Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 83-86

MOHAMED BEN AMMAR (*)

Decomposition d'Iwasawa du groupe spinoriel (**)

Introduction

Dans la présente Note, nous explicitons dans le cas des groupes spinoriels la décomposition d'Iwasawa sous la forme obtenue par Harish-Chandra pour les groupes semi-simples. Seulement, ici on utilise les algèbres de Clifford comme outil puissant.

1 - Rappels

(A) Def. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, muni de la forme quadratique Q de signature (p, q) définie de la manière suivante

$$\forall x \in V \qquad Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \qquad (p,\ q \in \mathbb{N}).$$

L'algèbre de Clifford de Q est une algèbre associative, unitaire et les conditions suivantes sont satisfaites:

(a) $C(V)$ contient $\mathbb{R}$ et V;
(b) $x^2 = Q(x)$ pour tout $x \in V$;
(c) V engéndre $C(V)$ comme algèbre sur $\mathbb{R}$;
(d) $C(V)$ n'est pas engendrée par aucun sous-espace propre de V.

(*) Indirizzo: 3, Rue H; Bougatfa, TN-1100 Zaghouan.
(**) Ricevuto: 27-VIII-1990.

(B) Conséquences. Soit (e_i) une base orthogonale de V par rapport à Q. On a:

(i) $e_i^2 = Q(e_i) = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant p$;
(ii) $e_j^2 = Q(e_j) = -1$ si $p+1 \leqslant j \leqslant p+q$;
(iii) $e_i e_j + e_j e_i = 0$ si $i \neq j$.

2 - Involutions de l'algèbre de Clifford

L'algèbre de Clifford $C(V)$ a trois involutions importantes. La première: l'involution principale π qui est le prolongement de $(-Id_V): x \mapsto -x$; pour $x \in V$, à $C(V)$ et $\pi(xy) = \pi(x) \pi(y)$.

De façon que $C(V)$ admet une décomposition en somme directe d'espaces: $C(V) = C_+(V) \oplus C_-(V)$; où $C_+(V)$ sous-algèbre paire et $C_-(V)$ sous-espace associé à -1, appelée *sous-algèbre de Clifford impaire.*

La deuxième l'antiinvolution principale τ, prolongement de l'identité de V à $C(V)$: $\tau(ab) = \tau(b) \cdot \tau(a)$; $a, b \in C(V)$.

La troisième antiinvolution, appelée conjugaison, notée $\nu = \pi \circ \tau$.

(A) Définition du groupe spinoriel.

$$\mathrm{Spin}(p, q) = \{x \in C_+(V);\ x \textit{ inversible};\ x \cdot V \cdot x^{-1} = V;\ x^\tau x = 1\}.$$

(B) Décomposition de Cartan.

Faisons la décomposition d'Iwasawa de ce group pour $p+q \geqslant 3$: on sait que $\mathrm{Spin}(p, q)$ est isomorphe à $\mathrm{Spin}(q, p)$ qui est un groupe de Lie simplement connexe, connexe, ayant pour algèbre de Lie

$$g = \{x \in C_+(V) | X^\tau + X = 0,\ [X, V] \subset V\} = \oplus \mathbb{R} e_i e_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant p+q.$$

Proposition 1. (a) *L'involution de Cartan de g est donnée par*

$$\theta(X) = -J_+^{-1} X^\tau J_+ = J_+ X J_+ \quad \textit{pour } X \in g \quad J_+ = e_1 e_2 \ldots e_p.$$

(b) *g admet la décomposition suivante*

$$g = \mathcal{K} \oplus \mathfrak{p} \quad (\textit{somme directe d' espaces vertoriels})$$

où

$$\mathfrak{p} = g \cap C_{+-}(V) \qquad \mathcal{K} = g \cap C_{++}(V)$$

$$C_{+-}(V) = C_-(V_+) \cdot C_-(V_-) \qquad C_{++}(V) = C_+(V_+) \cdot C_+(V_-)$$

$$V_+ = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathbb{R} e_i \qquad V_- = \bigoplus_{p+1 \leqslant j \leqslant p+q} \mathbb{R} e_j.$$

Preuve. On a

$$C_{++}(V) = \{X \in C_+(V) | \theta(X) = X\} \qquad C_{+-}(V) = \{X \in C_+(V) | \theta(X) = -X\}$$

$$\mathcal{K} = \Big(\bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \mathbb{R}\, e_i e_j\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p+1 \leq k < l \leq p+q} \mathbb{R}\, e_k e_l\Big) \qquad \mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq p < j \leq p+q} \mathbb{R}\, e_i e_j .$$

Proposition 2. $\mathcal{A} = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{R}\, e_i e_{p+i}$ *est une sous-algèbre abélienne maximale.*

