Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 181-190

MONICA BIANCHI (*)

Regolarità hölderiana della soluzione del problema dell'ostacolo relativo a particolari operatori ipoellittici (**)

1 - Introduzione

Sia Ω un sottoinsieme limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$ sufficientemente regolare e siano $X_1, X_2, \dots, X_m$ operatori differenziali omogenei del primo ordine definiti in un intorno I di $\bar{\Omega}$ con coefficienti $a_{ij} \in C^\infty(I)$

$$X_j(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \qquad \text{per ogni } u \in C^\infty(I) \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Si supponga inoltre che gli operatori $X_1, X_2, \dots, X_m$ siano di tipo $r \geq 1$, ossia che tra $X_1, X_2, \dots, X_m$ ed i loro commutatori di lunghezza massima r ne esistano n linearmente indipendenti in ogni punto $x \in \Omega$ (condizione di Hörmander).

In queste ipotesi si può introdurre in $\mathbb{R}^n$ una metrica naturale indotta da $X_1, X_2, \dots, X_m$. Indicate con $B(x_0, R)$ le bolle di centro x_0 e raggio R associate a tale metrica ($B(x_0, R) = \{x \in R^N / \text{dist}(x, x_0) < R\}$) e con $B_E(x_0, R)$ le usuali bolle euclidee, in [**11**] si dimostra che esistono opportune costanti reali $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$B_E(x_0, (R/C_2)^r) \subseteq B(x_0, R) \subseteq B_E(x_0, R/C_1). \tag{1}$$

Si consideri ora l'operatore differenziale omogeneo del secondo ordine ipoellit-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale, Finanziaria ed Economica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Largo Gemelli 1, I-20123 Milano.

(**) MR classification: 35J85. – Ricevuto: 16-XI-1990.

tico (cfr. [5])

$$L = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 .$$

Indicato con X_j^* l'operatore aggiunto di X_j, si dimostra facilmente che

$$X_j^* = -X_j + \sum_{i=1}^{n} (a_{ij})_{x_i} = -X_j - c_j \qquad c_j \in C^\infty(I)$$

e quindi si ottiene

$$\text{(2)} \qquad L = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 = \sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j + \sum_{j=1}^{m} c_j X_j .$$

Il principale obiettivo di questa nota è di stabilire la continuità hölderiana della soluzione della disequazione variazionale del problema dell'ostacolo associata ad operatori ipoellittici del tipo (2) qualora l'ostacolo stesso sia rappresentato da una funzione hölderiana.

Problematiche analoghe sono state affrontate da molti autori sia nel caso di operatori uniformemente ellittici (cfr. $[2]_1$, [9], [12]) che nel caso di operatori ellittici degeneri (cfr. [10], [4]).

Nel seguito, dopo aver introdotto opportuni spazi funzionali ed il problema dell'ostacolo in esame, si dimostra la continuità holderiana della soluzione debole del problema di Dirichlet relativo all'operatore (2) ed infine, seguendo fondamentalmente il lavoro [4], si ottiene il risultato di regolarità annunciato.

2 - Gli spazi funzionali $\mathcal{H}(\Omega)$ ed $\mathcal{H}_0(\Omega)$

Introdotti i seguenti prodotti scalari

$$(u,\ v)_0 = \sum_{j=1}^{m} (X_j u,\ X_j v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u, v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$(u,\ v) = (u,\ v)_0 + (u,\ v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

si definiscano gli spazi di Hilbert

$\mathcal{H}_0(\Omega)$ = chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ secondo la norma $\|\cdot\|_0 = (\cdot,\cdot)_0^{1/2}$;

$\mathcal{H}(\Omega)$ = *chiusura di* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *secondo la norma* $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$.

Se in particolare $m = n$ ed $a_{ij} = \begin{matrix} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{matrix}$, gli spazi introdotti coincidono con gli usuali spazi di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ ed $H^1(\Omega)$.

