto che $a_{j_1} < \dots < a_{j_k} < a_{i_k} < \dots < a_{i_d}$ risulta che $[a_{i_1} \dots a_{i_d}] > [a_{i_1} \dots a_{i_{k-1}} a_{h_{k+1}} \dots a_{h_{d+1}}]$ qualunque sia $a_{h_{k+1}} < \dots < a_{h_{d+1}}$ una combinazione diversa da $a_{i_k} < \dots < a_{i_d}$ nell'alfabeto $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, a_{i_k} \dots, a_{i_d}\}$.

Proviamo finalmente che anche $\mathcal{G}_J = \varphi(\mathcal{G}_I)$ è una base di Gröbner. Più precisamente abbiamo

Teorema 1. *La famiglia $\mathcal{G}_J$ è una base di Gröbner dell'ideale J rispetto all'ordine indotto da $\leqslant$ sui termini del sottoanello B.*

La dimostrazione segue da alcune osservazioni sulla variabile $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ e dal seguente risultato di teoria generale.

Lemma. *Sia $K[X_1, \dots, X_{N+1}]$ un anello di polinomi munito di un ordine ammissibile sui suoi termini. Per i termini del sottoanello $K[X_1, \dots, X_N]$ si consideri l'ordinamento indotto. Sia φ: $K[X_1, \dots, X_{N+1}] \to K[X_1, \dots, X_N]$ l'omomorfismo suriettivo così definito*

$$\varphi(X_i) = \begin{matrix} 1 & \text{se } i = N+1 \\ X_i & \text{altrimenti.} \end{matrix}$$

Sia ora $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_{N+1}]$ una famiglia di polinomi monici ed omogenei. Si ponga $I = (f_1, \dots, f_r)$ e $J = \varphi(I) = (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_r))$. Indicato poi, per ogni i, con $Lt(f_i)$ il massimo fra i termini che occorrono in f_i rispetto all'ordine dato, supponiamo che $Lt\varphi(f_i) = \varphi(Lt(f_i))$.

Allora, se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è una base di Gröbner di I, $\{\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_r)\}$ è una base di Gröbner di J.

Dimostrazione. Sia $f' \in J$, f' ridotto cioè ogni termine di f' non è divisibile da nessuna $Lt\varphi(f_i)$. Dobbiamo provare $f' = 0$.

Poiché l'ideale I è omogeneo e $J = \varphi(I)$ esiste $f \in I$, f omogeneo tale che $\varphi(f) = f'$. Proviamo che anche f è ridotto rispetto alle $Lt(f_i)$. Supponiamo per assurdo che qualche termine u di f sia divisibile da qualche $Lt(f_i)$. Poiché f è omogeneo il termine $\varphi(u)$ ha necessariamente coefficiente diverso da zero in $\varphi(f) = f'$. Ma da $Lt(f_i) | u$ segue chiaramente $\varphi(Lt(f_i)) | \varphi(u)$ ovvero $Lt\varphi(f_i) | \varphi(u)$ e ciò è impossibile in quanto f' è ridotto.

Essendo $f \in I$, f ridotto abbiamo $f = 0$ in quanto $\{f_1, \dots, f_r\}$ è una base di Gröbner di I e quindi $f' = \varphi(f) = 0$. Notiamo esplicitamente che essendo monici i polinomi f_i il teorema è vero anche per $K = \boldsymbol{Z}$.

Proviamo ora il Teorema 1.

Dimostrazione. Sia $F = [T] + \sum \pm [T_i]$ un generico elemento di $\mathcal{G}_I$ ove $[T]$ è la violazione. Per poter applicare il Lemma dobbiamo solo verificare che $\varphi[T]$ è più grande di ogni altro termine $\varphi[T_i]$ di $\varphi(F) \in \mathcal{G}_J$.

Osserviamo che la variabile $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ non divide la violazione $[T]$. Infatti $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ è la variabile più grande nell'ordine parziale $\trianglelefteq$ e quindi ogni coppia di variabili che la contenga è necessariamente una tabella standard. Ma per definizione $[T]$ è invece un termine quadratico non standard. Per come abbiamo definito φ è chiaro allora che $\varphi[T] = [T]$.

