

CORRADO TANASI (\*)

## Grafi planari di $S^3$ e movimenti di Whitehead (\*\*)

### 1 - Introduzione

Sia dato un embedding  $j$  di un grafo  $\Gamma$  (connesso) nella sfera  $S^3$ . Rendere planare un grafo (in  $S^3$ ) significa operare un'isotopia  $j'$  su  $j$  (se esiste) tale che, dopo l'isotopia, si abbia  $\Gamma \xrightarrow{j'} S^2 \hookrightarrow S^3$ . Tuttavia non tutti i grafi si possono rendere planari. Un teorema di Scharlemann-Thompson afferma che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia planare è che, per ogni sottografo  $\Gamma' \subset \Gamma$ , il gruppo fondamentale di  $S^3 - j\Gamma'$  sia libero.*

Vogliamo studiare in questo lavoro, una variante del teorema di Scharlemann-Thompson. Precisamente vogliamo indagare quando, attraverso movimenti di Whitehead ed isotopie embedded in  $S^3$  ( $\Gamma \xrightarrow{j'} S^2 \hookrightarrow S^3$ ), un grafo diviene planare. Il risultato principale sarà dimostrare il seguente

*Teorema. Sia  $\Gamma$  un grafo finito qualsiasi e sia  $j$  un embedding da  $\Gamma$  in  $S^3$ . Attraverso isotopie e movimenti di Whitehead embedded in  $S^3$ , il grafo  $\Gamma$  si può rendere planare se e solamente se  $\pi_1(S^3 - j\Gamma)$  è un gruppo libero.*

Ora se un grafo  $\Gamma$  si può rendere planare mediante movimenti di Whitehead ed isotopie, è noto che  $\pi_1(S^3 - j\Gamma)$  è libero. I movimenti di Whitehead e le isotopie non alterano il gruppo fondamentale  $\pi_1(S^3 - j\Gamma)$ , allora se il grafo diviene planare è noto [6] che tale gruppo è libero. Si tratta di provare che la condizione del teorema, è anche sufficiente.

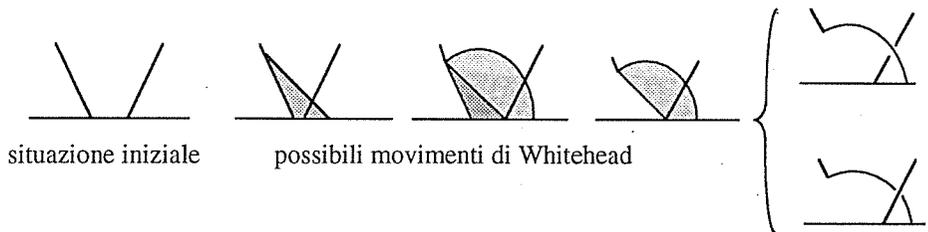
---

(\*) Dip. di Matematica e Appl., Univ. Palermo, Via Archirafi 34, 90123 Palermo, Italia.

(\*\*) Ricevuto il 6.11.1991. Classificazione AMS 05 C 10. Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi nazionali del CNR e con il contributo MURST 60%.

## 2 - Dilatazioni, collassi, movimenti di Whitehead

In un complesso simpliciale  $K$ , sia  $\sigma$  un suo simpleso e  $\tau$  una faccia di  $\sigma$ , con  $\dim \tau = \dim \sigma - 1$ . Supponiamo che  $\tau$  non sia una faccia propria di nessun altro simpleso di  $K$ . Il complesso  $K - \text{int } \sigma - \text{int } \tau$  si dice ottenuto da  $K$  mediante un *collasso elementare* nel senso di Whitehead [3]. L'operazione inversa di un collasso elementare chiamasi *dilatazione*. I *movimenti di Whitehead* si realizzano mediante dilatazioni e/o collassi elementari. Il simpleso  $\sigma$  dicesi *supporto* e la dimensione del supporto si dice *dimensione* della dilatazione o del collasso. In questo lavoro tratteremo solo collassi e dilatazioni di dimensione *non maggiore* di due. Precisamente occorreranno collassi e/o dilatazioni di dimensione *uno* e di una combinazione di collassi e dilatazioni di supporto  $\sigma$  date da una dilatazione di stesso supporto, seguite da un collasso di dimensione due, ma con un  $\tau$  *diverso*. Movimenti di quest'ultimo tipo saranno chiamati *scivolamenti*.