Poiché $\mathcal{H}_0(\Omega)$ si inietta con continuità in $H_0^{\varepsilon}(\Omega)$ per qualche $\varepsilon > 0$ (cfr. [5]), ricordando alcuni noti teoremi di immersione (cfr. [1]) si può garantire che

$$\mathcal{H}_0(\Omega) \subset \mathrm{L}^{p_\varepsilon^*}(\Omega) \qquad p_\varepsilon^* = 2n/(n-2\varepsilon) \qquad p_\varepsilon^* \geqslant 2 \tag{3}$$

con iniezione continua ed inoltre

$$\mathcal{H}_0(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{4}$$

con iniezione compatta.

Analogamente a quanto visto in relazione agli spazi di Sobolev $H^1(\Omega)$ (cfr. [7], [12]) si possono introdurre le nozioni di funzione non negativa (non positiva, nulla) su $E \subset \overline{\Omega}$ nel senso di $\mathcal{H}(\Omega)$, di funzione $u \leqslant v$ su $E \subset \overline{\Omega}$ nel senso di $\mathcal{H}(\Omega)$, di $\sup u$ in $E \subset \overline{\Omega}$ nel senso di $\mathcal{H}(\Omega)$. Si dimostrano inoltre le seguenti

Proposizioni. (i) *Se $u \geqslant 0$ su E in $\mathcal{H}(\Omega)$ allora $u \geqslant 0$ q.o. su E.*

(ii) *Sia $\vartheta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, una funzione continua lineare a pezzi con derivata discontinua in $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $\vartheta(u) \in \mathcal{H}(\Omega)$ con*

$$X_j(\vartheta(u)) = \vartheta'(u) X_j(u) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

e la convenzione che entrambi i membri valgano zero se $x \in \bigcup_{j=1}^{k} \{y \in \Omega / u(y) = a_j\}$.

(iii) *Sia $\vartheta(t)$ una funzione che soddisfa le ipotesi della proposizione* (ii) *con $\vartheta(0) = 0$. Allora se $u \in \mathcal{H}_0(\Omega)$, $\vartheta(u) \in \mathcal{H}_0(\Omega)$ e valgono le conclusioni della proposizione* (ii).

(iv) *Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ $(\mathcal{H}_0(\Omega))$ allora $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$ e $|u|$ appartengono ad $\mathcal{H}(\Omega)$ $(\mathcal{H}_0(\Omega))$. Se $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$ $(\mathcal{H}_0(\Omega))$ allora $\max(u, v) = v + \max(u-v, 0)$ e $\min(u, v) = v + \min(u-v, 0)$ appartengono ad $\mathcal{H}(\Omega)$ $(\mathcal{H}_0(\Omega))$.*

(v) *Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $X_j(u) = 0$ q.o. nell'insieme $\{x \in \Omega / u(x) = 0\}$ $(j = 1, \ldots, m)$.*

(vi) $X_j(u^+) = \begin{matrix} X_j(u) & \textit{se } u > 0 \\ 0 & \textit{se } u \leqslant 0 \end{matrix} \qquad X_j(u^-) = \begin{matrix} X_j(u) & \textit{se } u < 0 \\ 0 & \textit{se } u \geqslant 0. \end{matrix}$

Sussiste inoltre il seguente risultato.

Teorema 1. *Per ogni* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *esiste una costante positiva* C_Ω, *dipendente dall'aperto* Ω, *tale che*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \Big(\sum_{j=1}^m \|X_j(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2} = C_\Omega \|u\|_0 . \tag{5}$$

Dim. In [6] per ogni $u \in C^\infty(\overline{B(x_0, R)})$. Indicata con $|B(x_0, R)|$ la misura di Lebesgue della bolla $B(x_0, R)$, viene dimostrata la seguente disuguaglianza di Poincaré generalizzata

$$\int_{B(x_0,R)} |u - u_A|^2 \, dx \leq CR^2 \int_{B(x_0,R)} \sum_{j=1}^m |X_j u|^2 \, dx$$

$$u_A = |B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} u(x) \, dx .$$

Se in particolare $u \in C^\infty(\overline{B(x_0, 2R)})$, $\operatorname{supp} u \subset\subset B(x_0, R)$ si ottiene, ricordando la proprietà (v),

$$\int_{B(x_0,2R)} |u - u_A|^2 \, dx = \int_{B(x_0,R)} |u - u_A|^2 \, dx + \int_{B(x_0,2R)\setminus B(x_0,R)} |u_A|^2 \, dx$$

