Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 97-103

BIANCA MANFREDI (*)

Ancora sulle soluzioni quasiperiodiche di sistemi dinamici quasiperiodici (**)

A TRISTANO MANACORDA per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

Nell'ambito della Dinamica uno dei problemi di interesse sempre attuale è quello di individuare condizioni analitiche, almeno sufficienti, atte ad assicurare l'esistenza di vibrazioni persistenti e ricorrenti, quali sono le soluzioni quasiperiodiche di sistemi dinamici quasiperiodici.

Si può osservare che, essendo ogni funzione quasiperiodica necessariamente limitata sull'asse reale $\mathbb{R}$, le soluzioni quasiperiodiche del dato sistema dinamico (1) (cf. p. 2) devono ricercarsi nella classe delle funzioni limitate su $\mathbb{R}$; inoltre, tenendo presente la quasiperiodicità di (1), dalla limitatezza segue necessariamente la continuità (anzi l'uniforme continuità) su $\mathbb{R}$ delle soluzioni di (1); ora una soluzione limitata e continua su $\mathbb{R}$ risulta quasiperiodica sia nel caso che essa goda di certe *proprietà di stabilità* su $\mathbb{R}$ (1) sia nel caso che essa si presenti *normale* su $\mathbb{R}$ (2), non escludendo peraltro altre condizioni di quasiperiodicità (3).

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università di Parma, via Massimo d'Azeglio 85/A, I-43100 Parma.

(**) Lavoro eseguito con i fondi del 40%. – Ricevuto: 9-IV-1990.

(1) Varie proprietà di stabilità figurano ad esempio in [6], [5], [4], [10], [9], [7], [17], [16], [3].

(2) Una funzione di variabile reale, $g(t)$, definita e continua su $\mathbb{R}$, si dice «normale» (cfr. [6], p. 77] se da ogni successione $\{g(t+h_n)\}$, ove h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sono numeri reali arbitrari, si può estrarre una sottosuccessione $\{g(t+h_{n_\nu})\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ uniformemente convergente su $\mathbb{R}$.

(3) Cfr. [1], [2], [4], [5], [6], [10], [12], $[13]_2$, [15]. [3].

In $[13]_2$ tuttavia è stato provato di recente che per un sistema dinamico con termine forzante quasiperiodico basta l'asintotica-quasiperiodicità (4) delle soluzioni per affermare l'esistenza di oscillazioni forzate quasiperiodiche del dato sistema.

In questa Nota, introdotto il concetto di *funzione normale rispetto ad un insieme numerico*, si vuole provare che le soluzioni del sistema quasiperiodico (1) (sistema che generalizza quello considerato in $[13]_2$) risultano asintoticamente-quasiperiodiche se, e solo se, sono normali rispetto all'insieme, $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$, degli ε-quasiperiodi positivi del dato sistema (1). Ne segue allora che ad ogni soluzione normale rispetto a $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ corrisponde una vibrazione quasiperiodica e quindi un moto persistente e ricorrente retto dal sistema differenziale (1).

2 - Premesse

Siano: $t \in \mathbb{R}^+$ la variabile indipendente; D un insieme aperto e convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$ di elementi (t, x) con $x \in \mathbb{R}^n$; $f: D \to \mathbb{R}^n$ una funzione reale e continua; $B \subset D$ l'insieme $\{x\colon \|x\| < b\}$.

I problemi dinamici qui considerati sono retti dal sistema differenziale

$$\dot{x} = f(t;\ x) \qquad (\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) \tag{1}$$

ove $f \in Q(\mathbb{R} \times B,\ \mathbb{R}^n)$, Q essendo l'insieme delle funzioni quasiperiodiche in t, uniformemente rispetto a $x \in B$. Siano $l = l(\varepsilon)$ la lunghezza d'inclusione della data funzione quasiperiodica $f(t;\ x)$, e $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ l'insieme degli ε-quasiperiodi di $f(t;\ x)$.