D'ora in avanti, a meno che non vi sia ambiguità, scriveremo  $\Gamma$  in luogo di  $j\Gamma \subset S^3$ .

Sia  $N(\Gamma)$  un intorno regolare del grafo  $\Gamma$  contenuto in  $S^3$  ( $\Gamma \hookrightarrow N(\Gamma) \hookrightarrow S^3$ ).

a) Da un intorno regolare  $N(\Gamma)$  del grafo  $\Gamma$ , si passa ad un'intorno regolare  $N(\Gamma')$  del grafo  $\Gamma'$ , diffeomorfo a  $N(\Gamma)$ . In altre parole, a priori, gli intorni regolari  $N(\Gamma)$  ed  $N(\Gamma')$  di  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  hanno due posizioni distinte in  $S^3$ , ma esiste sempre un'isotopia  $h_t$  in  $S^3$  tale che  $h_0 = \text{id}|_{S^3}$  e  $h_1(N(\Gamma)) = N(\Gamma')$  [3].

b) Attraverso movimenti di Whitehead: dilatazioni, collassi di dimensione uno e scivolamenti, un grafo connesso  $\Gamma \hookrightarrow S^3$  si può trasformare o in punto o in un bouquet di cerchi (contenuto in  $S^3$ ).

Esiste allora un intorno regolare  $N(\Gamma)$  di  $\Gamma$ , un toro solido  $T_p$  di genere  $p > 1$ , che, modulo una isotopia, è unico [3]. Il toro solido si costruisce così: si consideri un manico di indice *zero* e tanti manici di indice *uno* quanti sono i cerchi che compongono il bouquet. Si incollano, in modo standard [1], i manici di indice uno

sull'unico manido di indice zero. Poiché tutto resta orientabile, il risultato non può che essere un *toro pieno*.

Distinguiamo ora due casi: quando il grafo  $\Gamma$  è connesso, da quando non lo è. Supporremo d'ora in poi, che (ipotesi del teorema) il gruppo  $\pi_1(S^3 - \text{int } N(\Gamma))$  sia libero e di rango  $q$ .

### 3 - Il grafo $\Gamma$ è connesso

Poniamo  $V^3 = S^3 - \text{int } N(\Gamma)$ . Ora  $V^3$  e  $N(\Gamma)$  hanno la stessa frontiera, per cui  $V^3$  è un toro di genere  $p$ .

Lemma 1.  $V^3$  è un toro pieno. Il genere  $p$  di  $V^3$  e il rango  $q$  del gruppo  $\pi_1 V^3$  sono uguali.

Dimostrazione. Si prova la seconda affermazione, ammessa (per il momento) valida la prima. Generalmente dati gli spazi  $X_1$  ed  $X_2$ , con  $X_1 \cup X_2 = X$  e  $X_1 \cap X_2 = A$  con le ovvie inclusioni  $A \xrightarrow{i_1} X_1$ ,  $A \xrightarrow{i_2} X_2$ , esiste la seguente successione di omotopia di Mayer-Vietoris

$$H_{q+1}X \rightarrow H_q A \rightarrow H_q X_1 \oplus H_q X_2 \rightarrow H_q X \rightarrow H_{q-1}A.$$