Distinguiamo ora due casi. Se $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ non divide neppure $[T_i]$ allora banalmente $\varphi[T] = [T] > [T_i] = \varphi[T_i]$. Altrimenti $\varphi[T_i]$ ha grado più basso di $[T_i]$ ovvero di $[T] = \varphi[T]$ e quindi ancora $\varphi[T] > \varphi[T_i]$ in quanto l'ordine dato sui termini raffina quello del grado.

Osserviamo che nel corso della dimostrazione si è provato che $\varphi[T] = [T]$ per ogni violazione $[T]$ ovvero che i termini di testa (più grandi nell'ordine) dei polinomi nella base di Gröbner $\mathcal{G}_J$ di J sono ancora le violazioni. Tenuto conto che una base dello spazio B/J è data dai termini non multipli dei termini di testa di una base di Gröbner di J abbiamo allora il seguente

Corollario 1. *Una base lineare dell'algebra quoziente B/J è data dai resti delle tabelle standard di B. Ne segue che se $[T]$ è una tabella qualsiasi di $B \subset A$ e $\sum n_i [T_i]$ è la forma normale rispetto a $\mathcal{G}_I$ allora la forma normale di $[T]$ rispetto a $\mathcal{G}_J$ è $\sum n_i \varphi[T_i]$ ovvero si ottiene semplicemente cancellando nelle tabelle $[T_i]$ la variabile $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$.*

Esempio 3. $n = 2$, $d = 2$. Sia $[T] = \begin{bmatrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix}$ una tabella di B. In A/I la sua forma normale è

$$\begin{bmatrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2 a_4 \\ a_3 a_4 \end{bmatrix}$$

e quindi in B/J sarà $$\begin{bmatrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix}.$$

3 - Dalle tabelle alle bitabelle

Abbiamo visto che i polinomi di raddrizzamento per le tabelle sono omogenei rispetto al contenuto. È chiaro però che una volta cancellata la variabile $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ per i polinomi di $\mathcal{G}_J$ questa proprietà si perde. Attraverso un opportuno cambiamento di notazione per le variabili di B e quindi una nuova nozione di *contenuto* è possibile tuttavia ripristinare l'omogeneità.

Siano allora $\mathcal{L} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\mathcal{P} = \{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$ due alfabeti disgiunti linearmente ordinati. Indichiamo con B' l'anello dei polinomi nelle N variabili algebricamente indipendenti $(a_{i_1} \ldots a_{i_k} | b_{j_1} \ldots b_{j_k})$ con $a_{i_h} \in \mathcal{L}$, $b_{j_h} \in \mathcal{P}$ e $a_{i_1} < \ldots < a_{i_k}$, $b_{j_1} < \ldots < b_{j_k}$ per $k = 1, 2, \ldots, d$. Consideriamo la biiezione $u\colon \mathcal{X} \to \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$

$$u(a_i) = \begin{array}{ll} a_i \in \mathcal{L} & \text{per } 1 \leqslant i \leqslant n \\ b_{i-n} \in \mathcal{P} & \text{per } n+1 \leqslant i \leqslant n+d. \end{array}$$

È dato allora il seguente isomorfismo di algebre $\xi\colon B \to B'$

$$\xi\colon [a_{i_1} \ldots a_{i_d}] \to (a_{i_1} \ldots a_{i_k} | b_{j_1} \ldots b_{j_k})$$

ove $a_{i_1} < \ldots < a_{i_k}$ sono tutte le lettere di $[a_{i_1} \ldots a_{i_d}]$ che appartengono ad $\mathcal{L}$ (identificato con $u^{-1}(\mathcal{L})$) e $b_{j_1} < \ldots < b_{j_k}$ è il complementare in $\mathcal{P}$ della sequenza

$$\begin{aligned} b_{j_{k+1}} &= u(a_{i_{k+1}}) \\ &\vdots \\ b_{j_d} &= u(a_{i_d}). \end{aligned}$$

Sia ora $[T]$ una tabella di B. È chiaro che l'immagine di $[T]$ attraverso ξ si presenterà con una notazione del tipo

$$(U|V) = \left(\begin{array}{c} a_{\underline{i_1}} \\ \vdots \\ a_{\underline{i_r}} \end{array} \middle| \begin{array}{c} b_{\underline{j_1}} \\ \vdots \\ b_{\underline{j_r}} \end{array}\right)$$

a cui daremo il nome di *bitabella* in quanto intenderemo distinte la tabella $U = \begin{pmatrix} a_{\underline{i_1}} \\ \vdots \\ a_{\underline{i_r}} \end{pmatrix}$ a sinistra da quella $V = \begin{pmatrix} b_{\underline{j_1}} \\ \vdots \\ b_{\underline{j_r}} \end{pmatrix}$ a destra. Il *contenuto di una bitabella* $(U|V)$ di B' sarà allora la coppia data dal contenuto di U e da quello di V.