Def. 1. Sia $\{h\}^+$ un insieme numerico definito su $\mathbb{R}^+$. Una funzione continua $\psi(t)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ si dirà *normale rispetto all'insieme* $\{h\}^+$ se da ogni successione, $\{h_n\} \subset \{h\}^+$, divergente ed ordinata in modo crescente, è possibile

(4) Secondo Fréchet [8] una funzione di variabile reale, $\varphi(t)$, definita e continua su $\mathbb{R}^+$ è «asintoticamente quasiperiodica» se

$$\varphi(t) = p(t) + q(t)$$

ove $p(t)$ (*termine principale*) è una funzione quasiperiodica e $q(t)$ (*termine correttivo*) è una funzione che tende a zero per $t \to +\infty$.

estrarre una sottosuccessione $\{h_{n_k}\}$ (divergente ed ordinata in modo crescente) tale che la successione di funzioni $\{\psi(t+h_{n_k})\}$ sia uniformemente convergente in $\mathbb{R}^+$.

Osservazione I. La Def. 1 può riguardarsi come un caso particolare della definizione di normalità per una funzione continua di variabile reale definita su $\mathbb{R}$, e qui ricordata in (2).

Osservazione II. Se $x(t)$ è una soluzione di (1) e se $\tau_\rho \in \{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ è un qualunque ε-quasiperiodo positivo di $f(t;\, x)$, allora la funzione $x(t+\tau_\rho)$ (*traslata di* $x(t)$) è una ε-soluzione di (1) (5).

3 - Su la asintotica quasiperiodicità delle soluzioni di (1)

Nel seguito si indicherà con $x(t)$ una qualunque soluzione del sistema differenziale (1). Inoltre una $x(t)$ asintoticamente quasiperiodica si dirà brevemente *soluzione as-qp*.

Si vuole provare il seguente

Teorema 1. *Ogni soluzione del sistema differenziale* (1) *normale rispetto all'insieme* $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ *è asintoticamente quasiperiodica. E reciprocamente.*

Dim. Sia, per ipotesi, $x(t)$ normale rispetto all'insieme $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$; per provare che $x(t)$ risulta una soluzione as-qp, basta dimostrare (6) che da una qualunque successione di traslate $\{x(t+a_n)\}$, con $0<a_n<a_{n+1}$ e del resto arbitrari, può estrarsi una sottosuccessione $\{x(t+a_h)\}$, uniformemente convergente su $\mathbb{R}^+$. A tal fine, in analogia con quanto è stato provato in [**13**]$_2$, si osserva che ad ogni

(5) Invero, leggendo in (1) $t+\tau_\rho$ al posto di t, si ha

$$\dot{x}(t+\tau_\rho)=f(t+\tau_\rho;\; x(t+\tau_\rho));$$

da cui

$$\|\dot{x}(t+\tau_\rho)-f(t;\; x(t+\tau_\rho))\|=\|f(t+\tau_\rho;\; x(t+\tau_\rho))-f(t;\; x(t+\tau_\rho))\|\leqslant\varepsilon$$

essendo, per ipotesi, $f(t;\, x)$ quasiperiodica in t, uniformemente rispetto a qualunque $x\in B$. Ne segue (cfr. [**10**], p. 3) che $x(t+\tau_\rho)$ è una ε-soluzione di (1).

