Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1 (1992), 115-129

ROBERTA NIBBI (*)

Un problema di esistenza e unicità per un fluido viscoso con funzione di memoria non sommabile (**)

1 - Introduzione

I fluidi viscosi con memoria sono descritti, nell'ipotesi di incomprimibilità, dall'equazione costitutiva

$$T(t) = -p(t)I + 2\int_0^\infty \mu(s)\,D(t-s)\,\mathrm{d}s \tag{1.1}$$

dove T, D rappresentano rispettivamente il tensore degli sforzi di Cauchy ed il tensore velocità di deformazione, mentre lo scalare p individua il valore della pressione.

Nelle usuali trattazioni la funzione di rilassamento μ è supposta appartenere a $L^1(0, \infty)$; questa condizione consente di descrivere la proprietà di memoria evanescente che il fluido possiede e di affermare che le storie costanti del gradiente di velocità, cioè quelle per cui grad $v(x, t-s) = V(x)$, presentano un valore finito per il tensore degli sforzi corrispondente.

In questo lavoro prenderemo in considerazione un fluido viscoso descritto sempre da un'equazione del tipo (1.1), dove però supporremo μ appartenente a $L^2(0, \infty)$.

Questa condizione è ancora in grado di rappresentare gli effetti di una memoria evanescente, la quale, però, in questo caso risulterà meno labile del caso in cui μ appartiene a $L^1(0, \infty)$.

Infatti, essendo $\mu \in L^2(0, \infty)$, gli effetti della storia remota hanno sul tensore degli sforzi un'influenza maggiore del caso in cui μ viene scelto appartenente a

(*) Dip. di Matematica, Univ. Ferrara, via Machiavelli 35, 44100 Ferrara, Italia.
(**) Ricevuto il 16.12.1991. Classificazione AMS 76 A 10.

$L^1(0, \infty)$. Inoltre, poiché $\mu \in L^2(0, \infty)$, non sono in generale possibili storie costanti per il tensore D, in quanto in tal caso avremo in corrispondenza un valore infinito del tensore degli sforzi.

Quest'ultima considerazione consente di paragonare questo nostro problema al caso dei nuclei non integrabili studiati in viscoelasticità (cfr. [7], [8]); infatti in entrambi i casi si presentano, in corrispondenza di particolari storie limitate, valori infiniti per il tensore degli sforzi.

In questo lavoro stabiliremo, prima per il problema dinamico di Dirichlet e quindi per il relativo problema ai valori iniziali ed al contorno, teoremi di esistenza, unicità e comportamento asintotico.

Questi risultati vengono provati sotto ipotesi molto deboli sulla natura della funzione μ. Infatti si imporrà, oltre alla condizione $\mu \in L^2(0, \infty)$, soltanto quelle derivanti dal Secondo Principio della Termodinamica, seguendo con ciò il punto di vista contenuto nei lavori [3], [5].

2 - Formulazione del problema del moto

Sia $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ un dominio sufficientemente regolare.

In tale dominio studiamo il moto di un fluido viscoelastico incomprimibile, descritto da un'equazione costitutiva (1.1), nella ipotesi che il nucleo di memoria μ verifichi le condizioni:

(a) μ è continua in $(0, \infty)$ e a valori in $\boldsymbol{R}$ e inoltre $\mu \notin L^1(0, \infty)$;

(b) $\mu \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$, $\int\limits_a^\infty \mu^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$ per $a \in \boldsymbol{R}^+$;

(c) la funzione

$$f(w) = \int\limits_a^\infty \mu(s) \cos ws\,\mathrm{d}s$$

è continua in w su $(0, \infty)$.

Le equazioni del moto, nella loro approssimazione lineare e con condizioni al contorno di Dirichlet, portano al seguente problema differenziale (cfr. [7]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div}\left[-p(x, t)\,I + \int\limits_0^\infty \mu(s) \operatorname{grad} v(x, t-s)\,\mathrm{d}s\right] + f(x, t) \\ &\operatorname{div} v(x, t) = 0 \qquad v(x, t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove v, p rappresentano rispettivamente la velocità e la pressione di tale fluido mentre la densità di massa è supposta uguale all'unità. Inoltre con f rappresentiamo le forze di volume esterne al corpo.

Questo problema verrà studiato nel dominio $\Omega \times (-\infty, \infty)$, per cui non vengono assegnate condizioni iniziali.

