Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 247-255

VITTORIO MANGIONE (*)

Strutture DM su una varietà (**)

1 - Introduzione

Questa nota si inquadra nell'indirizzo di ricerca aperto da F. Tricerri in [6] e successivamente sviluppato da S. Donnini e da me nei lavori [1], [4], dedicato alle varietà dotate di due strutture quasi complesse J_1, J_2 linearmente indipendenti.

Precisamente, si considera qui un'ampia classe di varietà del tipo accennato, nel seguito chiamate *varietà* DM. Rientrano in tale classe le varietà del tipo (VI) secondo H. Wakakuwa, studiate in $[1]_2$ e le varietà studiate in [6], che saranno chiamate *varietà* DM *speciali*.

La condizione analitica che definisce le strutture DM è stata introdotta per la prima volta in $[1]_2$.

L'idea che permette uno studio approfondito delle varietà DM è quella di considerare *l'algebra* $A(J_1, J_2)$ *generata dalle strutture quasi complesse* J_1, J_2.

I teoremi T_1, T_2 di 3 mostrano che la dimensione dell'algebra $A(J_1, J_2)$ consente di caratterizzare, entro la classe delle varietà DM, la sottoclasse delle varietà DM speciali.

Lo studio dettagliato della struttura dell'algebra $A(J_1, J_2)$ conduce ad una classificazione delle varietà DM non speciali (teoremi T_3, T_4, 5).

In 6 viene poi completamente risolto il problema della determinazione di tutte le strutture quasi tangenti, quasi prodotto, quasi complesse, esistenti sulle varietà DM non speciali (proposizioni P_1, P_2, P_3, P_4).

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via M. D'Azeglio 85/A, I-43100, Parma.

(**) Ricerca effettuata nell'ambito del Progetto Nazionale «Geometria reale e complessa» con fondi MURST.
MR classification: 53C15. - Ricevuto: 11-IV-1991.

Sempre in **6** è stabilito il numero massimo di strutture quasi tangenti, quasi prodotto, quasi complesse, linearmente indipendenti, che esistono sulle varietà DM non speciali (proposizioni P_5, P_6).

Infine **7** è dedicato alle corrispondenti questioni per le varietà DM speciali (T_5, T_6; P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}).

In definitiva, questo lavoro, che raccoglie vari risultati ottenuti in [**6**], [**1**]$_2$ e li completa in modo organico, costituisce una trattazione omogenea dell'argomento, suscettibile forse di ulteriori generalizzazioni.

2 - Strutture DM

Siano V una varietà differenziabile di dimensione $2m$ ($m \geqslant 2$) e classe C^∞, F l'algebra delle funzioni di classe C^∞, definite su V ed a valori in $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_s^r$ l'F-modulo dei campi tensoriali C^∞ di tipo $(r,\ s)$.

In particolare gli elementi di $\mathcal{D}_1^1$ si possono pensare come endomorfismi di $\mathcal{D}_0^1$. L'insieme $\mathcal{D}_1^1$ con le operazioni di somma e di composizione è un'*algebra* su $\mathbb{R}$.

Per le nozioni generali, si veda p. es. [3], I e II.

Denotata poi con I l'identità di $\mathcal{D}_1^1$, gli elementi J, H, Z di $\mathcal{D}_1^1$ per i quali risulti rispettivamente

$$(1) \qquad J^2 = -I \qquad H^2 = I \qquad Z^2 = O \quad (H \neq \pm I,\ Z \neq O)$$

corrispondono alle *strutture quasi complesse, quasi prodotto, quasi tangenti* di V ([8], pp. 110, 236; [2], p. 1553).

Ciò premesso, V si dice dotata di una *struttura* DM (brevemente V è una *varietà* DM), se V possiede due strutture quasi complesse J_1, J_2 linearmente indipendenti e tali che

$$(2) \qquad J_1 J_2 J_1 + J_2 J_1 J_2 = \alpha(J_1 + J_2) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Una classe particolare di strutture DM su V è costituita dalle coppie J_1, J_2 soddisfacenti l'una o l'altra delle condizioni

$$(3) \qquad J_1 J_2 = J_2 J_1 \qquad J_1 J_2 + J_2 J_1 = kI \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Si riconosce infatti senza difficoltà che ciascuna delle (3) implica la (2) con $\alpha = -1$, $k+1$, rispettivamente.