(6) Cfr. Teoremi 3.5, 3.7 e 3.9 di [**18**], pp. 22-29.

elemento della successione numerica $\{a_n\}$ corrispondono un τ_n ε-quasiperiodo dell'insieme $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ ed un numero b_n appartenente all'intervallo $[0 \dots l)$ in modo da aversi $a_n = \tau_n + b_n$ (7); per $n = 1, 2, \dots$ risultano individuate così una successione divergente ordinata in modo crescente $\{\tau_n\} \subset \{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$, e una successione di elementi $\{b_n\}$ tutti appartenenti all'intervallo finito $[0 \dots l)$; e, pertanto, tale da ammettere una sottosuccessione $\{b_k\}$ convergente a un limite finito di $[0 \dots l)$. Ora a $\{b_k\}$ vengono associate due successioni $\{a_k\} \in \{a_n\}$ e $\{\tau_k\} \in \{\tau_n\} \subset \{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ in modo che $a_k = \tau_k + b_k$, essendo entrambi queste successioni divergenti ed ordinate in modo crescente. Inoltre, tenendo presente l'ipotesi, da Def. 1 segue che esiste una successione $\{\tau_h\} \in \{\tau_k\} \in \{\tau_n\} \subset \{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ tale che $\{x(t+\tau_h)\}$ è uniformemente convergente su $\mathbb{R}^+$. Osservato che a $\{\tau_h\}$ corrispondono due successioni $\{a_h\} \in \{a_k\} \in \{a_n\}$ e $\{b_h\} \in \{b_k\} \in \{b_n\}$ in modo che $a_h = \tau_h + b_h$, rimane da provare che $\{x(t+a_h)\}$ è la ricercata sottosuccessione di $\{x(t+a_n)\}$ uniformemente convergente su $\mathbb{R}^+$. Presi infatti due elementi $a_{h'}$, $a_{h''} \in \{a_h\}$ (con h', h'' «sufficientemente grandi» e del resto arbitrari) e detti $\tau_{h'}$, $\tau_{h''} \in \{\tau_h\}$, $b_{h'}$, $b_{h''} \in \{b_h\}$ i corrispondenti elementi tali che $a_{h'} = \tau_{h'} + b_{h'}$, $a_{h''} = \tau_{h''} + b_{h''}$, risulta, qualunque sia $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & \|x(t+a_{h'}) - x(t+a_{h''})\| \equiv \|x(t+\tau_{h'}+b_{h'}) - x(t+\tau_{h''}+b_{h''})\| \\
& \leq \|x(t+\tau_{h'}+b_{h'}) - x(t+\tau_{h''}+b_{h'})\| + \|x(t+\tau_{h''}+b_{h'}) - x(t+\tau_{h''}+b_{h''})\| < \sigma
\end{aligned}
$$

con $\sigma > 0$ comunque piccolo (indipendente da t) e h', $h'' > \bar{h}(\sigma)$: ciò in quanto $\{x(t+\tau_h)\}$ è uniformemente convergente su $\mathbb{R}^+$, e $x(t)$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^+$. Pertanto vale l'implicazione

$$x(t) \text{ normale rispetto all'insieme } \{\tau\}^+_{\varepsilon,f} \Rightarrow x(t) \text{ as-qp}.$$

L'implicazione inversa

$$x(t) \text{ as-qp} \Rightarrow x(t) \text{ normale rispetto all'insieme } \{\tau\}^+_{\varepsilon,h}$$

discende dal fatto sopra ricordato che se $x(t)$ è as-qp, una qualunque successione di traslate contiene sempre una sottosuccessione uniformemente convergente su $\mathbb{R}^+$ (ch. (6)). Le affermazioni del teorema risultano così concluse.

---

(7) Cfr. [5], p. 11.

In virtù della Osservazione II, si ha il

Corollario. *Se $x(t)$ è una soluzione normale rispetto all'insieme $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ del sistema* (1), *e se τ_ϱ è un qualunque ε-quasiperiodo positivo della data funzione $f(t;\ x)$, allora la traslata $x(t+\tau_\varrho)$ è una ε-soluzione as-qp di* (1).

4 - Su l'esistenza di soluzioni quasiperiodiche di (1)

Da quanto provato in 3 discende il seguente

Teorema II. *Ad ogni soluzione del sistema differenziale* (1) *normale rispetto all'insieme $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ corrisponde una soluzione quasiperiodica di* (1).