È noto che la Seconda Legge della Termodinamica (per processi isotermi) comporta che il lavoro meccanico fatto su ogni ciclo chiuso è non negativo, cioè

$$W = \oint T \cdot D \, \mathrm{d}t \geq 0, \tag{2.2}$$

ed è nullo solo per processi reversibili.

Per ottenere le restrizioni che la disuguaglianza (2.2) pone alla funzione di memoria μ è necessario, a causa della particolare natura della funzione μ, operare la scomposizione

$$\mu_1(s) = \begin{matrix} \mu(s) & s \in (0, a) \\ 0 & s \in (a, \infty) \end{matrix} \qquad a \in \boldsymbol{R}^+, \tag{2.3}$$

$$\mu_2(s) = \begin{matrix} 0 & s \in (0, a) \\ \mu(s) & s \in (a, \infty) \end{matrix} \qquad a \in \boldsymbol{R}^+. \tag{2.4}$$

Seguendo il metodo, già sfruttato in [3], si dimostra che nel nostro caso la condizione (2.2) comporta le seguenti restrizioni (cfr. Appendice)

$$\widehat{\mu}_{1c}(w) + \widehat{\mu}_{2c}(w) = \int_0^\infty \mu_1(s) \cos ws \, \mathrm{d}s + \int_0^\infty \mu_2(s) \cos ws \, \mathrm{d}s > 0 \qquad w \neq 0. \tag{2.5}$$

Osservazione. La condizione (2.5) risulta ben definita in virtù delle ipotesi (a), (b) sulla funzione μ.

Infatti con $\widehat{\mu}_{1c}$ indichiamo la trasformata coseno di Fourier in L^1, mentre con $\widehat{\mu}_{2c}$ indichiamo la trasformata coseno di Fourier in L^2.

3 - Esistenza ed unicità

Sotto le ipotesi (a), (b), (c) e (2.5) dimostreremo che esiste ed è unica la soluzione al problema (2.1), quando si scelga opportunamente lo spazio delle forze esterne e delle soluzioni.

Teorema 1. *Nell'ipotesi di una funzione di rilassamento μ che verifichi le condizioni* (a), (b), (c) *e la diseguaglianza* (2.5), *allora per ogni forza*

$f \in L^2(-\infty, \infty; L^2(\Omega))$ *il problema* (2.1) *ammette una sola soluzione* $v \in L^2(-\infty, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Per lo studio di tale problema operiamo mediante il metodo della trasformata di Fourier.

Pertanto, indicata con

$$\hat{\varphi}(x, w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} \varphi(x, t)\, dt$$

la trasformata di Fourier della funzione φ, il problema (2.1) si scrive nella seguente forma

$$\begin{aligned} &iw\hat{v}(x,w) = -\operatorname{grad}\hat{p}(x,w) + \operatorname{div}[(\hat{\mu}_1(w)+\hat{\mu}_2(w))\operatorname{grad}\hat{v}(x,w)] + \hat{f}(x,w) \qquad w \neq 0 \\ &\operatorname{div}\hat{v}(x,w) = 0 \qquad \hat{v}(x,w)|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove $\hat{\mu}_1(w)$ e $\hat{\mu}_2(w)$ rappresentano rispettivamente la trasformata di Fourier in L^1 di μ_1 e la trasformata di Fourier in L^2 di μ_2.

Per ogni fissato $w \neq 0$, consideriamo la seguente formulazione debole del problema (3.1).

Definizione 1. Una funzione $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ è detta *soluzione debole* di (3.1) se

$$\begin{aligned} \int_\Omega [(\hat{\mu}_1(w) + \hat{\mu}_2(w)) \operatorname{grad} \hat{v}(x, w) \cdot \operatorname{grad} u^*(x) + iw\hat{v}(x, w) \cdot u^*(x)]\, dx \\ = \int_\Omega \hat{f}(x, w) \cdot u^*(x)\, dx \end{aligned} \tag{3.2}$$

per ogni vettore $u \in H_0^1(\Omega)$, dove con u^* si intende il coniugato di u.

