Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 271-280

MONICA BIANCHI (*)

Esistenza di una soluzione del problema di Cauchy per una equazione riguardante fenomeni di viscoelasticità non lineare (**)

1 — In questa nota viene considerata l'equazione a derivate parziali del terzo ordine

$$u_{tt}(t,\ x) - (g(u_x(t,\ x)))_x - \alpha u_{xxt}(t,\ x) = f(t,\ x) \tag{1.1}$$

nel cilindro limitato $Q_T = [0,\ T] \times \Omega$ ($\Omega = (0,\ 1)$), insieme alle condizioni di frontiera $u(t,\ 0) = u(t,\ 1) = 0$, per ogni $t \in (0,\ T)$, ed ai dati iniziali

$$u(0,\ x) = u_0 \qquad u_t(0,\ x) = u_1 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega\,. \tag{1.2}$$

L'equazione (1.1) è legata a problemi di viscoelasticità; essa è stata originariamente introdotta in [4] e successivamente ripresa e generalizzata da altri autori, sia nel caso in cui la variabile spaziale x appartenga ad un aperto limitato di $\mathbb{R}$ (cfr. [5]), che ad un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ (cfr. [2]). Il Problema di Cauchy per un sistema di equazioni che comprende come caso particolare la (1.1), è stato inoltre studiato in [3].

Nei lavori citati la funzione reale g viene supposta sufficientemente regolare: si considera infatti che ammetta derivate prime e seconde continue in $\mathbb{R}$ oltre a soddisfare opportune ipotesi sulla derivata prima.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale Finanziaria ed Economica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Largo Gemelli 1, I-20123 Milano.

(**) Ricevuto: 24-IV-1990.

Nel seguito si considererà invece g una funzione reale che verifica le seguenti ipotesi:

(1.3) g monotona non decrescente su $\mathbb{R}$ (nel seguito si indicherà ancora con g il grafo monotono multivoco corrispondente);

$$\gamma_0 |r|^{p-1} - K_0 \leqslant |s| \leqslant \gamma_1 |r|^{p-1} + K_1 \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \forall s \in g(r) \tag{1.4}$$

$p > 2$ e γ_0, γ_1, K_0 e K_1 con opportune costanti reali positive;

(1.5) $0 \in g(0)$.

In tali ipotesi si dirà che $u(t, x)$ è una *soluzione debole* del problema di Cauchy (1.1)-(1.2) in Q_T se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(i) $u \in L^\infty((0, T), W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega))$;

(ii) $u_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T), H_0^1(\Omega))$;

(iii) esiste una funzione $\chi \in L^{p'}(Q_T)$ con $\chi(t, x) \in g(u_x(t, x))$ per q.o. e $(t, x) \in Q_T$, tale che per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e per q.o. $t \in [0, T]$, risulta

$$(u_{tt}(t) - (\chi(t))_x - \alpha u_{xxt}(t) - f(t), \; v)_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} = 0 .$$

Si dimostra il seguente Teorema di esistenza.

Teorema. *Si supponga* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ *ed* $f \in L^2(Q_T)$. *Il problema di Cauchy* (1.1)-(1.2) *ammette almeno una soluzione debole.*

Osservazione. Per le (i) e (ii) essendo $u \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty((0, T), W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, risulta u debolmente continua in $[0, T]$ a valori in $(W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. Inoltre per le (ii) e (iii) essendo $u_{tt} \in L^{p'}((0, T), W^{-1,p'}(\Omega))$ si ottiene $u_t \in C([0, T], W^{-1,p'}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T), L^2(\Omega))$ e perciò risulta u_t debolmente continua in $[0, T]$ a valori in $L^2(\Omega)$. Questo permette di dare significato ai dati iniziali $u(0) = u_0$ ed $u_t(0) = u_1$.

La dimostrazione del Teorema di esistenza viene condotta inizialmente nel caso in cui la funzione g risulti sufficientemente regolare ricorrendo al metodo di approssimazione di Faedo-Galerkin e successivamente nel caso generale utilizzando un metodo originariamente introdotto in [1].