Le strutture ora accennate, introdotte e studiate da F. Tricerri in [**6**], sono nel seguito chiamate *strutture* DM *speciali*.

Una classe di strutture DM, nota nella letteratura, è quella delle *strutture di tipo* (VI) *secondo H. Wakakuwa* ([7], p. 403). A questa classe è dedicato il lavoro $[1]_2$, nel quale tra l'altro si dimostra che *le strutture di questa classe coincidono con le strutture* DM *non speciali con* $\alpha \neq -1$ ($[1]_2$, teorema T_1, p. 177).

3 - Teoremi fondamentali

È essenziale per lo studio e la classificazione delle strutture DM la considerazione di una conveniente algebra, associata alla struttura stessa.

Più in generale, se la varietà V è dotata di due strutture quasi complesse J_1, J_2 linearmente indipendenti, si consideri, entro l'algebra $\mathcal{D}_1^1$, l'*algebra* $A(J_1, J_2)$ *generata dalla coppia* J_1, J_2.

I teoremi che seguono mostrano che le *strutture* DM *sono caratterizzate dalla dimensione dell'algebra* $A(J_1, J_2)$. Precisamente si ha:

T_1. *Se* J_1, J_2 *definiscono su* V *una struttura* DM, *l'algebra* $A(J_1, J_2)$, *generata da* J_1, J_2, *ha dimensione* 6 *quando la struttura* DM *non è speciale, ed ha dimensione* 4 *quando la struttura* DM *è speciale.*

T_2. *Sia* V *una varietà dotata di due strutture quasi complesse* J_1, J_2 *linearmente indipendenti. Se* $\dim A(J_1, J_2) \leqslant 6$, *le strutture quasi complesse* J_1, J_2 *danno sempre luogo su* V *ad una struttura* DM, *che risulta non speciale se* $\dim A(J_1, J_2) = 6$, *speciale se* $\dim A(J_1, J_2) = 4$.

Immediata conseguenza dei teoremi T_1, T_2 è il corollario

C_1. *L'algebra* $A(J_1, J_2)$ *non può avere dimensione* 2, 3, 5.

4 - Dimostrazioni

Il teorema T_1 riassume due risultati noti (vedi teorema T_1 di $[1]_1$ e teorema T_1 di [6]).

Per stabilire T_2 si procede così. Se $\dim A(J_1, J_2) = 6$, il teorema T_2 di $[1]_2$ assicura che J_1, J_2 danno luogo ad una struttura DM non speciale. Se $\dim A(J_1, J_2) = 4$, il teorema T_1 di [6] assicura che J_1, J_2 danno luogo ad una struttura DM speciale.

Poiché per ipotesi $2 \leqslant \dim A(J_1, J_2) \leqslant 6$, per completare la dimostrazione occorre esaminare i casi $\dim A(J_1, J_2) = 2, 3, 5$.

Il caso $\dim A(J_1, J_2) = 2$ non si presenta, perché I, J_1, J_2 sono *linearmente* indipendenti. Infatti da $aI + bJ_1 + cJ_2 = 0$ seguono

$$aJ_1 - bI + cJ_1 J_2 = 0 \qquad aJ_2 + bJ_1 J_2 - cI = 0 .$$

Eliminando $J_1 J_2$ ed I e tenendo conto della indipendenza lineare di J_1, J_2, si trova $a = b = c = 0$.

Non può essere neppure dim $A(J_1, J_2) = 3$, come appare dal Lemma L_1 di [**6**] che assicura che gli elementi I, J_1, J_2, $J_1 J_2$ sono *linearmente indipendenti.*

Si osservi ora che, a causa della relazione $J_1^2 = J_2^2 = -I$, gli elementi dell'algebra $A(J_1, J_2)$ sono $(J_1 J_2)^r$, $(J_2 J_1)^r$, $J_1 (J_1 J_2)^r$, $J_2 (J_2 J_1)^r$ con $r \in N$ e le loro combinazioni lineari.