Esempio 4. $n = 3$, $d = 2$. $\xi\begin{bmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c} a_1 a_3 \\ a_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} b_1 b_2 \\ b_2 \end{array}\right)$. Il contenuto della bitabella è il seguente: a sinistra intervengono con molteplicità uno le lettere a_1, a_2, a_3. A destra abbiamo una volta b_1 e due volte b_2.

Poniamo ora $J' = \xi(J)$ e $\mathcal{G}_{J'} = \xi(\mathcal{G}_J)$. Gli elementi di $\mathcal{G}_{J'}$ si chiamano i *polinomi di raddrizzamento per le bitabelle.* Abbiamo la

Proposizione. *I polinomi di raddrizzamento per le bitabelle sono tutti omogenei per contenuto.*

Dimostrazione. Sia $[T] + \sum \pm [T_i]$ un elemento qualsiasi di $\mathcal{G}_I$. Poniamo per semplicità $(U|V) = \xi\varphi[T]$ e $(U_i|V_i) = \xi\varphi[T_i]$. Dobbiamo provare che ogni $(U_i|V_i)$ ha lo stesso contenuto di $(U|V)$.

Abbiamo visto che la variabile $[a_{n+1} \dots a_{n+d}]$ non può comparire nella violazione $[T]$. Se non compare neppure in nessuna $[T_i]$ allora la tesi segue banalmente.

Facciamo invece il caso che

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad [T_i] = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \qquad \text{con } [\beta\delta] = [a_{n+1} \dots a_{n+d}]$$

e β, γ le sequenze di lettere effettivamente scambiate. Da come abbiamo definito i polinomi di raddrizzamento segue che le lettere di γ sono più piccole di quelle di β. Tenuto conto che $a_{n+1}, \dots, a_{n+d}$ sono le ultime d lettere disponibili nell'ordine e che non ci sono ripetizioni nella riga $[\gamma\delta]$ abbiamo allora che le lettere di γ sono più piccole anche di quelle di δ e dunque appartengono tutte ad $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Indichiamo invece con α' e α'' le intersezioni di α con gli alfabeti $\{a_1, \dots, a_n\}$ e $\{a_{n+1}, \dots, a_{n+d}\}$ rispettivamente. A meno d'identificare questa partizione di $\mathcal{X}$ con $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ mediante la biiezione u abbiamo

$$(U|V) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha' & (\alpha''\beta)^* \\ \gamma & \delta^* \end{array} \right) \quad \text{e} \quad (U_i|V_i) = (\alpha'\gamma|\alpha''^*)$$

ove con * abbiamo indicato l'*operazione di passaggio alla combinazione complementare* in $\mathcal{P}$. Poiché non ci sono ripetizioni nelle righe $[\beta\delta]$ e $[\alpha\beta]$ abbiamo che $\delta^* = \beta$ e α'' è contenuto in δ come insieme. Ne segue che davvero $(U|V)$ e $(U_i|V_i)$ hanno lo stesso contenuto.

Riassumendo i risultati trovati per B/J ed estendendoli all'algebra B'/J' mediante l'isomorfismo ξ, dalla precedente Proposizione segue immediatamente

Corollario 2. *Ogni bitabella $(U|V) \in B'/J'$ si può espandere in modo unico in una combinazione lineare a coefficienti interi $(U|V) = \sum n_i(U_i|V_i)$ con $(U_i|V_i)$ standard. Inoltre tutte le bitabelle $(U_i|V_i)$ hanno lo stesso contenuto di $(U|V)$.*

Notiamo che, solo apparentemente, questo risultato differisce da analoghe asserzioni (cfr. per es. [5]) per quanto riguarda la nozione di standardità. Noi infatti abbiamo inteso che una bitabella $(U|V)$ è standard se tale è la tabella rettangolare che gli corrisponde attraverso ξ. Generalmente invece $(U|V)$ si dice standard se sono standard entrambe le tabelle U e V. Come osservato in [4] però queste definizioni coincidono a meno dell'operazione puramente formale di pensare l'alfabeto $\mathcal{P}$ (disgiunto da $\mathcal{L}$) con l'ordinamento dei suoi elementi invertito. Ciò dipende essenzialmente dal fatto che è monotona decrescente la corrispondenza che associa ad ogni combinazione $b_{j_{k+1}} < \ldots < b_{j_d}$ di $\mathcal{P}$ la combinazione $b_{j_1} < \ldots < b_{j_k}$ ad essa complementare.