2 — Nel presente paragrafo si dimostra il Teorema supponendo $g \in C^1(\mathbb{R})$ soddisfacente le condizioni (1.3)-(1.5) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel seguito si indicherà con $(\cdot,\cdot)$ sia il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che il prodotto di dualità tra gli spazi funzionali X ed X'. Qualora si renda necessario specificare tali spazi funzionali si porrà $(\cdot,\cdot)_{X',X}$.

Sia $\{w^j\}$, $j = 1, \ldots, n, \ldots$, la base di $H_0^1(\Omega)$ costituita dalle autofunzioni dell'operatore $(-\Delta)$

$$-\Delta w^j = \lambda_j w^j \tag{2.1}$$

dove, in particolare, $w^j \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Indicando con V_n il sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ generato dai vettori $\{w^j\}$, $j = 1, \ldots, n$, e definendo $u^n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}(t)\, w^j \in V_n$, si consideri il sistema approssimante di Faedo-Galerkin

$$(u_{tt}^n,\ w^j) + (g(u_x^n),\ w_x^j)_{L^{p'},L^p} + \alpha(u_{xt}^n,\ w_x^j) = (f,\ w^j) \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{2.2$_j$}$$

con le condizioni iniziali

$$u^n(0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}(0)\, w^j \qquad \lim_{n\to\infty} u^n(0) = u_0 \quad \text{in} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{2.3}$$

$$u_t^n(0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_{jn}(0)\, w^j \qquad \lim_{n\to\infty} u_t^n(0) = u_1 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega). \tag{2.4}$$

Ricorrendo a risultati generali sui sistemi di equazioni differenziali non lineari viene garantita l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy (2.2)-(2.4) con $u^n \in C^2((0,\ t_n),\ V_n)$ per q.o. $t \in [0,\ t_n]$.

Moltiplicando ora l'equazione $(2.2)_j$ per $\alpha'_{jn}(t)$ e sommando rispetto a j si ottiene

$$(u_{tt}^n,\ u_t^n) + (g(u_x^n),\ u_{xt}^n)_{L^{p'},L^p} + \alpha(u_{xt}^n,\ u_{xt}^n) = (f,\ u_t^n).$$

Scegliendo $0 < t < t_n$ ed integrando l'equazione precedente in $[0,\ t]$ risulta

$$\begin{aligned}(1/2)\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \alpha\int_0^t \|u_{xt}^n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, \mathrm{d}s + \|G(u_x^n(t))\|_{L^1(\Omega)} \\ &= (1/2)\|u_t^n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|G(u_x^n(0)\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t (f(s),\ u_t^n(s))\, \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.5}$$

dove si è posto $G(r) = \int_0^r g(s)\, \mathrm{d}s$. Dalla (1.4) si ricava facilmente sfruttando la disuguaglianza di Young

$$(\gamma_0/2p)|r|^p - K_0' \leqslant G(r) \leqslant (2\gamma_1/p)|r|^p + K_1'.$$

Ricordando che $\lim_{n\to\infty} u^n(0) = u_0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e che $\lim_{n\to\infty} u_t^n(0) = u_1$ in $L^2(\Omega)$, si ottiene

$$\|u_t^n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \|G(u_x^n(0))\|_{L^1(\Omega)} \leqslant (2\gamma_1/p)\|(u_0)_x\|^p_{L^p(\Omega)} + K_1'.$$

Indicando con λ_0 la costante di immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ed osservando che $\|G(u_x^n(t))\|_{L^1(\Omega)} \geqslant (\gamma_0/2p)\|u_x^n(t)\|^p_{L^p(\Omega)} - K_0'$, dalla (2.5) segue la disuguaglianza

$$(1/2)\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\alpha - \varepsilon\lambda_0^2)\int_0^t \|u_{xt}^n(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, \mathrm{d}s + (\gamma_0/2p)\|u_x^n(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant \hat{C}$$

dove $\hat{C} = \hat{C}(t,\ u_0,\ u_1,\ f)$. Dalla precedente relazione si ricava

$$u^n \in L^\infty((0,\ T),\ W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{2.6}$$

$$u_t^n \in L^\infty((0,\ T),\ L^2(\Omega)) \cap L^2((0,\ T),\ H_0^1(\Omega)). \tag{2.7}$$