Seguendo Teman [9], si può provare che se $\hat{v}$ è una soluzione debole, allora esiste un campo scalare $\hat{p} \in L^2(\Omega)$, tale che sia verificato il sistema

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\hat{v}(x,w) = 0 \\ &iw\hat{v}(x,w) = -\operatorname{grad}\hat{p}(x,w) + \operatorname{div}[(\hat{\mu}_1(w)+\hat{\mu}_2(w))\operatorname{grad}\hat{v}(x,w)] + \hat{f}(x,w) \qquad w \neq 0 \end{aligned}$$

nel senso delle distribuzioni, mentre $\hat{v}(x, w)|_{\partial\Omega} = 0$.

Tale risultato ci consente di pervenire al seguente

Lemma 1. *Nelle ipotesi del Teorema* 1 *il problema* (3.1) *ammette per ogni* $w \neq 0$ *una ed una sola soluzione debole.*

Dimostrazione. Consideriamo, per un fissato $w \neq 0$, la forma bilineare

$$a(v, u; w) = \int_\Omega [(\widehat{\mu}_1(w) + \widehat{\mu}_2(w)) \operatorname{grad} v(x) \cdot \operatorname{grad} u^*(x) + iwv(x) \cdot u^*(x)]\, dx \tag{3.3}$$

dove

$$|a(v, v; w)| \geqslant \operatorname{Re}(a(v, v; w))$$

e

$$\operatorname{Re}(a(v, v; w)) = \int_\Omega [\int_0^\infty (\mu_1(s) + \mu_2(s)) \cos ws\, ds] \operatorname{grad} v(x) \cdot \operatorname{grad} v^*(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega [\int_0^\infty \mu_1(s) \cos ws\, ds + \int_0^\infty \mu_2(s) \cos ws\, ds] |\operatorname{grad} v|^2\, dx .$$

Per le restrizioni termodinamiche (2.5) abbiamo

$$|a(v, v; w)| \geqslant (\widehat{\mu}_{1c}(w) + \widehat{\mu}_{2c}(w)) \|v\|^2_{H_0^1} .$$

Pertanto per teoremi generali sui sistemi ellittici [6], [9], [10] la coercività della forma bilineare (3.3) assicura l'esistenza e unicità di una soluzione debole di (3.2) per ogni $\widehat{f} \in H^{-1}(\Omega)$.

Consideriamo ora il problema relativo alla funzione di Green $H(x, x'; w)$, cioè

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [(\widehat{\mu}_1(w) + \widehat{\mu}_2(w)) \operatorname{grad}_{x'} H(x,x'; w) \operatorname{grad}_{x'} u^*(x') + iwH(x,x'; w)\, u^*(x')]\, dx' \\ &\qquad = \int_\Omega \delta(x - x')\, u^*(x')\, dx' \end{aligned} \tag{3.4}$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, dove δ denota la funzione di Dirac.

In termini di H la soluzione del problema (3.1) può essere scritta come

$$\widehat{v}(x, w) = \int_\Omega H(x, x'; w) \widehat{f}(x', w)\, dx' . \tag{3.5}$$

Per le ipotesi (b), (c) la funzione $\widehat{\mu}(w) = \widehat{\mu}_1(w) + \widehat{\mu}_2(w)$ risulta continua in w su $(0, \infty)$.

Pertanto, per noti teoremi [1] sulla continuità dei coefficienti da un parametro, la soluzione $H(x, x'; w)$ di (3.4) risulta continua in w rispetto alla topologia di $H_0^1(\Omega)$.

Inoltre, poiché

$$\lim_{w \to \infty} \frac{\widehat{\mu}_{1c}(w) + \widehat{\mu}_{2c}(w)}{w} = 0$$

esiste in base alla relazione (3.4) il limite

$$\lim_{w \to \infty} H(x, x'; w) = H(x, x'; \infty)$$

ed è tale che $H(x, x'; \infty) \in H_0^1$.