Esempio 5. $n = 3$, $d = 3$. Consideriamo la tabella standard $\begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 \\ a_2 a_5 a_6 \end{bmatrix}$. Attraverso l'isomorfismo ξ essa corrisponde alla bitabella $\left(\begin{matrix} a_1 a_2 \\ a_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_2 b_3 \\ b_1 \end{matrix}\right)$ che non è standard a destra $(b_2 > b_1)$. Se però invertiamo l'ordine su $\mathcal{P} = \{b_1, b_2, b_3\}$ la bitabella diventa $\left(\begin{matrix} a_1 a_2 \\ a_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right)$ che è standard.

4 - Bitabelle e bideterminanti

Facciamo vedere ora che le bitabelle nel quoziente B'/J' ammettono un'interpretazione concreta come prodotti di determinanti estratti da una matrice d'indeterminate. Questo ci permetterà di collegare e confrontare i nostri risultati con quelli ottenibili direttamente per i bideterminanti standard.

Ricordiamo che $\mathcal{L} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\mathcal{P} = \{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$ sono due alfabeti disgiunti linearmente ordinati. Consideriamo allora C l'anello dei polinomi nelle $n \times d$ variabili indipendenti $(a_i | b_j)$ con $a_i \in \mathcal{L}$ e $b_j \in \mathcal{P}$. Notiamo subito che C è un sottoanello di B'. Abbiamo pure che C è un'immagine omomorfa di B' secondo l'omomorfismo di algebre $\psi'\colon B' \to C$

$$\psi'(a_{i_1} \ldots a_{i_k} | b_{j_1} \ldots b_{j_k}) = \operatorname{sgn}(b) \det \begin{bmatrix} (a_{i_1} | b_{j_1}) & \ldots & (a_{i_1} | b_{j_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{i_k} | b_{j_1}) & \ldots & (a_{i_k} | b_{j_k}) \end{bmatrix}$$

ove $\operatorname{sgn}(b)$ è per definizione il segno della combinazione $b_{j_1} < \ldots < b_{j_k}$ di $\mathcal{P}$. Chiaramente la ψ' è suriettiva in quanto coincide, a meno di un segno, con l'identità sulle variabili $(a_i | b_j)$ che generano C. Generalmente l'anello C viene chiamato la *letterplace algebra* sull'alfabeto $\mathcal{L}$ delle lettere e l'alfabeto $\mathcal{P}$ dei posti. Si dicono invece *bideterminanti* le immagini attraverso ψ' dei termini di B' cioè le immagini delle bitabelle.

Poniamo ora $L' = \ker \psi'$. Abbiamo il fondamentale

Teorema 2. *Risulta* $J' = L'$ *ovvero l'algebra* B'/J' *è isomorfa a* C *mediante l'isomorfismo indotto da* ψ'.

Dimostrazione. Posto $\psi = \psi' \xi$ ed $L = \ker \psi = \xi^{-1}(L')$ dobbiamo provare che $J = L$. Riguardiamo le algebre C e B come gli anelli di coordinate degli spazi affini $\boldsymbol{A}^{nd}$ e $\boldsymbol{A}^N$ ed A come l'anello delle coordinate omogenee di $\boldsymbol{P}^N$. Il morfismo di deomogeneizzazione $\varphi\colon A \to B$ corrisponde allora all'immersione canonica $j\colon \boldsymbol{A}^N \to \boldsymbol{P}^N$ che ha per immagine $\boldsymbol{P}^N - H$ ove H è l'iperpiano di equazione $[a_{n+1} \dots a_{n+d}] = 0$. Indichiamo con $X \subset \boldsymbol{A}^N$ la varietà isomorfa, attraverso j, alla componente affine $G_{d-1,\,n+d-1} - H$ della grassmanniana. È ben noto che I è l'ideale omogeneo associato alla varietà proiettiva $G_{d-1,\,n+d-1}$ cioè l'ideale generato dai polinomi omogenei di A che valgono zero su $G_{d-1,\,n+d-1}$. Abbiamo allora che $J = \varphi(I)$ è l'ideale dei polinomi di B che si annullano su X. Indichiamo ora con $\psi^*\colon \boldsymbol{A}^{nd} \to \boldsymbol{A}^N$ l'immersione chiusa associata all'epimorfismo $\psi\colon B \to C$. Se $Y \subset \boldsymbol{A}^N$ è la varietà immagine di ψ^* (quindi Y è isomorfa ad $\boldsymbol{A}^{nd}$) abbiamo che L è l'ideale associato ad Y. Per provare che $J = L$ sarà sufficiente quindi verificare l'equazione fra varietà $X = Y$.