Si moltiplichi ora l'equazione $(2.2)_j$ per $\lambda_j \alpha_{jn}(t)$ e si sommi rispetto a j. Ricordando le (2.1) si ottiene

$$-(u_{tt}^n,\ u_{xx}^n) + (g'(u_x^n)u_{xx}^n,\ u_{xx}^n) + \alpha(u_{xxt}^n,\ u_{xx}^n) + (f,\ u_{xx}^n) = 0.$$

Scegliendo $0 < t < t_n$ ed integrando l'equazione precedente in $[0,\ t]$ risulta

$$\begin{aligned} &(\alpha/2)\|u_{xx}^n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_0^1 g'(u_x^n(s,\ x))(u_{xx}^n(s,\ x))^2\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant (\alpha/2)\|u_{xx}^n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_0^1 u_{tt}^n(s,\ x)\, u_{xx}^n(s,\ x)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}x - \int_0^t\int_0^1 f(s,\ x)\, u_{xx}^n(s,\ x)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Integrando per parti rispetto ad x e t il secondo addendo si ottiene

$$\int_0^t\int_0^1 u_{tt}^n(s,\ x)\,u_{xx}^n(s,\ x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = -\int_0^t\int_0^1 u_{xtt}^n(s,\ x)\,u_x^n(s,\ x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^t \|u_{xt}^n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s + \int_0^1 u_t^n(t,\ x)\,u_{xx}^n(t,\ x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u_t^n(0,\ x)\,u_{xx}^n(0,\ x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^t \|u_{xt}^n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s + C_\varepsilon\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|u_{xx}^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_0)_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Scegliendo opportunamente ε, dalla (2.8) e dalla relazione precedente, si ricava per il Lemma di Gronwall

$$u^n \in L^\infty((0,\ T),\ H^2(\Omega)) . \tag{2.9}$$

Per le (2.6), (2.7) e (2.9) esiste dunque un'opportuna sottosuccessione $\{u^\nu\}$ tale che

$$w^* - \lim_{\nu\to\infty} u^\nu = u \qquad \text{in } L^\infty((0,\ T),\ W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{2.10}$$

$$w^* - \lim_{\nu\to\infty} u_t^\nu = u_t \qquad \text{in } L^\infty((0,\ T),\ L^2(\Omega)) \tag{2.11}$$

$$w - \lim_{\nu\to\infty} u_t^\nu = u_t \qquad \text{in } L^2((0,\ T),\ H_0^1(\Omega)) \tag{2.12}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} u_x^\nu = u_x \qquad \text{in } L^2(Q_T) \tag{2.13}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} u_x^\nu(t,\ x) = u_x(t,\ x) \qquad \text{per q. o. } (t,\ x) \in Q_T . \tag{2.14}$$

Essendo inoltre, per la (1.4) e la (2.6), $g(u_x^n) \in L^\infty((0,\ T),\ L^{p'}(\Omega))$, esiste un'opportuna sottosuccessione, indicata ancora con $\{u^\nu\}$, tale che

$$w^* - \lim_{\nu\to\infty} g(u_x^\nu) = \chi \qquad \text{in } L^\infty((0,\ T),\ L^{p'}(\Omega)) . \tag{2.15}$$

Dalla (2.14) e dall'ipotesi di continuità della funzione g, segue inoltre $\lim_{\nu\to\infty} g(u_x^\nu(t,\ x)) = g(u_x(t,\ x))$ per q.o. $(t,\ x) \in Q_T$, e si può allora facilmente verificare (cfr. [5]) che $\chi = g(u_x)$.

Si consideri ora, per j fissato, la $(2.2)_j$ riscritta per $n = \nu$ e $\nu \geqslant j$. Dalle (2.11), (2.15) e (2.12) si deduce

$$\lim_{\nu\to\infty}(u_{tt}^{\nu},\ w^j)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t,\ w^j) \qquad \text{in } D'(0,\ T)$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(g(u_x^{\nu}),\ w_x^j)_{L^{p'}(\Omega),L^p(\Omega)}=(g(u_x),\ w_x^j)_{L^{p'}(\Omega),L^p(\Omega)} \qquad \text{in } D'(0,\ T)$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(u_{xt}^{\nu},\ w_x^j)=(u_{xt},\ w_x^j) \qquad \text{in } D'(0,\ T),$$

e perciò passando al limite in $D'(0,\ T)$, per $\nu\to+\infty$, nella $(2.2)_j$ per ogni j, si ottiene

$$(u_{tt}-(g(u_x))_x-\alpha u_{xxt}-f,\ w^j)_{W^{-1,p'}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}=0\,.$$

Dalla proprietà di densità della base $\{w^j\}$, la funzione u soddisfa dunque, nel senso delle distribuzioni, l'equazione (1.1).