$$\leq 4CR^2 \int_{B(x_0,R)} \sum_{j=1}^m |X_j u|^2 \, dx .$$

Dalla precedente disuguaglianza si deduce

$$\int_{B(x_0,R)} |u|^2 \, dx \leq 2 \int_{B(x_0,R)} |u - u_A|^2 \, dx + 2 \int_{B(x_0,R)} |u_A|^2 \, dx \tag{6}$$

$$\leq C' R^2 \int_{B(x_0,R)} \sum_{j=1}^m |X_j u|^2 \, dx .$$

con $C' = 2C(1 + 4\,|B(x_0, R)|\,|B(x_0, 2R) \setminus B(x_0, R)|^{-1})$.

Sia ora $x_0 \in \Omega$. Essendo Ω un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ esisterà un $R > 0$ opportuno tale che $\Omega \subset B_E(x_0, (R/C_2)^{1/r}) \subset B(x_0, R)$. Se $u \in C_0^\infty(\Omega)$ la disuguaglianza (6) continua a sussistere in Ω e da quest'ultima si deduce la (5).

3 - Descrizione del problema e principali risultati

Si definisca in $C_0^\infty(\Omega)\times C_0^\infty(\Omega)$ la forma bilineare

$$b_0(u,\ v)=\int_\Omega (\mathrm{L}u)v\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^m\int_\Omega (X_ju)(X_jv)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^m\int_\Omega c_j(X_ju)v\,\mathrm{d}x\,.$$

Essendo $|b_0(u,\ v)|\leqslant(\|v\|_0+Mm\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)})\|u\|_0$ con $M=\sup_{x\in\Omega}|c_j(x)|$ $(j=1,\dots,m)$, la forma bilineare $b_0(u,\ v)$ può essere prolungata con continuità a tutto $\mathcal{H}_0(\Omega)$ o a tutto $\mathcal{H}(\Omega)$. La forma bilineare $b_0(u,v)$ non risulta invece in generale coerciva in $\mathcal{H}_0(\Omega)$. Introdotta la forma bilineare $b_\lambda(u,\ v)=b_0(u,\ v)+\lambda\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$ sussiste il seguente

Teorema 2. *Se l'aperto $\Omega\subset B(x_0,R_\lambda)$ con $R_\lambda>0$ opportuno, la forma bilineare $b_\lambda(u,\ v)$ è coerciva in $\mathcal{H}_0(\Omega)$. Per Ω qualsiasi, esiste un $\hat\lambda>0$ tale che per ogni $\lambda\geqslant\hat\lambda$ la forma bilineare $b_\lambda(u,\ v)$ è coerciva in $\mathcal{H}_0(\Omega)$.*

Dim. Per ogni $\varepsilon>0$ si ottiene

$$b_\lambda(u,\ u)\geqslant(1-Mm\varepsilon/2)\|u\|_0^2-[(Mm/2\varepsilon)-\lambda]\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2\,.$$

Ricordando la (5) si dimostra allora la prima parte del Teorema, mentre scegliendo $0<\varepsilon<2/Mm$, si dimostra la seconda parte ponendo $\hat\lambda\geqslant Mm/2\varepsilon$.

Nel seguito la forma bilineare $b_\lambda(u,\ v)$ si supporrà coerciva in Ω ossia si considererà implicitamente $\lambda\geqslant\hat\lambda$ per Ω qualsiasi e $\lambda\in\mathbb{R}$ per $\Omega\subset B(x_0,R_\lambda)$.

Def. Siano $f_j\in\mathrm{L}^2(\Omega)$ $(j=0,\dots,m)$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Una funzione $u\in\mathcal{H}(\Omega)$ viene detta *soluzione debole* dell'equazione

$$\mathrm{L}u+\lambda u=f_0+\sum_{j=1}^m(X_j^*f_j)\tag{7}$$

se per ogni $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, risulta

$$b_\lambda(u,\ \varphi)=\int_\Omega f_0\varphi\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^m\int_\Omega f_j(X_j\varphi)\,\mathrm{d}x\,.\tag{8}$$