Indicata con η l'immersione composta $\eta = j\psi^*\colon \boldsymbol{A}^{nd} \to \boldsymbol{P}^N$ dobbiamo provare che l'immagine di η (isomorfa a $\boldsymbol{A}^{nd}$) coincide con $G_{d-1,\,n+d-1} - H$. Ciò segue facilmente dalle proprietà dell'algebra esterna. Del morfismo η è possibile dare infatti la seguente rappresentazione intrinseca. Sia V e W due spazi vettoriali di dimensioni n e d rispettivamente e, diciamo, $W = \langle e_{b_1}, \dots, e_{b_d} \rangle$. Posto $U = V \oplus W$, identifichiamo $\boldsymbol{A}^{nd}$ con lo spazio V^d e $\boldsymbol{P}^N$ con

$$\boldsymbol{P} \wedge^d(U) = \{\text{sottospazi monodimensionali di } \wedge^d(U)\}.$$

Non è difficile verificare che η coincide allora con la mappa $V^d \to \boldsymbol{P} \wedge^d(U)$ definita da

$$(v_1, \dots, v_d) \to \langle v_1 + e_{b_1} \wedge \dots \wedge v_d + e_{b_d} \rangle$$

ove $\langle v_1 + e_{b_1} \wedge \dots \wedge v_d + e_{b_d} \rangle$ è il sottospazio generato dal vettore $v_1 + e_{b_1} \wedge \dots \wedge v_d + e_{b_d} \neq 0$.

Ricordiamo che la varietà di Grassmann s'interpreta in $\boldsymbol{P} \wedge^d(U)$ come l'insieme dei sottospazi monodimensionali generati dai tensori antisimmetrici decomponibili non nulli, cioè dagli elementi di $\wedge^d(U)$ della forma $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$ con $u_i \in U$ linearmente indipendenti. Notiamo inoltre che l'iperpiano H corrisponde (una volta fissata una base per $\wedge^d(U)$) ad un sommando diretto di

$\bigwedge^d(W) = \langle e_{b_1} \wedge \ldots \wedge e_{b_d} \rangle$ in $\bigwedge^d(U)$. Poniamo per brevità $G = G_{d-1,\, n+d-1}$ e indichiamo con $(u_1 \wedge \ldots \wedge u_d)_W$ la componente di $u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$ in $\bigwedge^d(W)$. In $\boldsymbol{P} \bigwedge^d(U)$ abbiamo allora che

$$G - H = \{\langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_d \rangle \mid u_i \in U \text{ e } (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d)_W \neq 0\}.$$

Proviamo finalmente la tesi cioè che tutti e soli gli elementi di questo insieme sono del tipo $\langle v_1 + e_{b_1} \wedge \ldots \wedge v_d + e_{b_d} \rangle$ con $v_i \in V$.

Chiaramente ogni $\langle v_1 + e_{b_1} \wedge \ldots \wedge v_d + e_{b_d} \rangle \in G - H$ (la componente di $v_1 + e_{b_1} \wedge \ldots \wedge v_d + e_{b_d}$ in $\bigwedge^d(W)$ è esattamente $e_{b_1} \wedge \ldots \wedge e_{b_d}$). Sia ora $\langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_d \rangle$ un generico elemento di $G - H$. Abbiamo quindi che la componente di $u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$ in $\bigwedge^d(W)$ è diversa da zero e ciò equivale alla condizione $U = V \oplus \langle u_1, \ldots, u_d \rangle$. Consideriamo la proiezione canonica $p\colon U \to W$ associata alla somma diretta $U = V \oplus W$. È chiaro allora che p induce per restrizione un isomorfismo $p\colon \langle u_1, \ldots, u_d \rangle \to W$. Se $v_i + e_{b_i}$ è la controimmagine di $e_{b_i} \in W$ abbiamo dunque $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle = \langle v_1 + e_{b_1}, \ldots, v_d + e_{b_d} \rangle$ ovvero $\langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_d \rangle = \langle v_1 + e_{b_1} \wedge \ldots \wedge v_d + e_{b_d} \rangle$.