Nel nostro caso, posto  $X_1 = N(\Gamma)$  e  $X_2 = V^3$  sarà  $X_1 \cup X_2 = S^3$ ,  $X_1 \cap X_2 = \partial V^3$  (superficie torica di genere  $p$ ) e la corrispondente successione di omotopia di Mayer-Vietoris assume la forma

$$H_2 S^3 \rightarrow H_1 \partial V^3 \rightarrow H_1(N(\Gamma)) \oplus H_1 V^3 \rightarrow H_1 S^3.$$

Ora è noto che  $H_2 S^3 \approx 0$ ,  $H_1 \partial V^3 \approx Z^{2p}$ ,  $H_1(N(\Gamma)) \approx Z^q$ ,  $H_1 S^3 \approx 0$ , allora la freccia  $H_1 \partial V^3 \rightarrow H_1(N(\Gamma)) \oplus H_1 V^3$  è un'isomorfismo. Ma  $\pi_1 V^3$  è un gruppo libero di rango  $q$ , per cui l'abelianizzazione  $H_1 V^3$  di  $\pi_1 V^3$  è isomorfa a  $Z^q$ , segue che  $p = q$ .

Dal teorema di dualità di Alexander [2] e dal teorema della sfera di C. D. Papanikolaou [7] si trae che per un grafo connesso

- i) il gruppo di omologia  $H_2 V^3$  è nullo,
- ii) il secondo gruppo di omotopia  $\pi_2 V^3$  è nullo.

Ancora dal teorema di Alexander, risulta che  $V^3$  non contiene un disco di omotopia che sia diverso da  $D^3$ .

La 3-varietà  $V^3$  possiede, per riassumere, le seguenti proprietà

- a) il gruppo fondamentale  $\pi_1 V^3$  è un gruppo libero con  $p$  generatori
- b) il genere della frontiera  $g(\partial V^3)$  e il rango  $p$  del gruppo fondamentale di  $V^3$  sono uguali
- c)  $V^3$  non contiene un controesempio all'ipotesi di Poincaré
- d)  $\pi_2 V^3 = 0$ .

Ciò posto possiamo affermare che

Lemma 2.  $V^3$  è un toro pieno di genere  $p$  ( $V^3 \approx p\#(S^1 \times D^2)$ ).

Una volta dimostrato questo lemma, la prova del Lemma 1 sarà completa.

Dimostrazione. L'inclusione  $\partial V^3 \xrightarrow{i} V^3$  induce l'omomorfismo tra gruppi

$$\pi_1 \partial V^3 \xrightarrow{i_*} \pi_1 V^3.$$

Ora  $\pi_1 \partial V^3$  non è un gruppo libero, mentre il gruppo  $\pi_1 V^3$  lo è per ipotesi. Ma ogni sottogruppo di un gruppo libero è pure libero (teorema di Nielsen-Schreier [4]). Allora la freccia indotta  $\pi_1 \partial V^3 \xrightarrow{i_*} \pi_1 V^3$  non può essere iniettiva e dunque il nucleo  $\text{Ker}(\pi_1 \partial V^3 \xrightarrow{i_*} \pi_1 V^3)$  non può essere nullo.

È utile richiamare il *loop theorem* di Papakyriakopoulos [3]. *Sopra una 3-varietà  $X^3$  con frontiera, sia  $\partial_0 X^3$  una componente connessa della sua frontiera. Si consideri l'inclusione  $\partial_0 X^3 \xrightarrow{j} X^3$  e l'applicazione indotta  $\pi_1 \partial_0 X^3 \xrightarrow{j_*} \pi_1 X^3$ . Se il nucleo  $\text{Ker } j_*$  è non nullo, allora esiste una curva semplice, embedded  $\gamma \hookrightarrow \partial_0 X^3$ , avente le proprietà*

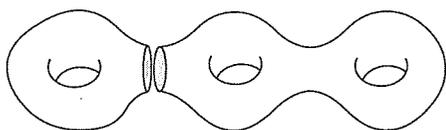
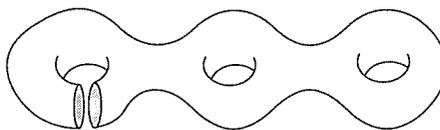
- 1)  $\gamma$  non è omotopa a zero in  $\partial_0 X^3$ .
- 2)  $\gamma$  è omotopa a zero in  $X^3$ .