Restano ora da mostrare le (1.2). Per le (2.3) e (2.4) si ha $\lim_{n\to\infty} u^n(0)=u_0$, $\lim_{n\to\infty} u_t^n(0)\to u_1$ in $L^2(\Omega)$.

Poiché, per le (2.6) e (2.7), $u^n\in C([0,\ T],\ L^2(\Omega))\cap L^\infty((0,\ T),\ L^2(\Omega))$, per ogni $t\in[0,\ T]$ esiste un'opportuna sottosuccessione $\{u^\nu(t)\}$ tale che $w-\lim_{\nu\to\infty} u^\nu(t)=u(t)$ in $L^2(\Omega)$ e quindi in particolare $u(0)=u_0$. Essendo inoltre

$$w-\lim_{\nu\to\infty}(u_{tt}^{\nu},\ w^j)_{W^{-1,p'}(\Omega),W^{1,p}(\Omega)}=(u_{tt},\ w^j) \quad \text{in} \quad L^{p'}(0,\ T)$$

scegliendo $\phi\in C^1(0,\ T)$, $\phi(T)=0$, si ottiene

$$\int_0^T\phi(s)(u_{tt}^{\nu}(s),\ w^j)\,\mathrm{d}s=-\int_0^T(u_t^{\nu}(s),\ \phi'(s)w^j)\,\mathrm{d}s-(u_t^{\nu}(0),\ \phi(0)w^j)\,.$$

Passando al limite per $\nu\to+\infty$ risulta

$$\int_0^T\phi(s)(u_{tt}(s),\ w^j)\,\mathrm{d}s=-\int_0^T(u_t(s),\ \phi'(s)w^j)\,\mathrm{d}s-(u_1,\ \phi(0)w^j)$$

ed integrando per parti il primo membro, data la densità della base $\{w^j\}$, si ottiene facilmente $u_1=u_t(0)$.

Osservazione. Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n>1$, un aperto limitato di frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare e g una funzione scalare appartenente a $C^1(\mathbb{R})$, monotona non decrescente con $g(0) = 0$ e soddisfacente in $\mathbb{R}$ le seguenti ipotesi di crescita polinomiale

$$(1.3)' \qquad \gamma_0 |r|^{p-2} - K_0 \leqslant g(r^2) \leqslant \gamma_1 |r|^{p-2} + K_1$$

$$(1.3)'' \qquad 0 \leqslant g'(r^2) r^2 \leqslant K g(r^2)$$

dove $p > 2$ e $\gamma_0, \gamma_1, K_0, K_1$ e K sono opportune costanti reali positive. Si consideri l'equazione a derivate parziali del terzo ordine

$$(1.1)' \qquad u_{tt}(t, x) - \operatorname{div}_x (g(|\nabla u(t, x)|^2) \nabla u(t, x)) - \alpha(\Delta u_t(t, x)) = f(t, x)$$

nel cilindro limitato $Q_T = [0, T] \times \Omega$, insieme alle condizioni di frontiera $u(t, x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ e per ogni $t \in (0, T)$, ed ai dati iniziali (1.2) (cfr. [2]).

Utilizzando il metodo di approssimazione di Faedo-Galerkin, per il problema di Cauchy (1.1)'-(1.2) si dimostra il Teorema di esistenza analogamente al caso dell'equazione (1.1). Infatti, come nel caso unidimensionale, valgono le stime a priori (2.6) e (2.7); la (2.9) si ottiene infine ricorrendo ad opportuni teoremi sulle tracce (cfr. [2]), all'ipotesi (1.3)$''$ e ad un risultato di regolarità per equazioni ellittiche.

3 — Per dimostrare il Teorema di esistenza nel caso generale si premette il seguente lemma che fornisce una opportuna regolarizzazione della funzione g (cfr. [1]). Si ponga $g(r^-) = \lim_{s \to r^-} g(s)$ e $g(r^+) = \lim_{s \to r^+} g(s)$.