Di conseguenza, se dim $A(J_1, J_2) = 5$, non può essere

$$J_2 J_1 = aI + bJ_1 + cJ_2 + dJ_1 J_2 .$$

In altri termini gli elementi I, J_1, J_2, $J_1 J_2$, $J_2 J_1$ sono *linearmente indipendenti.* Pertanto si avrà

$$J_1 J_2 J_1 = pI + qJ_1 + rJ_2 + sJ_1 J_2 + tJ_2 J_1$$

da cui

$$-J_2 J_1 = pJ_1 - qI + rJ_1 J_2 - sJ_2 + tJ_1 J_2 J_1$$

$$-J_1 J_2 = pJ_1 - qI + rJ_2 J_1 + sJ_1 J_2 J_1 - tJ_2 .$$

Se $t \neq 0$, eliminando $J_1 J_2 J_1$ tra le prime due relazioni e tenendo conto della lineare indipendenza di I, J_1, J_2, $J_1 J_2$, $J_2 J_1$, segue $t^2 + 1 = 0$, che è assurdo. Alla stessa conclusione si perviene se $s \neq 0$, utilizzando la prima e la terza relazione. Infine, se $s = t = 0$, le ultime due relazioni sono assurde.

In definitiva, non può essere neppure dim $A(J_1, J_2) = 5$. È così dimostrato il teorema T_2.

5 - Classificazione delle strutture DM non speciali

Tenuto conto del teorema T_1 di 3 e della classificazione data in [**5**] per le algebre di dimensione 6, è ora possibile classificare le strutture DM non speciali, al variare del parametro α, considerando le algebre $A(J_1, J_2)$ associate alle strutture stesse.

Precisamente, con riferimento alle notazioni ed alle tabelle moltiplicative di cui in [**1**]$_2$, sussistono i teoremi:

T_3. *L'algebra* $A(J_1, J_2)$ *associata ad una struttura* DM *non speciale è isomorfa alle algebre* $H \oplus C$, $M_2 \oplus C$, B, $D \oplus C$ *per* $-1 < \alpha < 3$, $\alpha < -1$ *ovvero* $\alpha > 3$, $\alpha = 3$, $\alpha = -1$, *rispettivamente.*

T_4. *Se* V *è dotata di due strutture quasi complesse* J_1, J_2 *linearmente indipendenti ed* $A(J_1, J_2)$ *è isomorfa ad una delle algebre elencate in* T_3, *allora* V *è dotata di una struttura* DM *non speciale, con i valori del parametro* α *ordinatamente uguali a quelli indicati in* T_3.

Conviene ricordare che le strutture DM non speciali con $\alpha \neq -1$ coincidono con le strutture di tipo (VI) secondo H. Wakakuwa ($[1]_2$, teorema T_1). Di conseguenza, per quanto riguarda i primi tre casi, i teoremi T_3, T_4 sono noti ($[1]_2$, teorema T_3). La dimostrazione degli stessi teoremi nell'ultimo caso è immediata conseguenza del teorema T_4 di $[1]_2$.

Infine, alla luce dei teoremi T_3, T_4, l'osservazione, che porta H. Wakakuwa ad escludere il valore $\alpha = -1$ ([7], p. 406, 407), si riduce in sostanza al fatto banale che l'algebra D, alla quale, come vedremo in 7, corrispondono le strutture di tipo (IV), è una sottoalgebra di $D \oplus C$.

6 - Teoremi di esistenza

Segue ora una serie di risultati, alcuni concernenti l'*esistenza di strutture quasi complesse, quasi prodotto e quasi tangenti* sulla varietà V, altri relativi al *massimo numero di tali strutture linearmente indipendenti.* Del primo tipo sono le proposizioni:

P_1. *Una struttura* DM *non speciale su* V *con* $-1 < \alpha < 3$ *determina su* V *due strutture quasi prodotto e due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

P_2. *Una struttura* DM *non speciale su* V *con* $\alpha = -1$ *ovvero* $\alpha = 3$ *determina su* V *un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti, due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi prodotto con due ulteriori strutture isolate dello stesso tipo, due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

P_3. *Una struttura* DM *non speciale su* V *con* $\alpha = 3$ *determina su* V *quattro insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse e un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti.*

P_4. *Una struttura* DM *non speciale su* V *con* $\alpha = -1$ *determina su* V *due* *strutture quasi prodotto, quattro insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse e un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti.*