Consideriamo ora il comportamento della soluzione nell'intorno del punto $w = 0$

$$\lim_{w \to 0} \int_\Omega [(\hat{\mu}_1(w) + \hat{\mu}_2(w)) \operatorname{grad}_{x'} H(x,x'; w) \operatorname{grad}_{x'} u^*(x') + iwH(x,x'; w)\, u^*(x')]\, dx'$$

$$= \int_\Omega \delta(x - x')\, u^*(x')\, dx'.$$

Questa relazione è equivalente alla seguente

$$\lim_{w \to 0} \int_\Omega [\operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; w) \operatorname{grad}_{x'} u^*(x') + i \frac{w}{\hat{\mu}_1(w) + \hat{\mu}_2(w)} H(x, x'; w)\, u^*(x')]\, dx'$$

$$= \lim_{w \to 0} \frac{1}{\hat{\mu}_1(w) + \hat{\mu}_2(w)} \int_\Omega \delta(x - x')\, u^*(x')\, dx'$$

dalla quale si ottiene che

$$\lim_{w \to 0} \int_\Omega \operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; w) \operatorname{grad}_{x'} u^*(x')\, dx' = 0;$$

per cui, considerando la condizione al contorno $H(x, x'; w)|_{\partial\Omega} = 0$, abbiamo

$$H(x, x'; 0) = \lim_{w \to 0} H(x, x'; w) = 0.$$

Per le proprietà della funzione di Green $H(x, x'; w)$ risulta necessariamente

$$\hat{v}(x, w) = \int_\Omega H(x, x'; w) \hat{f}(x', w)\, dx'. \tag{3.6}$$

Inoltre, essendo la funzione $H(x, x'; \cdot)$ continua in w in $(0, \infty)$ e limitata agli estremi, essa sarà limitata.

Pertanto da (3.6) abbiamo che $\hat{v}(x, \cdot)$ risulta appartenere a $L^2(-\infty, \infty)$ al pari di $\hat{f}$.

Da ciò segue che

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} \hat{v}(x, w)\, dw \tag{3.7}$$

appartiene a $L^2(-\infty, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Abbiamo così dimostrato che esiste la soluzione del problema (2.1). L'unicità segue immediatamente osservando che per $f = 0$ il Lemma 1 assicura che $\widehat{v} = 0$ per ogni $w \in \boldsymbol{R}$.

4 - Problema ai valori iniziali ed al contorno

Nelle ipotesi del numero 2 di incomprimibilità del fluido e sulla natura dell'equazione costitutiva (1.1), consideriamo ora il problema ai valori iniziali e con condizioni al contorno di Dirichlet.

Queste equazioni, nella loro approssimazione lineare, portano al seguente problema differenziale:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div}\left[-p(x, t) I + \int_0^\infty (\mu_1(s) + \mu_2(s)) \operatorname{grad} v(x, t-s)\, ds\right] + f(x, t)$$

$$(4.1) \qquad \operatorname{div} v(x, t) = 0 \qquad x \in \Omega \quad t > 0$$

$$v(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0 \qquad v(x, \tau) = v_0(x, \tau) \quad x \in \Omega \quad \tau \leqslant 0$$

dove v_0 rappresenta la storia iniziale del vettore velocità.

Analogamente a quanto fatto per nuclei regolari [5], proveremo un teorema di unicità, esistenza e stabilità per il problema (4.1).

In questo caso è infatti possibile pervenire al seguente

Teorema 2. *Nell'ipotesi di una funzione di rilassamento μ che verifichi le condizioni* (a), (b), (c) *e la diseguaglianza* (2.5), *allora per ogni* $f \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$ *e, se* $v_0(\cdot, \cdot s) \in H_0^1$ *per ogni* $s \leqslant 0$, *il problema* (4.1) *ammette una ed una sola soluzione* v *appartenente a* $L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Per la dimostrazione del Teorema 2 utilizzeremo il metodo della trasformata di Laplace, che per una generica funzione $\varphi(x, s)$ sufficientemente regolare, definiamo

$$\widetilde{\varphi}(x, z) = \int_0^\infty e^{-zs} \varphi(x, s)\, ds \qquad z \in \boldsymbol{C}.$$

Pertanto, operando mediante la traformata di Laplace il problema (4.1) si trasforma nel seguente

$$(4.2)\qquad \begin{gathered} z\widetilde{v}(x,z)=-\operatorname{grad}\widetilde{p}(x,z)+\operatorname{div}[(\widetilde{\mu}_1(z)+\widetilde{\mu}_2(z))\operatorname{grad}\widetilde{v}(x,z)]+\widetilde{F}(x,z) \qquad z\in \boldsymbol{C}\setminus 0 \\ \operatorname{div}\widetilde{v}(x,z)=0 \qquad \widetilde{v}(x,z)\,|_{\partial\Omega}=0 \end{gathered}$$

dove

$$\widetilde{F}(x,z)=\widetilde{f}(x,z)+v_0(x,0)+\int_0^\infty e^{-zs}\operatorname{div}\Big[\int_t^\infty(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))\operatorname{grad}v_0(x,\tau-s)\,d\tau\Big]\,ds\,.$$