Si consideri ora un ostacolo $\psi\in C^\alpha(\Omega)$, $0<\alpha<1$, e si associ ad esso l'insieme chiuso e convesso

$$K^\psi=\{v\in\mathcal{H}_0(\Omega)/v(x)\leqslant\psi(x)\ \text{ q.o. in }\ \Omega\}$$

che si supporrà non vuoto. In base alla teoria generale sulle disequazioni variazionali si può garantire l'esistenza e l'unicità di una funzione $u = u(\psi) \in K^{\psi}$ tale che per ogni $v \in K^{\psi}$

$$b_\lambda(u, v-u) \geq \int_\Omega f_0(v-u)\,dx + \sum_{j=1}^m \int_\Omega f_j(X_j(v-u))\,dx. \tag{9}$$

Per dimostrare la continuità hölderiana della funzione $u(\psi)$ verrà utilizzato un risultato di regolarità hölderiana locale relativo alle soluzione deboli dell'equazione (7). Nei successivi paragrafi verranno infatti dimostrati i seguenti teoremi.

Teorema 3. *Sia u una soluzione debole limitata del problema* (7) *con* $f_j \in L^p(\Omega)$, $p > n/\varepsilon$ $(j = 0, \ldots, m)$. *Allora esistono due numeri reali* $M > 0$ *e* $0 < \gamma < 1$ *indipendenti da u tali che se* $x_0 \in \Omega$ *e* $\rho \leq \rho_0$, *con* $0 < \rho_0 < \min(R_0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$, *risulta*

$$\operatorname{osc}(u, B(x_0, \rho)) = \sup_{B(x_0,\rho)} u - \inf_{B(x_0,\rho)} u \leq M\rho^\gamma. \tag{10}$$

Osservazione 1. La (10) comporta, ricordando la (1), che per $C_2\rho^{1/r} \leq \rho_0$

$$\operatorname{osc}(u, B_E(x_0, \rho)) \leq \operatorname{osc}(u, B(x_0, C_2\rho^{1/r})) \leq M'\rho^{\gamma/r}$$

e di conseguenza u risulta localmente hölderiana in Ω, ossia $u \in C^{\gamma/r}(\Omega)$.

Teorema 4. *Siano* $f_j \in L^p(\Omega)$ *con* $p > n/\varepsilon$ $(j = 0, \ldots, m)$. *La soluzione* $u(\psi)$ *della disequazione variazionale* (9) *appartiene a* $C^\beta(\Omega)$ *con* $\beta = \min(\alpha, \gamma/r)$.

4 - Dimostrazione del Teorema 3

Lemma 1 (Principio di massimo debole). *Assegnata* $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, *sia* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ *soluzione del problema di Dirichlet*

$$b_\lambda(u, v) = 0 \quad per\ ogni\ v \in \mathcal{H}_0(\Omega) \qquad u - \varphi \in \mathcal{H}_0(\Omega).$$

Detto $M = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$ *(nel senso di* $\mathcal{H}(\Omega)$*), si ottiene*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M. \tag{11}$$

Dim. Sia $M < +\infty$. Per la proposizione (iv) di 2, la funzione $\xi = \max(u - M, 0)$ appartiene ad $\mathcal{H}_0(\Omega)$ ed inoltre $\xi \geqslant 0$ q.o. in Ω. Ricordando la proposizione (v) di 2 si può allora garantire

$$b_\lambda(u, \xi) = b_\lambda(\xi, \xi) + \lambda M \int_\Omega \xi \, dx = 0 . \tag{12}$$

Per la coercività della forma bilineare $b_\lambda(u, v)$ in $\mathcal{H}_0(\Omega)$, la (12) comporta $\xi = 0$ ossia $u \leqslant M$ q.o. in Ω. La tesi segue allora osservando che $-u \leqslant M$ q.o. in Ω.