Lemma. *Sia g una funzione reale che soddisfa in $\mathbb{R}$ le ipotesi* (1.3)-(1.5). *Allora esiste una successione di funzioni reali monotone non decrescenti $\{g_m\}$ con $g_m \in C^1(\mathbb{R})$, $g_m(0) = 0$ e soddisfacenti in $\mathbb{R}$ l'ipotesi di crescita polinomiale* (1.4) (*per opportune costanti reali positive γ_0', γ_1', K_0' e K_1'*) *per le quali sussiste la seguente proprietà*

($\mathscr{P}$) *Fissato $\eta > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero positivo δ_ε ed un indice m_ε (dipendenti anche da η) tali che se $|\xi - \eta| < \delta_\varepsilon$ risulta $g(\eta^-) - \varepsilon \leqslant g_m(\xi) \leqslant g(\eta^+) + \varepsilon$ per ogni $m \geqslant m_\varepsilon$.*

Dim. Si consideri una funzione $\phi \varepsilon C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(r) \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \phi \subset [0, \vartheta]$ con $\int_{\mathbb{R}} \phi(r)\, \mathrm{d}r = 1$, e si costruiscano le funzioni

$$(3.1) \qquad g_m(r) = g_m^+(r) + g_m^-(r)$$

dove si è posto:

$$g^+(r) = \begin{matrix} 0 & \text{se } r \leqslant 0 \\ g(r) & \text{se } r > 0 \end{matrix} \qquad g^-(r) = \begin{matrix} 0 & \text{se } r \geqslant 0 \\ g(r) & \text{se } r < 0 \end{matrix}$$

$$g_m^+(r) = m \int_{\mathbb{R}} g^+(r-s)\,\phi(ms)\,\mathrm{d}s \qquad g_m^-(r) = m \int_{\mathbb{R}} g^-(r+s)\,\phi(ms)\,\mathrm{d}s\,.$$

Si può facilmente verificare che le funzioni (3.1) appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$, sono monotone non decrescenti e che $g_m(0) = 0$. L'ipotesi di crescita polinomiale (1.4) viene invece garantita dalle seguenti diseguaglianze:

$$g_m^+(r) \leqslant g^+(r^-) \leqslant \gamma_1 (r)^{p-1} + K_1 \qquad \text{per } r \geqslant 0$$

$$g_m^+(r) \geqslant 0 \qquad \text{per } 0 < r \leqslant \vartheta/m$$

$$\begin{aligned} g_m^+(r) &\geqslant g^+((r-\vartheta/m)^+) \geqslant \gamma_0 (r-\vartheta/m)^{p-1} - K_0 \\ &\geqslant (\gamma_0/2)(r)^{p-1} - K_0(m) \qquad \text{per } r > \vartheta/m \end{aligned}$$

$$g_m^-(r) \geqslant g^-(r^+) \geqslant -\gamma_1(-r)^{p-1} - K_1 \qquad \text{per } r \leqslant 0$$

$$g_m^-(r) \leqslant 0 \qquad \text{per } -\vartheta/m \leqslant r < 0$$

$$\begin{aligned} g_m^-(r) &\leqslant g^-((r+\vartheta/m)^-) \leqslant -\gamma_0(-r-\vartheta/m)^{p-1} + K_0 \\ &\leqslant -(\gamma_0/2)(-r)^{p-1} + K_0(m) \qquad \text{per } r < -\vartheta/m \end{aligned}$$

con $K_0(m)$ costante reale opportuna tale che $K_0(m) \downarrow K_0$ per $m \to +\infty$. Infine per dimostrare la proprietà ($\mathscr{P}$) si procede come in [**1**].

Si riprenda ora la dimostrazione del Teorema di esistenza considerando le equazioni

$$(1.1)_{\mathrm{m}} \qquad u_{tt}(t,\ x) - [g_m(u_x(t,\ x))]_x - \alpha u_{xxt}(t,\ x) = f(t,\ x)\,.$$

Per quanto affermato in **2** e per il precedente lemma, esiste una successione di funzioni $\{u^m(t,\ x)\}$ soluzioni deboli dei problemi di Cauchy $(1.1)_{\mathrm{m}}$-(1.2) per le quali valgono le seguenti maggiorazioni

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u^m(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_1 \qquad \sup_{0\leq t\leq T} \|u_t^m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2$$

(3.2)
$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_{xx}^m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \qquad \sup_{0\leq t\leq T} \|g_m(u_x^m(t))\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_4$$

$$\int_0^T \|u_t^m(t)\|_{L^2(\Omega)}\, \mathrm{d}\, t \leq C_5$$

dove le costanti C_i sono indipendenti da m.