Osservazione. Per le ipotesi su v_0 e f, $\widetilde{F}$ risulta ben definita per ogni numero complesso $z\in \boldsymbol{C}^+$, dove

$$\boldsymbol{C}^+=\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,\operatorname{Re} z>0\}.$$

Ragionando come nel caso del problema (3.1) si dimostra che la forma bilineare

$$(4.3)\qquad b(v,u;z)=\int_\Omega[(\widetilde{\mu}_1(z)+\widetilde{\mu}_2(z))\operatorname{grad}v(x)\cdot\operatorname{grad}u^*(x)+zv(x)\cdot u^*(x)]\,dx$$

è coerciva per $z\neq 0$.

Infatti, fissato $z\in \boldsymbol{C}^+\setminus 0$, $z=\sigma+iw$ con $\sigma>0$,

$$(4.4)\qquad |b(v,v;z)|\geqslant \operatorname{Re}(b(v,v;z))$$

$$=\int_\Omega\Big[\Big(\int_0^\infty e^{-\sigma s}(\mu_1(s)+\mu_2(s))\cos ws\,ds\Big)\operatorname{grad}v(x)\cdot\operatorname{grad}v^*(x)+\sigma v(x)\cdot v^*(x)\Big]\,dx$$

$$=\int_\Omega[(\widetilde{\mu}_{1c}(z)+\widetilde{\mu}_{2c}(z))\operatorname{grad}v(x)\cdot\operatorname{grad}v^*(x)+\sigma v(x)\cdot v^*(x)]\,dx$$

$$=(\widetilde{\mu}_{1c}(z)+\widetilde{\mu}_{2c}(z))\int_\Omega|\operatorname{grad}v(x)|^2\,dx+\sigma\int_\Omega|v(x)|^2\,dx$$

dove $\widetilde{\mu}_c(w)=(\widetilde{\mu}_{1c}(w)+\widetilde{\mu}_{2c}(w))$ rappresenta la trasformata coseno di Laplace della funzione di memoria μ.

Se $\sigma=0$, allora per la (4.4)

$$|b(v,v;z)|\geqslant(\widehat{\mu}_{1c}(w)+\widehat{\mu}_{2c}(w))\|v\|^2_{H^1_0}$$

e per la diseguaglianza (2.5) $|b(v,v;z)|>0$; quando $\sigma>0$ si può provare (cfr.

[5]) che da (2.5) segue che $\widetilde{\mu}_c > 0$, quindi

$$|b(v, v; z)| \geqslant C(\Omega)\|v\|^2_{H_0^1}$$

dove $C(\Omega) > 0$. Resta così provato che la forma (4.3) è coerciva.

Pertanto, in base all'ipotesi di coercività, risulta che il problema (4.2) ammette per ogni $z \neq 0$ un'unica soluzione $\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$.

È necessario ora, per l'invertibilità della trasformata $\widetilde{v}$, studiare il comportamento di $\widetilde{v}(\cdot, z)$ al variare di z.

Consideriamo quindi la funzione di Green $H(x, x'; z)$, definita per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ come soluzione del problema

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(\widetilde{\mu}_1(z) + \widetilde{\mu}_2(z)) \operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; z) \operatorname{grad}_{x'} u(x') + zH(x, x'; z)\, u(x')]\, dx' \\ = \int_\Omega \delta(x - x')\, u(x')\, dx'\end{aligned} \tag{4.5}$$

dove δ denota la funzione di Dirac.

Per le proprietà della funzione di Green H la soluzione del problema (4.2) può essere scritta

$$\widetilde{v}(x, z) = \int_\Omega H(x, x'; z)\, \widetilde{F}(x', z)\, dx'. \tag{4.6}$$

Per le ipotesi (b), (c) la funzione $\widetilde{\mu}(z) = \widetilde{\mu}_1(z) + \widetilde{\mu}_2(z)$ risulta continua in z su $\boldsymbol{C}^+ \setminus \{0\}$.