Dim. Dal Teorema I segue che ogni soluzione normale rispetto all'insieme $\{\tau\}^+_{\varepsilon,f}$ è as-qp e quindi esprimibile, secondo Fréchet (8), nella forma univocamente determinata

$$x(t) = p(t) + q(t) \tag{3}$$

ove il termine principale $p(t)$ è una funzione quasiperiodica e il termine correttivo $q(t)$ è una funzione che tende a zero per $t \to +\infty$.

Inoltre, poiché in virtù di (1), la soluzione as-qp $x(t)$ è derivabile con derivata uniformemente continua la funzione $\dot{x}(t)$ è pure as-qp e si ha (9)

$$\dot{x}(t) = \dot{p}(t) + \dot{q}(t) \tag{4}$$

ove $\dot{p}(t)$ è il termine principale della funzione as-qp $\dot{x}(t)$ e $\dot{q}(t)$ ne è il termine correttivo. D'altra parte da (1) si ottiene l'identità

$$\dot{x}(t) \equiv f(t;\ p(t)) + [f(t;\ p(t)+q(t)) - f(t;\ p(t))] \tag{5}$$

che confrontata con (4) implica

$$\dot{p}(t) = f(t;\ p(t)) \qquad \dot{q}(t) = f(t;\ p(t)+q(t)) - f(t; p(t))\,. \tag{6}$$

---

(8) Cfr. [8], pp. 343-344.
(9) Cfr. [8], pp. 346-347.

La $(6)_1$ afferma che il termine principale di $x(t)$ è soluzione del sistema differenziale (1) e rappresentando esso una funzione quasiperiodica il Teorema II rimane concluso.

Bibliografia

[1] L. Amerio and G. Prouse, *Almost periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Company, N. Y., 1971.

[2] N. Bogoliubov, *Quasiperiodic solutions in problems of nonlinear mechanics*, Nankova Dumka, Kiev, 1964.

[3] R. Campanini, *Sull'esistenza di soluzioni periodiche*, Rend. Mat. (VII) **9** Roma (1989), 237-246.

[4] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[5] S. Cinquini, *Funzioni quasi-periodiche*, Litografia Tacchi, Pisa, 1948-49.

[6] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[7] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Springer-Verlag, N. Y., 1974.

[8] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Revue Scientifique **79** (1941), 342-354.

[9] W. hahn, *Stability of motion*, Springer-Verlag, N. Y., 1967.

[10] A. Halanay, *Differential equations (stability, oscillations, time lags)*, Acad. Press., N. Y., 1966.

[11] B. M. Levitan and V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge University Press, 1982.

[12] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-301.

[13] B. Manfredi: $[\bullet]_1$ *Dissipatività, quasiperiodicità e ricorrenza*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 449-458; $[\bullet]_2$ *Oscillazioni forzate quasiperiodiche in sistemi dinamici quasiperiodici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXVII (1989), 249-256.

[14] S. Marchi, *Alcune proprietà su insiemi di funzioni as-quasiperiodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 65-71.

[15] V. A. Pliss, *Nonlocal problems of the theory of oscillations*, Acad. Press, N. Y., 1966.

[16] C. Risito, *On Markov stability*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 85-88.

[17] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy, *Stability theory by Liapunov's direct method*, Springer-Verlag, N. Y., 1977.

[18] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer-Verlag, N. Y., 1975.

Summary

After introducing the notion of «normal function w.r.t. a set of numbers» we show first that every normal solution w.r.t. the set $\{\tau\}^{+}_{\varepsilon,f}$ *of the positive ε-quasiperiods of a given dynamic quasiperiodic system is asymptotically quasiperiodic, and conversely. Moreover we prove that every normal solution w.r.t.* $\{\tau\}^{+}_{\varepsilon,f}$ *is always related to a quasiperiodic solution of given dynamic quasiperiodic system.*

***