Se si combina il loop theorem con il lemma di Dehn [4], segue che la curva  $\gamma$  non solo non è omotopa a zero in  $\partial_0 X^3$ , ma è anche bordo di un disco  $D^2$  embedded in  $X^3$ . Applicando questi risultati alla nostra situazione, si desume che esiste sulla superficie torica  $\partial V^3$  una curva  $\gamma$  embedded che non è omotopa a zero nella varietà  $V^3$ . Esiste poi un disco  $D^2$  embedded in  $V^3$  ( $D^2, \partial D^2$ )  $\hookrightarrow$  ( $V^3, \partial V^3$ ) tale che  $\partial D^2 = \gamma$ . Ora si possono avere due casi.

Caso I.  $V_1^3 = V^3 \setminus D^2$  è connesso.

Il gruppo  $\pi_1 V^3$  può essere scritto come prodotto libero  $\pi_1 V_1^3 * Z$ . Si noti che  $\pi_1 V^3$  è un gruppo libero con  $p$  generatori. Ora  $\pi_1 V_1^3$  essendo un sottogruppo di  $\pi_1 V^3$  è pure libero. Supponiamo che il gruppo  $\pi_1 V_1^3$  abbia  $p_1$  generatori. In un

gruppo libero il numero dei generatori è un invariante, per cui dovrà essere necessariamente  $p_1 = p - 1$  (teorema di Grushko [4], [5]). Così abbiamo perduto un generatore e  $p > p_1$ . Ora non si sa, a priori, se (dopo il taglio) la frontiera  $\partial V_1^3$  abbia una o più componenti connesse. La curva  $\gamma$  è contenuta nel toro ( $\gamma \subset \partial V^3$ ), e (a priori) è possibile che essa separi o non separi  $\partial V^3$ , come suggeriscono le seguenti figure.

Fig. 1. - La curva  $\gamma$  separa.Fig. 2. - La curva  $\gamma$  non separa.

Osservazione 1. Le Fig. 1 e 2 illustrano (astrattamente) in che senso si debba intendere che la curva  $\gamma$  separi o no la frontiera di  $V^3$ . Non potendo graficamente uscire dalla dimensione tre, si può solo disegnare  $V^3$  come un toro pieno (anche se questo fatto sarà mostrato vero alla fine della dimostrazione). Ma a questo punto della discussione possiamo solo dire che, se  $V^3$  è un toro pieno e se  $\gamma$  separa la frontiera  $\partial V^3$ , allora il disco  $D^2$  separa anche la parte interna di  $V^3$ . Altrimenti se  $V^3$  non è un toro pieno, è possibile che la curva  $\gamma$  separi la frontiera senza che  $D^2$  separi la parte interna di  $V^3$ . Come vedremo poi, la situazione della Fig. 1 non si presenta.

Quando la curva  $\gamma$  divide  $\partial V^3$  il genere  $g(\partial(V_1^3))$  rimane invariato, ovvero  $g(\partial V_1^3) = g(\partial V^3) = p$ . Se  $\gamma$  non divide  $\partial V^3$  il suo genere si riduce di una unità. Riassumendo in questo caso per il rango del gruppo  $\pi_1 V_1^3$  abbiamo che  $p_1 = p - 1$  e per il genere della frontiera di  $V_1^3$  è

$$g(\partial(V_1^3)) = g_1 = \begin{cases} p = p_1 + 1 & \text{se } \gamma \text{ separa,} \\ p - 1 = p_1 & \text{se } \gamma \text{ non separa.} \end{cases}$$

In ogni caso  $g_1 \geq p_1$ .

Caso II. Tagliando il toro  $\partial V^3$  lungo  $\gamma$  otteniamo un  $V^3 \setminus D^2$  non connesso.