Consideriamo ora il comportamento di H in un intorno del punto $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} \int_\Omega [(\widetilde{\mu}_1(z) + \widetilde{\mu}_2(z)) \operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; z) \operatorname{grad}_{x'} u(x') + zH(x, x'; z)\, u(x')]\, dx'$$

$$= \int_\Omega \delta(x - x')\, u(x')\, dx'.$$

Questa relazione è equivalente alla seguente

$$\lim_{z \to 0} \int_\Omega [\operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; z) \operatorname{grad}_{x'} u(x') + \frac{z}{\widetilde{\mu}_1(z) + \widetilde{\mu}_2(z)} H(x, x'; z)\, u(x')]\, dx'$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\widetilde{\mu}_1(z) + \widetilde{\mu}_2(z)} \int_\Omega \delta(x - x')\, u(x')\, dx'$$

dalla quale si ottiene

$$\lim_{z\to 0}\int_{\Omega}\operatorname{grad}_{x'} H(x, x'; z)\ \operatorname{grad}_{x'} u(x')\,dx' = 0$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Tenendo conto della condizione al contorno $H(x, x'; z)|_{\partial\Omega} = 0$, abbiamo

$$H(x, x'; 0) = \lim_{z\to 0} H(x, x'; z) = 0\,.$$

Inoltre, poiché $\dfrac{\widetilde{\mu}_1(z)+\widetilde{\mu}_2(z)}{z} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, esiste

$$H(x, x'; \infty) = \lim_{z\to\infty} H(x, x'; z) = 0$$

ed appartiene a $H_0^1(\Omega)$, perché soluzione del problema (4.5) per $z\to\infty$. In particolare da (4.5) otteniamo la condizione

$$\lim_{z\to\infty} z^{1-\alpha} H(x, x'; z) = 0 \qquad \alpha > 0\,. \tag{4.7}$$

Consideriamo ora il tensore del terzo ordine $\operatorname{grad}_x H$, tale che

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}[(\widetilde{\mu}_1(z)+\widetilde{\mu}_2(z))\operatorname{grad}_{x'}(\operatorname{grad}_x H(x, x'; z))\operatorname{grad}_{x'} u(x')\,dx'\\&+\int_{\Omega} z(\operatorname{grad}_x H(x, x'; z))\,u(x')\,dx' = \int_{\Omega}\partial_x(x-x')\widetilde{F}(x', z)\,dx'\end{aligned} \tag{4.8}$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

In termini di $\operatorname{grad}_x H$, abbiamo

$$\operatorname{grad}_x \widetilde{v}(x, z) = \int_{\Omega}\operatorname{grad}_x H(x, x'; z)\,\widetilde{F}(x', z)\,dx'\,. \tag{4.9}$$

Otteniamo con considerazioni analoghe alle precedenti il seguente

Lemma 2. *Nelle ipotesi del Teorema* 2, *esiste una soluzione* $\operatorname{grad}_x H$ *al problema* (4.8) *tale che*

(i) $\operatorname{grad}_x H(x, \cdot\,; z) \in L^2(\Omega)$ *per ogni* $z \in \boldsymbol{C}^+$ (cfr. [**10**])
(ii) $\operatorname{grad}_x H(x, x'; \cdot)$ *è continuo in* $\boldsymbol{C}^+$
(iii) *per* $\alpha > 0$, $z \in \boldsymbol{C}^+$

$$\lim_{z\to\infty} z^{1-\alpha}\operatorname{grad}_x H(x, x'; z) = 0$$

nel senso delle distribuzioni.

Siamo ora in grado di stabilire l'esistenza, l'unicità e la stabilità della soluzione del problema (4.1).

Dimostrazione Teorema 2. Per ipotesi

$$f \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega)) \qquad v_0(\cdot, s) \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{per ogni } s \leqslant 0$$

quindi

$$\lim_{z \to \infty} \widetilde{F}(x, z)$$

$$= \lim_{z \to \infty} \{\widetilde{f}(x, z) + v_0(x, 0) + \int_0^\infty e^{-zs} \operatorname{div}[\int_t^\infty (\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau)) \operatorname{grad} v_0(x, s-\tau)\, d\tau]\, ds\}$$

$$= v_0(x, 0).$$

Allora, per la (4.6) e la (4.7), otteniamo per $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} z^{1-\alpha} \widetilde{v}(x, z) &= \lim_{z \to \infty} \int_\Omega z^{1-\alpha} H(x, x'; z) \widetilde{F}(x', z)\, dx' \\ &= \lim_{z \to \infty} \int_\Omega z^{1-\alpha} H(x, x'; z) v_0(x', 0)\, dx' = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Siano ora $z = iw$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; la (4.10) implica che $\widetilde{v} \in L^2$ rispetto a w ed inoltre $\widetilde{v}(x, w)$ può essere vista come la trasformata di Fourier di

$$v^*(x, t) = \begin{matrix} 0 & t < 0 \\ v(x, t) & t \geqslant 0. \end{matrix}$$