3 - Détermination des racines de $(g, \mathcal{A})$

Désignons par $g_\alpha = \{X \in g | (H, X) = \alpha(H) X, \ H \in \mathcal{A}\}$ l'espace radiciel. Pour $H_p = p\, e_1 e_{1+p} + (p-1)\, e_2 e_{2+p} + \ldots + e_p e_{2p} \in \mathcal{A}$ on définit dans l'ensemble des racines Φ un ordre de la manière suivante

$$\Phi_+ = \{\alpha \in \Phi;\ \alpha(H_0) > 0\} \ \textit{l'ensemble des racines positives.}$$

Les éléments radiciels donnés ci-dessous engendrent l'algèbre nilpotente $\mathcal{N}$

(a) $$X_{\alpha_{ij}} = e_i e_j + e_j e_{i+p} - e_i e_{j+p} + e_{i+p} e_{j+p}. \ \text{pour } 1 \leq i < j \leq p .$$

Pour $$H = \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{l=p} \lambda_l e_l e_{l+p}$$

$$[H,\ X_{\alpha_{ij}}] = \tfrac{1}{2} [\lambda_i e_i e_{i+p} + \lambda_j e_j e_{j+p}, X_{\alpha_{ij}}] = (\lambda_i + \lambda_j) X_{\alpha_{ij}}$$

avec $\alpha_{ij}(H) = \lambda_i + \lambda_j$; $1 \leq i < j \leq p$.

α_{ij} est une racine positive car

$$\alpha_{ij}(H_0) = 2(p - i + 1 + p - j + 1) > 0 \qquad g_{\alpha_{ij}} = \mathbb{R} X_{\alpha_{ij}}.$$

(b) $Y_{\beta_{ij}} = e_i e_j + e_j e_{i+p} + e_i e_{j+p} - e_{i+p} e_{j+p}$ $\quad [H,\ \beta_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) Y_{\beta_{i,j}})$ pour $1 \leq i < j \leq p$;

β_{ij} est une racine positive puisque

$$\beta_{ij}(H_0) = 2(p - i + 1 - p + j - 1) = 2(j-1) > 0 \qquad g_{\beta_{ij}} = \mathbb{R} Y_{\beta_{ij}}.$$

(c) $Z^k \gamma_i = e_i e_k - e_{i+p} e_k$ $\ (1 \leq i \leq p)$ $\ 2p < k \leq p+q$ $\ [H,\ Z^k \gamma_i] = \lambda_i Z^k \gamma_i$;

$\gamma_i(H) = \lambda_i$ et γ_i est une racine positive vu que

$$\gamma_i(H_0) = 2(p - i + 1) > 0 \qquad g\gamma_i = \mathbb{R} Z^k \gamma_i.$$

Proposition 3 (Décomposition d'Iwasawa). *L'ensemble des racines positives du système $(g, \mathfrak{a})$ est formé par*

$$\Phi_+ = \{(\alpha_{ij})_{1 \leq i < j \leq p}\,,\ \ (\beta_{ij})_{1 \leq i < j \leq p}\,,\ \ (\gamma_i)_{1 \leq i \leq p}\}\,.$$

Alors g admet la décomposition suivante

$$g = \mathcal{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathcal{N} \ (\textit{somme directe d' espaces vectoriels}) \ \textit{avec}\ \mathcal{N} = \sum_{\alpha \in \Phi_+} g_\alpha\,.$$

Par conséquent $\qquad Spin\ (p,\ q) = K \cdot A \cdot N \qquad$ *où*

$$K = Spin\ (p) \times Spin\ (q)$$

$$A = \{(ch\,t_1 + (sh\,t_1)\ \mathrm{e}_1 \mathrm{e}_{1+p})(ch\,t_2 + (sh\,t_2)\ \mathrm{e}_2 \mathrm{e}_{2+p}) \ldots (ch\,t_p + (sh\,t_p)\ \mathrm{e}_p \mathrm{e}_{2p}) | t_i \in \mathbb{R};\ 1 \leq i \leq p\}$$

$$N = \{1 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \lambda_{ij} X_{\alpha_{ij}} + \sum_{1 \leq m < n1 \leq p} \mu_{mn}{}^{Y}\beta_{mn} + \sum_{\substack{2p < k < p+q \\ 1 \leq l \leq p}} \varepsilon_{lk} Z^{k} \gamma_l \ \text{ où } \lambda_{ij},\ \mu_{mn},\ \varepsilon_{lk} \in \mathbb{R}\}\,.$$

Bibliographique

[1] N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie (chap. 7 et 8), Hermann, Paris.

[2] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

[3] R. DEHEUVELS, *Formes quadratiques et groupes classiques*, Press Universitaires de France, 1981.

[4] S. HELGASON, *Differential géometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[5] M. ROMERIO, *Sur la décomposition des groupes pseudo-orthogonaux*, C. R. Acad. Sci., Paris 262, 1966.

Summary

In the present Note, we explicit in the case of the spin groups the Iwasawa décomposition in the form obtained by Harish-Chandra for the semi-simples groups. We use the Clifford algebras like powerful tool. These explicit formulas have been established in the study of the spin representations.

***