Si consideri la somma connessa  $V^3 = V_1^3 \# V_2^3$ . Il gruppo fondamentale di  $V^3$  è il prodotto libero dei gruppi fondamentali di  $V_1^3$  e di  $V_2^3$  [ $\pi_1 V^3 = \pi_1 V_1^3 * \pi_1 V_2^3$ ]. Cosicché se  $p_1$  e  $p_2$  sono i ranghi rispettivi dei gruppi  $\pi_1 V_1^3$  e  $\pi_1 V_2^3$  si avrà  $p = p_1 + p_2$ . Per cui  $p_1$  e  $p_2$  sono non nulli (la curva  $\gamma$  non è omotopa a zero in  $\partial V^3$ ) e dunque necessariamente più piccoli di  $p$ . Questa situazione può continua-

re perché  $V_1^3$  e  $V_2^3$  hanno i rispettivi gruppi fondamentali liberi e la loro frontiera è *sempre* una riunione di tori. Per quanto riguarda la frontiera (in questo caso non connesso), la curva  $\gamma$  separa e allora, se  $g_1$  e  $g_2$  sono, rispettivamente, i generi delle componenti  $V_1^3$  e  $V_2^3$ , sarà  $g = g_1 + g_2$ .

I casi I e II si possono sintetizzare nel seguente schema

$$V^3 \setminus D^2 = \begin{array}{l} V^3 \text{ (caso connesso). Si ha: } \begin{array}{ll} g_1 > p_1 & \text{se } \gamma \text{ separa} \\ g_1 = p_1 & \text{se } \gamma \text{ non separa.} \end{array} \\ V_1^3 \neq V_2^3 \text{ (caso non connesso). Si ha: } g = \sum_{i=1}^2 g_i = \sum_{i=1}^2 p_i = p. \end{array}$$

La frontiera dei «pezzi» così ottenuti è una riunione di tori (almeno uno), in cui i gruppi fondamentali sono liberi e in cui la somma dei generi delle frontiere è maggiore o uguale alla somma dei ranghi dei rispettivi gruppi fondamentali. Siamo così tornati alle stesse condizioni iniziali. Possiamo allora avanzare operando la stessa costruzione. In termini generali la decomposizione si può descrivere nel modo seguente: giunti al primo livello  $V_{i_1}^3$  si continua il processo di decomposizione ottenendo vari «pezzettini» del secondo livello  $V_{i_1 i_2}^3$  di spezzamento. A ciascuno corrisponde un rango  $p_{i_1 i_2}$  del gruppo fondamentale e un genere  $g_{i_1 i_2}$  della frontiera. Questi si decompongono, a loro volta, nei «sottopezzettini»  $V_{i_1 i_2 i_3}^3$  con i gruppi fondamentali di rango  $p_{i_1 i_2 i_3}$  e rispettivi generi  $g_{i_1 i_2 i_3}$  delle frontiere  $\partial V_{i_1 i_2 i_3}^3$ . Ma a *tutti i livelli* abbiamo

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_h} g_{i_1 \dots i_h} \geq \sum_{i_1 i_2 \dots i_h} p_{i_1 \dots i_h}.$$

Sia  $M_k = \max_k \{p_{i_1 \dots i_k}\}$  il massimo dei ranghi del gruppo fondamentale al  $k$ -mo passo. A meno che non sia già nullo, il rango  $M_k$  è destinato a decrescere *strettamente* mano a mano che il processo di decomposizione avanza. Ma affermiamo di più, diciamo che *ad ogni livello* è

$$\sum_{i_1 \dots i_k} g_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i_1 \dots i_k} p_{i_1 \dots i_k}, \quad \text{per ogni } k.$$

Poniamo, per assurdo, che in qualche passo del processo di decomposizione descritto si abbia

$$\sum_{i_1 \dots i_s} g_{i_1 \dots i_s} > \sum_{i_1 \dots i_s} p_{i_1 \dots i_s}.$$