Notiamo che questo non è il solo modo di dimostrare che $J' = L'$. Infatti un sistema naturale di generatori per L' è dato dalla famiglia

$$(a_{i_1} \ldots a_{i_k} \mid b_{j_1} \ldots b_{j_k}) - \operatorname{sgn}(b) \det \begin{bmatrix} (a_{i_1} \mid b_{j_1}) \ldots (a_{i_1} \mid b_{j_k}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a_{i_k} \mid b_{j_1}) \ldots (a_{i_k} \mid b_{j_k}) \end{bmatrix}$$

o, equivalentemente, dagli sviluppi di Laplace di questi determinanti. Per l'ideale J' abbiamo invece la base di Gröbner $\mathcal{G}_{J'}$. Provare $J' = L'$ significa allora verificare che ogni polinomio di raddrizzamento si può ottenere dagli sviluppi di Laplace e viceversa. In essenza questo è il punto di vista che si può trovare per es. in [5]: una base di Gröbner per l'ideale L' è generata a partire dal sistema degli sviluppi di Laplace.

Lavorare sulle coordinate richiede però una manipolazione delle formule combinatorie che costituiscono i sistemi di generatori di questi ideali determinantali. L'approccio seguito in questa nota ed ispirato a [4], cioè quello di lavorare sulle varietà, ha il vantaggio di sostituire tutto questo con ragionamenti elementari nel dominio dell'algebra esterna ovvero basati sulla sola antisimmetria.

Notiamo inoltre che le formule di raddrizzamento per le bitabelle presentate in [5] sono diverse in generale dalle $\mathcal{G}_{J'}$ ottenute per deomogeneizzazione delle formule per le tabelle singole e ciò conformemente al fatto che la base di Gröbner di un ideale non è unica. Di fatto le prime formule, distinguendo il raddrizzamento a sinistra da quello a destra, convergono in generale più lentamente delle $\mathcal{G}_{J'}$ all'espansione lineare in bitabelle standard.

Esempio 6. $n=4$, $d=4$. Consideriamo la bitabella non standard $\left(\begin{smallmatrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{smallmatrix}\right)$ che corrisponde attraverso ξ alla tabella $\left[\begin{smallmatrix} a_1 a_4 a_5 a_6 \\ a_2 a_3 a_7 a_8 \end{smallmatrix}\right]$, non appena s'inverta l'ordinamento sugli elementi di $\mathcal{P}=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Applicando la formula di raddrizzamento per le tabelle si ha

$$\begin{bmatrix} a_1 a_4 a_5 a_6 \\ a_2 a_3 a_7 a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_5 a_6 \\ a_2 a_4 a_7 a_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_4 a_6 \\ a_2 a_5 a_7 a_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_3 a_4 a_5 \\ a_2 a_6 a_7 a_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_5 a_6 \\ a_3 a_4 a_7 a_8 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 a_6 \\ a_3 a_5 a_7 a_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 a_5 \\ a_3 a_6 a_7 a_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 a_6 \\ a_4 a_5 a_7 a_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 a_5 \\ a_4 a_6 a_7 a_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a_5 a_6 a_7 a_8 \end{bmatrix}.$$

Cancellando la variabile $[a_5 a_6 a_7 a_8]$ e applicando l'identificazione ξ abbiamo allora

$$\left(\begin{matrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} a_1 a_3 a_4 \\ a_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_4 \\ b_3 \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} a_1 a_3 a_4 \\ a_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right)$$

$$-\left(\begin{matrix} a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} a_1 a_2 a_4 \\ a_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_4 \\ b_3 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} a_1 a_2 a_4 \\ a_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_4 \\ b_3 \end{matrix}\right)$$

$$+\left(\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right) - (a_1 a_2 a_3 a_4 \,|\, b_1 b_2 b_3 b_4)\,.$$