Applicando il teorema di Parseval, otteniamo le seguenti identità

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |\widetilde{v}(x, w)|^2\, dx\, dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |v^*(x, t)|^2\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_\Omega |v(x, t)|^2\, dx\, dt \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |\operatorname{grad}_x \widetilde{v}(x, w)|^2\, dx\, dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega |\operatorname{grad}_x v^*(x, t)|^2\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_\Omega |\operatorname{grad}_x v(x, t)|^2\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Da (4.11) e (4.12) discende

$$\int_0^\infty \int_\Omega [\,|\operatorname{grad}_x v(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2\,]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \infty$$

ossia v appartiene a $L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Appendice

Un fluido viscoso incomprimibile caratterizzato dall'equazione costitutiva (1.1) è un materiale semplice nel senso della definizione data in [2], [4]. Seguendo [3], lo stato σ, appartenente allo spazio degli stati Σ, è assegnato dalla storia D^t del tensore velocità di deformazione, e come processo di deformazione $P: [0, d_p) \to \mathrm{Lin}$, appartenente allo spazio dei processi Π, scegliamo il gradiente di velocità $L(t)$ per ogni $t \in [0, d_p)$, dove d_p è la durata del processo. Infine chiamiamo funzione di transizione degli stati, la funzione

$$\hat{\rho}: \Sigma \times \Pi \to \Sigma$$

definita da
$$\hat{\rho}(\sigma_1, P) = D_2^t(s) = \begin{cases} D_1^t(d_p - s) & s > d_p \\ D_p(s) & 0 \leqslant s < d_p \end{cases}$$

dove D_p rappresenta la parte simmetrica del processo $P(t) = L(t)$.

Per ottenere le restrizioni analitiche imposte dalla Seconda Legge della Termodinamica (2.2) sulla forma del tensore degli sforzi T ed in particolare sulla funzione di rilassamento μ, è necessario pervenire alla definizione di ciclo chiuso.

Definizione 2. Una coppia (σ, P) è detta *un ciclo chiuso* se $\hat{\rho}(\sigma, P) = \sigma$.

Per la definizione di stato $\sigma = D^t$ risultano cicli chiusi le coppie (σ, P) tali che D^t è una storia periodica e P un processo che coincide con uno o più periodi della storia D^t. In particolare risulta un ciclo chiuso la coppia (σ, P) definita nel seguente modo

$$\sigma(t) = D_1 \cos w(t-s) + D_2 \operatorname{sen} w(t-s)$$

$$P(\tau) = D_1 \cos w\tau + D_2 \operatorname{sen} w\tau \qquad \tau \in [t, t + \frac{2\pi}{w}).$$

Teorema 3. *Condizione necessaria e sufficiente per la validità della Seconda Legge della Termodinamica* (2.2) *è la diseguaglianza*

$$\hat{\mu}_{1c}(w) + \hat{\mu}_{2c}(w) = \int_0^\infty \mu_1(s) \cos ws \, ds + \int_0^\infty \mu_2(s) \cos ws \, ds > 0 \qquad w \neq 0 .$$

Dimostrazione. Considerato il ciclo chiuso (σ, P) definito in precedenza, il lavoro meccanico sul ciclo è

$$W(\sigma, P) = \int_t^{t+d_p} -p(\tau) I \cdot L(\tau) \, d\tau + \int_t^{t+d_p} \int_0^\infty 2(\mu_1(s) + \mu_2(s)) K \, ds \, d\tau$$

dove $K = (D_1 \cos w(\tau - s) + D_2 \operatorname{sen} w(\tau - s)) \cdot (D_1 \cos w\tau + D_2 \operatorname{sen} w\tau)$.