Allora, a partire da un livello fissato, sarà necessariamente

$$(*) \quad \sum_{i_{s+1} \dots i_{s+n}} g_{i_1 \dots i_s i_{s+1} \dots i_{s+n}} > \sum_{i_{s+1} \dots i_{s+n}} p_{i_1 \dots i_s i_{s+1} \dots i_{s+n}}.$$

Da questo livello in poi continuiamo la decomposizione. Ora per tutte le decomposizioni nelle tappe successive la disuguaglianza (\*) rimane sempre «stretta», perché il genere o decresce (come il rango), o rimane costante.

Osservazione 2. Le componenti ultime create dallo spezzamento della varietà  $V^3$  sono oggetti standard. Sono infatti sottovarietà semplicemente connesse di  $S^3$ .

Ma dopo un numero finito di passi si giungerà necessariamente ad una componente che è semplicemente connessa e con frontiera di *genere positivo*. Ma ciò è *escluso* perché la frontiera di una 3-varietà semplicemente connessa è fatta solo di sfere. Per cui, ad ogni passo della decomposizione e *per ciascuna* componente, genere e rango sono uguali.

Questo implica due fatti

a) è *escluso* che la curva  $\gamma$  separi (la Fig. 1 è esclusa). Dunque nel caso I si ha sempre  $g_1 = p_1$

b) visto che  $M_k$  decresce, esiste un numero finito  $N$  tale che il genere *totale*  $g_N$  e il rango *totale*  $p_N$  sono *nulli*.

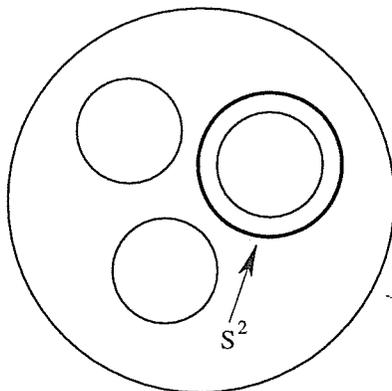
Osservazione 3. Terminato il processo di spezzamento di  $V^3$  giungiamo a oggetti ben conosciuti che chiamiamo genericamente  $X$ . Essi sono sottovarietà 3-dimensionali semplicemente connesse, compatte di  $S^3$ , più precisamente sono delle sfere con buchi (almeno uno). Utilizzando la condizione che il grafo è connesso mostreremo di fatto che esse sono sfere con *un solo* buco (cioè sono palle).

Consideriamo ora i pezzi di questo momento finale, rango e genere sono nulli per tutti i «pezzettini» successivi di questa ultima tappa. A priori essi sono varietà semplicemente connesse la cui frontiera è costituita solo da sfere. Ma proveremo che *ogni componente* ha per frontiera *una sola* sfera. Supponiamo che un pezzettino ottenuto dopo la tappa  $N$  abbia *più di una* sfera per frontiera. Sia  $S^3$  una sfera che separi la frontiera di una tale componente, così come la Fig. 3 suggerisce.

A partire da  $N$  ovvero dall'ultima collezione di pezzettini, è possibile ricostruire  $V^3$  mediante una successione di operazioni costituite o da somme connesse (su dischi di dimensione 2 contenuti sulla frontiera) o aggiungendo manici di indice uno. Questa ricostruzione *non distrugge* né  $H_2 V^3$ , né il gruppo di omotopia  $\pi_2 V^3$  che resta *non* nullo, ma questa è una contraddizione (cfr. 3). D'altra parte dalla condizione c) segue che queste componenti, contenute in  $S^3$ , non pos-

sono che essere delle *palle*. La nostra ricostruzione ci dice allora che  $V^3$  è un toro pieno di genere  $p$ . Dunque il Lemma 2 è dimostrato e quindi anche il Lemma 1.

Fig. 3.