Al secondo ordine di idee appartengono le proposizioni:

P_5. *Una struttura* DM *non speciale su* V, *assicura l'esistenza sulla varietà di quaterne di strutture quasi complesse linearmente indipendenti.*

P_6. *Una struttura* DM *non speciale su* V, *per* $\alpha > 3$ *ovvero* $\alpha < -1$, *assicura l'esistenza sulla varietà di quintuple di strutture quasi prodotto e di terne di strutture quasi tangenti linearmente indipendenti; per* $\alpha = 3$, *di coppie di strutture quasi tangenti linearmente indipendenti; per* $\alpha = -1$, *di una sola struttura quasi prodotto linearmente indipendente e di coppie di strutture quasi tangenti linearmente indipendenti.*

Tenuto conto del teorema T_1 di $[1]_2$, si riconosce che le proposizioni P_1, P_2, P_3 non differiscono dai teoremi T_6, T_7, T_8 del lavoro $[1]_2$.

È utile per il seguito ricordare la tabella moltiplicativa dell'algebra $D \oplus C$

(4)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	v_1	v_2	v_3	v_4	0	0
v_2	v_2	$-v_1$	v_4	$-v_3$	0	0
v_3	v_3	$-v_4$	0	0	0	0
v_4	v_4	v_3	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	v_5	v_6
v_6	0	0	0	0	v_6	$-v_5$

Le relazioni

$$v_1 = \frac{1}{2}(I - \frac{1}{2}(J_1 J_2 + J_2 J_1)) \qquad v_2 = J_1 v_1 = v_1 J_1 \qquad v_3 = J_1 v_4 = -v_4 J_1$$

$$v_4 = \frac{1}{2}(J_1 J_2 - J_2 J_1) \qquad v_5 = \frac{1}{2}(I + \frac{1}{2}(J_1 J_2 + J_2 J_1)) \qquad v_6 = J_1 v_5 = v_5 J_1$$

mettono in evidenza l'isomorfismo tra $D \oplus C$ e l'algebra $A(J_1, J_2)$ associata ad una struttura DM non speciale con $\alpha = -1$.

Indicato con

$$av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 + ev_5 + fv_6$$

l'elemento generico dell'algebra $D \oplus C$ si procede alla determinazione degli elementi antiinvolutori, involutori ed a quadrato nullo. Come si è avvertito al **2**, vanno esclusi nel secondo caso l'unità dell'algebra $I = v_1 + v_5$ ed il suo opposto, e lo zero nel terzo caso.

Procedendo per via diretta si trova che, nel caso di una struttura DM non speciale e con $\alpha = -1$, le strutture quasi complesse, quasi prodotto, quasi tangenti corrispondono agli elementi di $D \oplus C$ soddisfacenti, rispettivamente, alle *relazioni*

$$a = e = 0 \qquad b = \pm 1 \qquad f = \pm 1$$

$$b = c = d = f = 0 \qquad a = -e = \pm 1 \qquad a = b = e = f = 0 .$$

La proposizione P_4 è pertanto dimostrata.

La proposizione P_5 nel caso $\alpha \neq -1$ è nota ([**1**]$_2$, teorema T_9). Il caso $\alpha = -1$ segue senza difficoltà in quanto, come si è visto nella dimostrazione di P_4, gli elementi antiinvolutori dell'algebra $D \oplus C$ sono, tutti e soli, della forma

$$\pm v_2 + cv_3 + dv_4 \pm v_6 .$$

La proposizione P_6 nel caso $\alpha \neq -1$ è nota ([**1**]$_2$, teorema T_{10}). Il caso $\alpha = -1$ segue direttamente dalle relazioni che concludono la dimostrazione di P_4.

In relazione alla proposizione P_5 è interessante osservare che

$$J_1 \qquad J_2 \qquad -J_1 J_2 J_1 \qquad \frac{1}{2}(J_2 + J_1 J_2 - J_2 J_1 - J_1 J_2 J_1)$$

sono, per ogni valore del parametro α, *quattro strutture quasi complesse linearmente indipendenti.*

7 - Varietà DM speciali

A completamento dei risultati di **5** e **6** conviene qui elencare gli analoghi risultati per le varietà DM speciali.