Osserviamo che questa è già l'espansione di bitabelle standard. Se applichiamo alla bitabella non standard la formula di raddrizzamento a sinistra che si trova in [5] abbiamo invece

$$\left(\begin{matrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} a_2 a_3 a_4 \\ a_1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right)$$

$$-\left(\begin{matrix} a_2 a_3 a_4 \\ a_1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 b_2 b_4 \\ b_3 \end{matrix}\right) - (a_1 a_2 a_3 a_4 \,|\, b_1 b_2 b_3 b_4)\,.$$

Osserviamo che dal punto di vista dell'applicazione alla teoria delle rappresentazioni è fondamentale la proprietà di allungamento delle forme attraverso il processo di raddrizzamento. Questa proprietà, che segue immediatamente dalle formule in [5], si ottiene pure dalle $\mathcal{G}_{J'}$ e ciò è spiegato dettagliatamente in [4].

Al fine d'illustrare questo fenomeno riconsideriamo l'esempio precedente. La forma della bitabella $\left(\begin{matrix} a_1 a_4 \\ a_2 a_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1 b_2 \\ b_3 b_4 \end{matrix}\right)$ cioè la sequenza delle lunghezze delle sue righe sinistre o destre è (2, 2). Mediante l'applicazione delle $\mathcal{G}_{J'}$ la bitabella si raddrizza con bitabelle di forma maggiore o uguale nell'ordine lessicografico. Precisamente abbiamo le forme (2, 2), (3, 1) e (4).

Notiamo da ultimo che, dall'isomorfismo di spazi vettoriali $C \approx B/J$ si ottiene che sono biiettivi l'insieme dei termini nelle variabili $(a_i \mid b_j)$ con $a_i \in \mathcal{L}$ e $b_j \in \mathcal{P}$ e l'insieme delle tabelle standard di rango d su $\mathcal{X}$ che non contengono la riga $[a_{n+1} \ldots a_{n+d}]$. Chiaramente questo fatto può anche essere riguardato come una conseguenza della corrispondenza di Schensted-Knuth, una volta applicata l'identificazione ξ, la cui idea può esser fatta risalire fino a MacMahon (cfr. [8], p. 64).

Bibliografia

[1] M. Barnabei, A. Brini and G. C. Rota, *On the exterior calculus of invariant theory*, J. Algebra **96** (1985), 120-160.

[2] B. Buchberger, *An algorithm for finding a basis for the residues class ring of zero-dimensional polynomial ideal*, Ph.D. Thesis, Math. Inst. Univ. Innsbruck, Austria 1965; Aequationes Math. 4 (1970), 374-383.

[3] B. Buchberger, *Gröbner bases. An algorithmic method in polynomial ideal theory*, in Multidimensional System Theory, ed. N. K. Bose, Reidel, Dordrecht, Holland 1985.

[4] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi, *Young diagrams and determinantal varieties*, Inventiones Math. **56** (1980), 129-165.

[5] J. Desarmenien, J. Kung and G. C. Rota, *Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics*, Adv. in Math. **27** (1978), 63-92.

[6] P. Doubilet, G. C. Rota and J. Stein, *On the foundations of combinatorial theory*, IX, Combinatorial methods in invariant theory, Stud. Appl. Math. **53** (1974), 185-216.

[7] W. V. D. Hodge, *Some enumerative results in the theory of forms*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **39** (1943), 22-30.

[8] D. Knuth, *The art of computer programming*, **3**, Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Mass., USA 1973.

[9] C. Procesi, *Aspetti geometrici e combinatori della teoria delle rappresentazioni del gruppo unitario*, ed. E. Rogora, Quaderni UMI **36**, Pitagora, Bologna 1991.

[10] B. Sturmfels and N. White, *Gröbner bases and invariant theory*, Adv. in Math. **76** (1989), 245-259.

Summary

The aim of this paper is to prove that the straightening laws for the letterplace algebra's bideterminants form a Gröbner basis for the ideal generated by Laplace expansions. Since the bideterminants can be interpretated as products of any order minors (subdeterminants) of a matrix of indeterminates, these results extends those obtained by Sturmfels and White who proved that Plucker's identities form a Gröbner basis for the ideal of identities verified only by maximal order minors. The basic idea of our work is the idea, due to De Concini, Eisenbud and Procesi, that the general case of the minors of any order can be derived from the case of the Plucker's coordinates through a dehomogenizing morphism. In fact, it's well kwown that a Gröbner basis dehomogenizes still in a Gröbner basis provided that certain conditions on term ordering are satisfied.

* * *