In modo del tutto equivalente a quanto visto in [12] si può inoltre dimostrare il seguente

Lemma 2. *Sia $u \in \mathcal{H}_0(\Omega)$ soluzione debole dell'equazione* (7) *con $f_j \in L^p(\Omega)$, $p > n/\varepsilon$ $(j = 0, \ldots, m)$. Allora esiste una costante K positiva, dipendente da C_Ω, tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K \sum_{j=0}^{m} \|f_j\|_{L^p(\Omega)} (\text{mes}\, \Omega)^{\varepsilon/n - 1/p} . \tag{13}$$

Dim. Teorema 3. Sfruttando il Lemma 2 ci si riconduce al caso omogeneo $f_j = 0$ $(j = 0, \ldots, m)$. Inoltre, dato che la soluzione debole in esame è limitata in Ω e $\rho_0 \leqslant R_0$, ci si riconduce al caso $\lambda = 0$ (cfr.[12]). Sia ora $x_0 \in \Omega$, $\nu\rho < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $\nu > 1$. La dimostrazione del Teorema risulta una conseguenza algebrica della disuguaglianza

$$\text{osc}(u, B(x_0, \rho)) \leqslant \eta \, \text{osc}(u, B(x_0, \nu\rho)) + H\rho^\mu \tag{14}$$

con $0 < \eta < 1$, $H \geqslant 0$ e $0 < \mu < 1$ (cfr. [12], [4]).

Per la verifica della (14) si può utilizzare un risultato di [8] osservando che ogni soluzione locale debole di $Lu = 0$ risulta sicuramente continua in Ω essendo L ipoellittico.

5 - Dimostrazione del Teorema 4

Osservazione 2. La dimostrazione del Teorema 4 può essere condotta, senza perdita di generalità, nel caso omogeneo $f_j = 0$ $(j = 0, \ldots, m)$. Si consideri infatti la funzione $u_0 \in \mathcal{H}_0(\Omega)$ soluzione debole dell'equazione (7) con $f_j \in L^p(\Omega)$, $p > n/\varepsilon$ $(j = 0, \dots, m)$ che per il Lemma 2 è limitata in Ω e quindi per l'Osservazione 1 appartiene a $C^{\gamma/r}(\Omega)$. Si dimostra facilmente che $u(\psi) = u_0 + u^*$ dove $u^* \in K^{\psi - u_0}$ risulta soluzione della disequazione variazionale $b_\lambda(u, \ v-u) \geqslant 0$ per ogni $v \in K^{\psi - u_0}$, con $(\psi - u_0) \in C^\beta(\Omega)$, $\beta = \min(\alpha, \ \gamma/r)$.

Lemma 3. *Si ponga* $B = B(x_0, \ \rho)$ *con* $\rho < \min((R_0 | C_2)^\nu, \ \mathrm{dist}_E(x_0, \partial\Omega))$. *Sia* $\psi \in L^\infty(B)$, $g \in \mathcal{H}(B)$, $K_g^\psi = \{v \in \mathcal{H}(B)/v \leqslant \psi$ q.o. *su* B, $v - g \in \mathcal{H}_0(B)\}$ *ed* $u(\psi)$ *soluzione in* K_g^ψ *della disequazione variazionale* $b_\lambda(u, \ v-u) \geqslant 0$ *per ogni* $v \in K_g^\psi$. *Se* $\hat{\psi} \in L^\infty(B)$ *vale la disuguaglianza*

$$\|u(\psi) - u(\hat{\psi})\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{15}$$

Dim. Introdotto il problema penalizzato

$$b_\lambda(u, \ v) + (1/\varepsilon)((u-\psi)^+, \ v)_{L^2(\Omega)} = -\, b_\lambda(g, \ v) \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{H}_0(B) \tag{16}$$

poiché $b_\lambda(u, \ v)$ è coerciva su B, la dimostrazione può essere condotta come in [3]. Infatti, in base al metodo di approssimazione di Galerkin, il problema (16) ammette per ogni $\varepsilon > 0$ almeno una soluzione $u_\varepsilon(\psi)$ limitata in $\mathcal{H}_0(B)$ uniformemente rispetto ad ε.

Poiché si dimostra che $w - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(\psi) = u(\psi)$ in $\mathcal{H}_0(B)$, dalla (4) segue che, per $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon(\psi) \to u(\psi)$ q.o. in B. La (15) si ottiene allora passando al limite per $\varepsilon \to 0$ nella relazione

$$\|u_\varepsilon(\psi) - u_\varepsilon(\hat{\psi})\|_{L^\infty(B)} \leqslant \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(B)}.$$

Dim. Teorema 4. La dimostrazione procede come in [4]. In base all'Osservazione 2 ci si riconduce al caso omogeneo e sia $u(\psi) \in K^\psi$ la soluzione della disequazione variazionale

$$b_\lambda(u, \ v-u) \geqslant 0 \quad \text{per ogni } v \in K^\psi. \tag{9)'$$

Pur di scegliere $K \geqslant \sup |\psi|$ si ottiene $\|u(\psi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K$ e quindi la funzione $u(\psi)$ risultata in Ω.