#### 4 - Dimostrazione del teorema nel caso in cui il grafo $\Gamma$ è connesso

Siamo allora nella seguente situazione. Abbiamo una sfera  $S^3$ , un grafo  $\Gamma$  connesso con un suo intorno regolare (un toro pieno)  $N(\Gamma) \hookrightarrow S^3$ . Sappiamo che il gruppo  $\pi_1(S^3 - \Gamma)$  è libero con  $p$  generatori. Dalla conclusione del Lemma 1 si sa che  $V^3 = \overline{S^3 - \text{int } N(\Gamma)}$  è un toro pieno di genere  $p$ . Ora questa è una situazione classica che chiamasi uno *splitting di Heegard*.

Conviene ricordare che, data una 3-varietà orientabile e chiusa  $W^3$ , uno *splitting di Heegard* consiste nello scrivere  $W^3$  come unione di due tori pieni  $T_g$  che si ottengono incollando le frontiere mediante un diffeomorfismo  $f$ . Se  $f$  fosse l'identità,  $W^3$  sarebbe l'ordinaria somma connessa  $g \# (S^1 \times S^2)$ .

Si utilizza ora un teorema di Waldhausen [9], che afferma:

*Assegnato un genere  $g$ , vi è uno ed un solo modo di operare uno splitting di Heegard della sfera  $S^3$  di genere  $g$ .*

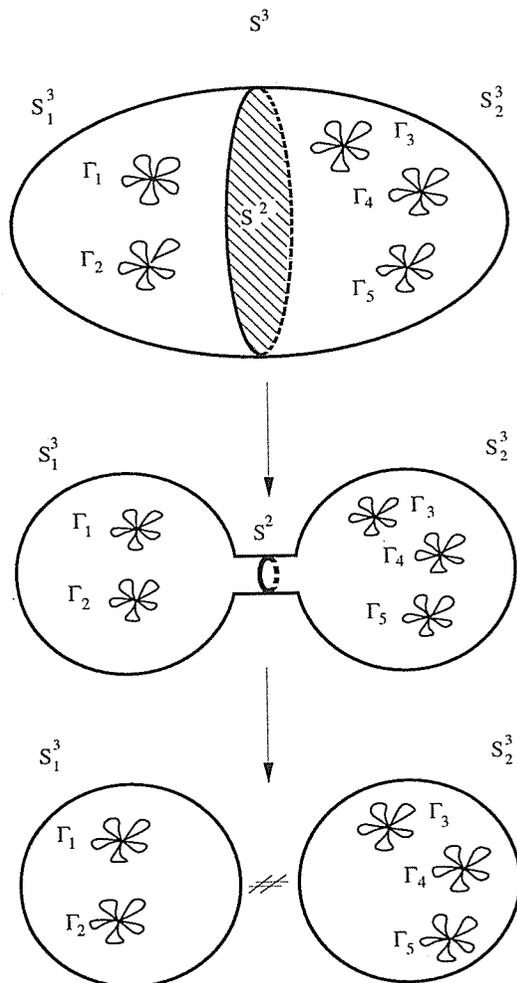
Vi sono diversi modi di enunciare questo teorema. Uno di questi è il seguente: Poniamo un bouquet di  $g$  cerchi sopra un piano o su  $S^2$  e poi da  $S^2$  si passa in  $S^3$  (dove  $S^2$  è l'equatore). Il complementare di un intorno regolare del bouquet è, modulo un'isotopia, un toro solido di genere  $g$ . Il teorema di Waldhausen afferma che uno *splitting di Heegard* di  $S^3$  è sempre fatto così.

A questo punto abbiamo concluso la dimostrazione del nostro teorema perché il grafo  $\Gamma$  (forse complicato), attraverso una combinazione di movimenti di *Whithead* ed isotopie, è stato ridotto ad un bouquet di cerchi. Abbiamo poi considerato un intorno regolare  $N(\Gamma)$ ; la cosa più difficile era mostrare che il comple-

mentare in  $S^3$  è l'intorno regolare di un bouquet di cerchi, ma a questo punto il teorema di Waldhausen dice che questa situazione è *standard* cioè l'uno o l'altro dei tori pieni proviene da un bouquet di cerchi che sta in  $S^2$ .