Sempre con riferimento alle notazioni del lavoro [**1**]$_2$, sussistono i *teoremi*:

T_5. *Se la struttura* DM *speciale è definita dalla* $(3)_1$, *l'algebra* $A(J_1, J_2)$ *è isomorfa a* $C \oplus C$. *Se la struttura* DM *speciale è definita dalla* $(3)_2$, *l'algebra* $A(J_1, J_2)$ *è isomorfa ad* H, D, M_2 *secondo che sia* $k^2 < 4$, $k^2 = 4$, $k^2 > 4$, *rispettivamente.*

T_6. *Se* V *è dotata di due strutture quasi complesse* J_1, J_2 *linearmente indipendenti ed* $A(J_1, J_2)$ *è isomorfa a* $C \oplus C$, H, D, M_2, *allora* V *è dotata di una struttura* DM *speciale, definita dalla* $(3)_1$ *nel primo caso, dalla* $(3)_2$ *negli altri casi con i valori del parametro* k *ordinatamente uguali a quelli indicati in* T_5.

Il teorema T_5 è noto ([**6**], teorema T_2). Il teorema T_6 è conseguenza immediata di T_2 e di T_5.

Sussistono poi le proposizioni:

P_7. *Una struttura* DM *speciale su* V, *definita dalla* $(3)_1$, *determina quattro strutture quasi complesse, due strutture quasi prodotto e non dà luogo a strutture quasi tangenti.*

P_8. *Una struttura* DM *speciale su* V, *definita dalla* $(3)_2$ *con* $k^2 < 4$, *non dà luogo a strutture quasi prodotto, nè a strutture quasi tangenti, ma determina un insieme* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

P_9. *Una struttura* DM *speciale su* V, *definita dalla* $(3)_2$ *con* $k^2 = 4$, *non dà luogo a strutture quasi prodotto, ma determina un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti e due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

P_{10}. *Una struttura* DM *speciale su* V, *definita dalla* $(3)_2$ *con* $k^2 > 4$, *dà luogo ad un insieme di* ∞^2 *di strutture quasi tangenti, ad un insieme* ∞^2 *di strutture quasi prodotto e ad un insieme* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

Le dimostrazioni delle proposizioni P_7, P_8, P_9, P_{10} si ottengono senza difficoltà, considerando la tabella di moltiplicazione delle algebre $C \oplus C$, H, D, M_2.

Infine, con riferimento ai quattro casi considerati in P_7, P_8, P_9, P_{10}, si ha

P_{11}. *Il massimo numero di strutture quasi complesse linearmente indipendenti, determinato da una struttura* DM *speciale, è due nel primo caso, quattro negli altri casi. Per le strutture quasi prodotto il numero massimo è uno nel primo caso, quattro nell'ultimo caso. Per le strutture quasi tangenti il numero massimo è tre nel terzo caso, quattro nell'ultimo caso.*

Dalle dimostrazioni di P_7, P_8, P_9, P_{10}, segue facilmente P_{11}.

Bibliografia

[1] S. DONNINI e V. MANGIONE: $[\bullet]_1$ *Sulle varietà dotate di una struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 329-343; $[\bullet]_2$ *Sulle strutture di tipo* (VI) *su una varietà,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 175-186.

[2] H. A. ELIOPULOS, *Structures presque tangentes sur les variétés différentiables,* Compt. Rend. Acad. Sci. **255** (14) (1962), 1563-1565.

[3] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundation of Differential Geometry*, (I), (II), Interscience, London, 1963-68.

[4] V. MANGIONE, *Connessioni quasi complesse e strutture di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 65-70.

[5] G. SCORZA, *Opere scelte*, Roma, 1962.

[6] F. TRICERRI, *Sulle varietà dotate di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti,* Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 349-358.

[7] H. WAKAKUWA, *On linearly independent almost complex structures in a differentiable manifold,* Tohoku Math. J. (3) **13** (1961), 393-422.

[8] K. YANO, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

Summary

*We consider a large class of manifolds, endowed with two independent almost complex structures (*DM*-manifolds). A classification of* DM*-manifolds is given. Many results about almost complex, almost product, almost tangent structures on* DM*-manifolds are obtained.*

***