Essendo il fluido incomprimibile, $I \cdot L = \operatorname{div} v = 0$ e quindi il primo integrale si annulla; inoltre invertendo l'ordine di integrazione, abbiamo, utilizzando l'espressione (2.2) della Seconda Legge,

$$\int_0^\infty (\mu_1(s) + \mu_2(s)) \cos ws \, ds \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } w \neq 0 .$$

Poiché il ciclo chiuso da noi considerato per una materiale viscoelastico risulta irreversibile, ne consegue che deve valere il segno di maggiore stretto.

Per la dimostrazione della sufficienza è necessario osservare ancora che un ciclo chiuso è una coppia (σ, P) tale che $\sigma = D^t$ è una funzione periodica e P coincide con uno o più periodi della storia D^t. Pertanto ogni storia periodica di periodo T può essere rappresentata mediante la sua serie di Fourier

$$D_T^t(s) = \sum_{k=0}^\infty [A_k \cos kw(t - s) + B_k \operatorname{sen} kw(t - s)] \qquad w > 0$$

dove $w = \dfrac{2\pi}{T}$. Sia P_T il processo di durata T definito da

$$P_T(\tau) = D_T^t(t + \tau) \qquad \tau \in [0, T)$$

allora il lavoro meccanico sul ciclo (D_T^t, P_T) è

$$W = \int_t^{t+T} -p(\tau) I \cdot L \, d\tau + \int_t^{t+T} \int_0^\infty 2(\mu_1(s) + \mu_2(s)) \Phi \, ds \, d\tau$$

dove $\Phi = \sum_{k=0}^\infty \sum_{h=0}^\infty [A_k \cos kw(\tau - s) + B_k \operatorname{sen} kw(\tau - s)] \cdot [A_h \cos hw(\tau) + B_h \operatorname{sen} hw(\tau)]$.

Il primo integrale si annulla poiché il fluido è incomprimibile. Quindi integrando termine a termine ed eliminando i termini nulli, abbiamo

$$W = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t}^{t+T} \int_{0}^{\infty} (\mu_1(s) + \mu_2(s))\, \Psi_k \, ds\, d\tau$$

dove $\Psi_k = [A_k \cos kw(\tau - s) + B_k \operatorname{sen} kw(\tau - s)] \cdot [A_k \cos kw\tau + B_k \operatorname{sen} kw\tau]$

da cui

$$W = \frac{2\pi}{w} \sum_{k=0}^{\infty} [\int_{0}^{\infty} (\mu_1(s) + \mu_2(s))(A_k^2 \cos kws + B_k^2 \cos kws)\, ds] \qquad w > 0 .$$

Dalle ipotesi del teorema e poiché gli unici cicli (σ, P) reversibili per un fluido viscoelastico sono quelli per cui $D^t(s) = 0$ e $P(t) = 0$, abbiamo la tesi.

Bibliografia

[1] M. S. AGRANOVICH and M. I. VISHIK, *Elliptic boundary-value problems depending on a parameter*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **149** (1963), 223-226.

[2] B. D. COLEMAN and D. R. OWEN, *A mathematical foundation for thermodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal. **54** (1974), 1-104.

[3] M. FABRIZIO, *Proprietà e restrizioni costitutive per fluidi viscosi con memoria*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **37** (1989), 429-446.

[4] M. FABRIZIO and C. GIORGI, *Sulla termodinamica dei materiali semplici*, Boll. Un. Mat. Ital. **5-B** (1986), 441-464.

[5] M. FABRIZIO and B. LAZZARI, *On asymptotic stability for linear viscoelastic fluids*, (preprint).

[6] G. FICHERA, *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physic, VI, Springer, Heidelberg 1972.

[7] W. J. HRUSA and M. RENARDY, *A model equation for viscoelasticity with a non integrable memory function*, (preprint).

[8] M. RENARDY, W. J. HRUSA and J. A. NOHEL, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **35**, Longman, London 1987.

[9] R. TEMAN, *Navier Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam 1984.

[10] F. TREVES, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York 1976.

Summary

An incompressible viscoelastic fluid is considered along with a relaxation function μ, *which satisfies, besides the condition* $\mu \in L^2(0, +\infty)$, *only those conditions deriving from the Second Law of Thermodynamics. In this paper it is proved that such weak hypotheses imply existence, uniqueness and stability theorems firstly for the Dirichlet dynamic problem and then for the relative boundary-initial history value problem.*

* * *