### 5 - Il grafo $\Gamma$ non è connesso ed ha $n$ componenti

Il teorema sarà dimostrato per induzione su  $n$ . Il caso  $n = 1$  è stato già dimostrato. Supponiamo il teorema vero per  $k < n$ . Operiamo la stessa decomposizione come nel caso del grafo connesso *componente per componente*.



Terminata la decomposizione, la varietà  $V^3 = S^3 - \sum_{i=1}^n \text{int } N(\Gamma_i)$  è decomposta in pezzi. Ma contrariamente al caso connesso, almeno *una* delle compo-

nenti della suddivisione sarà una *palla con buchi*, che indichiamo con  $X = S^3 - (B_1^3 \cup \dots \cup B_i^3)$ . In tale componente è possibile trovare una sfera  $S^2$  (embedded) non omotopa a zero. Notiamo che  $S^3$  resta *non* omotopa a zero in  $V^3$ , perché la ricostruzione di  $V^3$  (ottenuta con aggiunta di manici di indice uno e operando somme connesse tra i pezzi della decomposizione) non altera il gruppo di omologia  $H_2 V^3$  che resta *non* nullo. Dal teorema di Alexander sappiamo che l' $S^2$  (liscio) decompone  $S^3$  nella somma connessa di due componenti  $S_1^3$  e  $S_2^3$  che sono *palle*. Ora la sfera  $S^2$  *non* è omotopa a zero in  $V^3$ , così una parte delle componenti di  $\Gamma$ , che indichiamo con  $\Gamma' = \Gamma_{i_1} + \dots + \Gamma_{i_k}$  cade in  $S_1^3$  (senza toccare la frontiera) e l'altra parte  $\Gamma'' = \Gamma - \Gamma'$  si trova, con le stesse condizioni, nell'altra componente  $S_2^3$ .

Dal teorema di Van Kampen si sa che

$$\pi_1(S^3 - j\Gamma) = \pi_1(S^3 - j\Gamma') * \pi_1(S^3 - j\Gamma'').$$

Ma  $\pi_1(S^3 - j\Gamma)$  è libero, per cui anche i suoi sottogruppi  $\pi_1(S^3 - j\Gamma')$ ,  $\pi_1(S^3 - j\Gamma'')$  sono liberi. Ciascuna componente  $S_1^3$  e  $S_2^3$  contiene un numero di componenti del grafo  $\Gamma$  *strettamente* minore di  $n$  e su di esse vale l'ipotesi induttiva. Le componenti  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  del grafo sono planari. Allora il grafo  $\Gamma$ , unione di grafi planari, è *planare*.

### Bibliografia

- [1] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV e A. FOMENKO, *Géometrie contemporaine. Méthodes et Applications 3*, MIR, Mosca 1987.
- [2] M. J. GREENBERG, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Inc., London 1967.
- [3] J. HEMPEL, *3-Manifolds*, Princeton Univ. Press, Princeton 1976.
- [4] C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. **66** (1957), 1-26.
- [5] V. POÉNARU, *Groupes discrets*, Lecture Notes **421**, Springer, Berlin 1974.
- [6] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, Math. Lecture Ser., Publish or perish, Houston 1976.
- [7] J. STALLINGS, *On the Loop theorem*, Ann. of Math. **72** (1960), 12-19.
- [8] J. STALLINGS, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Math. Monographs **4**, 1971.
- [9] F. WALDHAUSEN, *Heegaard-Zerlegungen der 3-sphaere*, Topology **7** (1968), 195-303.

## Summary

*We show that a graph  $\Gamma$  embedded in  $S^3$  can be made planar via isotopies and Whitehead moves (including slides), if and only if the fundamental group of its complement is free.*

\*\*\*