Sia $x_0 \in \Omega$, $B = B_E(x_0, \ \rho)$ con $\rho < \min(R_0/C_2, \ \mathrm{dist}_E(x_0, \ \partial\Omega))$ e sia $u_0 \in \mathcal{H}(B)$ soluzione debole del problema di Dirichlet

$$b_\lambda(u, \ v) = 0 \qquad \text{per ogni } v \in \mathcal{H}_0(B) \qquad u - u(\psi) \in \mathcal{H}_0(B).$$

Sfruttando il Principio di massimo debole si può dimostrare che u_0 risulta soluzione della disequazione variazionale

$$b_\lambda(u,\ v-u) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } v \in K^{\psi_0}_{u(\psi)}$$

con $\psi_0 = |B|^{-1} \int_B \psi(x)\, dx + 2\|\psi\|_{C^\alpha(\Omega)} \rho^\alpha$. Dal Lemma 3 si deduce

$$\|u(\psi) - u_0\|_{L^\infty(B)} \leqslant \|\psi - \psi_0\|_{L^\infty(B)} \leqslant 4\|\psi\|_{C^\alpha(\Omega)} \rho^\alpha. \tag{17}$$

Essendo $$|\mathrm{osc}\,(u(\psi),\ B) - \mathrm{osc}\,(u_0,\ B)| \leqslant 2\|u(\psi) - u_0\|_{L^\infty(B)}$$

dalla (17), osservando che u_0 è limitata e ricordando l'Osservazione 1, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{osc}\,(u(\psi),\ B) &\leqslant \mathrm{osc}\,(u_0,\ B) + 8\|\psi\|_{C^\alpha(\Omega)} \rho^\alpha \\ &\leqslant M'_{\rho^{\gamma/r}} + 8\|\psi\|_{C^\alpha(\Omega)} \rho^\alpha. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza comporta la continuità hölderiana locale della funzione $u(\psi)$ e la relazione prevista tra gli esponenti.

Bibliografia

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] M. BIROLI: [•]₁ *Regularity results for some elliptic variational inequalities with bounded measurable coefficients and applications*, Proc. Seventh Internat. Summer School, Berlin, 1979; [•]₂ *Disequazioni variazionali*, Corso I.N.D.A.M., 1982-83.

[3] A. BENSOUSSAN and J. L. LIONS, *Applications of variational inequalities in stochastic control*, North Holland, 1982.

[4] F. DAL FABBRO, *Hölder regularity of solutions of some degenerate-elliptic obstacle problems*, Riv. Mat. Univ. Parma **12** (1986), 9-18.

[5] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[6] D. JERISON, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander condition*, Duke Math. Jour. **53**, No. 2 (1986), 503-523.

[7] D. KINDERLEHRER and G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[8] S. KUSUOKA and D. STROOK, *Applications of Malliavin calculus* (III), J. Fac. Sci. Univ. Tokio, Sect. IA, Math. 34 (1987), 391-442.

[9] J. MOSER, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. XIV (1961), 577-591.

[10] M. K. V. MURTHY and G. STAMPACCHIA, *Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators*, Ann. Mat. Pura Appl. LXXX (1968), 1-122.

[11] A. NAGEL, E. M. STEIN and S. WAIGNER, *Balls and metric defined by vector field I: basic properties*, Acta Math. (1986), 103-147.

[12] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinuous*, Ann. Ist. Fourier **15** (1965), 189-258.

Sunto

Si considerano problemi con ostacolo associati ad una classe di operatori differenziali del secondo ordine ipoellittici e si dimostra per le soluzioni di tali problemi un risultato di hölderianità sfruttando una analoga regolarità delle soluzioni dei problemi di Dirichlet associati alla stessa classe di operatori.

***