Considerando un'opportuna sottosuccessione $\{u^\nu\}$ si ottiene allora

$$w^* - \lim_{\nu\to\infty} u^\nu = u \qquad \text{in } L^\infty((0,\ T),\ W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$w^* - \lim_{\nu\to\infty} u_t^\nu = u_t \qquad \text{in } L^\infty((0,\ T),\ L^2(\Omega))$$

$$w - \lim_{\nu\to\infty} u_t^\nu = u_t \qquad \text{in } L^2((0,\ T),\ H_0^1(\Omega))$$

$$\lim_{\nu\to\infty} u_x^\nu = u_x \qquad \text{in } L^2(Q_T)$$

(3.3) $$\lim_{\nu\to\infty} u_x^\nu(t,\ x) = u_x(t,\ x) \qquad \text{per q. o. } (t,\ x)\in Q_T$$

(3.4) $$w - \lim_{\nu\to\infty} g_\nu(u_x^\nu) = \chi \qquad \text{in } L^{p'}(Q_T)\,.$$

Da un lemma di Mazur e dalla (3.4) per ogni $p>0$ e $\nu\geq p$, esistono delle costanti reali $c_{p\nu}$ positive con $\sum_{\nu=p}^{\infty} c_{p\nu}=1$ tali che $\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{\nu=p}^{\infty} c_{p\nu}g_\nu(u_x^\nu)\right)=\chi$ in $L^{p'}(Q_T)$; in particolare esiste dunque una sottosuccessione $\{p^j\}$ tale che

(3.5) $$\operatorname{Lim}_{p^j\to+\infty}\left(\sum_{\nu=p^j}^{\infty} c_{p^j\nu}g_\nu(u_x^\nu(t,\ x))\right) = \chi(t,\ x) \qquad \text{per q. o. } (t,\ x)\in Q_T\,.$$

Si consideri un punto $(\bar t,\ \bar x)$ in cui valgono la (3.3) e la (3.4). procedendo come in [**1**] si dimostra facilmente che $g((u_x(\bar t,\ \bar x))^-)\leq\chi(\bar t,\ \bar x)\leq g((u_x(\bar t,\ \bar x))^+)$, ossia che $\chi(\bar t,\ \bar x)\in g(u_x(\bar t,\ \bar x))$. Passando al limite per $\nu\to+\infty$ nell'equazione

$$(u_{tt}^\nu(t)-(g_\nu(u_x^\nu(t)))_x-\alpha u_{xxt}^\nu(t)-f(t),\ v)_{W^{-1,p'}(\Omega),\,W_0^{1,p}(\Omega)}=0$$

si ottiene infine

$$(u_{tt}(t) - (\chi(t))_x - \alpha u_{xxt}(t) - f(t), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 .$$

Bibliografia

[1] A. AMERIO and G. PROUSE, *On the non-linear wave equations with dissipative term discontinuous with respect to velocity* (I) e (II), Atti Accad. Nazion. Lincei Rend. 44 (1968), 491-496 (fasc. 4), 1-10 (fasc. 5).

[2] H. ENGLER, *Global regular solutions for the dyamic antiplane shear problem in nonlinear viscoelasticity*, Mathematische Zeitschrift **202** (1989), 251-259.

[3] A. FRIEDMAN and J. NECAS, *Systems of nonlinear wave equations with nonlinear viscosity*, Pacific J. Math. **135** (1988), 29-55.

[4] J. M. GREENBERG, R. C. MAC CAMY and V. J. MITZEL, *On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation* $\sigma'(u_x)\,u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$, J. Math. Mech. **17** (1968), 707-728.

[5] D. D. HAI, *On a quasilinear wave equations with nonlinear damping*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **110**A (1988), 227-239.

[6] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.

Sunto

Si introduce la nozione di soluzione debole del problema di Cauchy per una equazione riguardante fenomeni di viscelasticità non lineare e se ne dimostra l'esistenza.

***