Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 25-34

MAURO SASSETTI e CARLO SILLI (*)

Sulla stabilità delle oscillazioni di un corpo rigido con massa variabile (**)

A TRISTANO MANACORDA per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

C. Silli, in un suo lavoro [4], studia il comportamento e la stabilità delle oscillazioni di un missile con massa variabile, con variabilità non relativistica ma dovuta al consumo di carburante e all'espulsione di scorie. Le oscillazioni avvengono in un piano verticale invariabile e nell'ipotesi generale di un legame non lineare tra le azioni aereodinamiche e l'angolo d'attacco; sotto opportune ipotesi di carattere fisico per alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame, questo viene descritto da un sistema autonomo nell'angolo d'attacco α e nella sua derivata prima $\dot{\alpha}$. In tali ipotesi si ottiene che le oscillazioni del missile nel piano verticale sono asintoticamente stabili.

Nel presente lavoro si mostra che l'asintotica stabilità delle oscillazioni continua a sussistere anche se il sistema differenziale non è autonomo. Per ottenere questo risultato è stato utilizzato il metodo introdotto da Matrosov [2], che richiede l'esistenza di una seconda funzione ausiliaria negli insiemi del piano $(\alpha, \dot{\alpha})$ in cui la derivata della funzione di Liapunov non ha segno costante.

Si coglie poi l'occasione per rettificare una svista in cui è caduto l'Autore in [4].

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del 40% del M.P.I. – Ricevuto: 3-V-1989.

2 - Posizione del problema

Come in [4] sia G il centro di massa del missile R preso in esame. Sia $\boldsymbol{v}$ la velocità di un punto O' del suo asse longitudinale, velocità di direzione e verso invariabili.

Si consideri la terna $T(O';\ x,\ y,\ z)$ con l'asse z coincidente con l'asse longitudinale di R e rivolto verso poppa, l'asse y nel piano $(z,\ \boldsymbol{v})$ e l'asse x tale da formare coi precedenti una terna sinistrorsa.

Supponiamo poi che il moto di R sia tale che il piano $(z,\ \boldsymbol{v})$ durante il moto resti invariabile. In detto piano indichiamo con α l'angolo di attacco formato dalla direzione positiva della velocità e dal semiasse negativo dell'asse delle z, angolo questo misurato positivamente in senso orario rispetto a $O'x$.

Si ha dalla prima equazione cardinale di moto [1]

$$m\ddot{G} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_R + m(\ddot{G})_R + 2m\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R \tag{2.1}$$

con $m = m(t)$ massa di R al tempo t, $\boldsymbol{F}$ risultante delle forze esterne indipendenti dalle forze di distacco e $\boldsymbol{p}_R$ dato da [1]

$$\boldsymbol{p}_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S-S_1} \rho \boldsymbol{v}_R \, \mathrm{d}S$$

con $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}_P - \dot{P}$ dove $\dot{P}$ è la velocità di P prima del distacco e $\boldsymbol{v}_P$ la velocità immediatamente dopo il distacco.

Si ha poi dalla seconda equazione cardinale [1]

$$\sigma_G\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma_G\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_G - \boldsymbol{\mu}_G \tag{2.2}$$

con σ_G omografia d'inerzia di R rispetto a G, $\boldsymbol{\mu}_G$ momento delle forze di distacco dato da [1]

$$\boldsymbol{\mu}_G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S-S_1} \rho (P - G) \wedge \boldsymbol{v}_R \, \mathrm{d}S$$

e con $\boldsymbol{M}_G$ momento delle forze esterne diverse dalle forze di distacco.

Nell'intervallo di tempo $(t_0;\ +\infty)$ con $t_0 \geqslant 0$ sia $I(t)$ il momento d'inerzia del missile R rispetto alla retta r parallela all'asse x per il centro di massa G, grandezza questa che, assieme alla massa $m(t)$, è positiva e sempre descrescente con t e con estremo inferiore positivo.

Poiché è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\boldsymbol{i}$, e nell'ipotesi che sia $\boldsymbol{\mu}_G = 0$, si ha dalla (2.2)

$$I(t)\,\ddot{\alpha} = M_{GX}. \tag{2.3}$$

Sia il centro di spinta O del missile situato sull'asse longitudinale e $l(t)$ sia la sua distanza dal centro di massa G, distanza che prendiamo positiva se O è a poppa rispetto a G, negativa nel caso opposto.

Le forze aerodinamiche dipendono dalla velocità $\boldsymbol{v}$ di O', oltre che da $\boldsymbol{\omega}$, e per la componente del loro momento secondo l'asse x assumiamo la seguente espressione [3]

$$M_{GX} = -K_H \rho d^3 v^2 \operatorname{sen}\alpha - K_M \rho d^4 v\dot{\alpha}$$

dove ρ è la densità dell'aria che supponiamo costante, d il diametro del missile e dove K_M e K_H sono dati da [3]

$$K_M = \frac{K_D + K_L\cos\alpha}{d}\, l(t) \qquad K_H = \frac{K_M}{d}\, l(t)$$

con K_L costante positiva e $K_D = K_D(\alpha)$ funzioni pari, positiva di α tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ estremi inclusi, derivabile almeno due volte [3].

Si ha ora dalla (2.3)

$$\ddot{\alpha}(t) + A(t) f(\alpha(t))\,\dot{\alpha}(t) + B(t) f(\alpha(t)) \operatorname{sen}\alpha(t) = 0 \tag{2.4}$$

dove $f(\alpha)$ è la funzione positiva data da

$$f(\alpha) = K_D(\alpha) + K_L\cos\alpha$$

e dove $A(t)$ e $B(t)$ sono dati da

$$A(t) = \frac{\rho d^3\, l(t)\, v(t)}{I(t)} \qquad B(t) = \frac{\rho d l^2(t)\, v^2(t)}{I(t)}. \tag{2.5}$$

È a questo punto opportuno osservare che in [4], per errore materiale, $A(t)$ e $B(t)$, anziché avere l'espressione precedente erano dati da

$$A(t) = \frac{\rho d^2\, l^2(t)\, v(t)}{I(t)} \qquad B(t) = \frac{\rho d^2\, l(t)\, v^2(t)}{I(t)}. \tag{2.5$'$}$$

Nei paragrafi 3, 4 e 5 di [4] si supponeva $l(t) > 0$, in modo da ottenere $B(t) > 0$ per le (2.5)′, mentre $A(t)$ risultava comunque positivo.

Sotto la stessa ipotesi su $l(t)$, le espressioni rettificate (2.5) implicano adesso $A(t) > 0$, mentre $B(t)$ è sempre positivo. Pertanto la sostituzione delle (2.5)′ con le (2.5) non modifica i risultati ottenuti in detti paragrafi; i risultati del paragrafo 6, invece, non sono validi.

3 - Studio dell'equazione in $\alpha(t)$

Ci proponiamo ora di studiare l'equazione (2.4)

$$\ddot{\alpha}(t) + A(t) f(\alpha(t))\,\dot{\alpha}(t) + B(t) f(\alpha(t)) \operatorname{sen} \alpha(t) = 0 \tag{3.1}$$

con le seguenti ipotesi e notazioni:

$A \in C^0[0, +\infty)$, $0 < \bar{A} < A(t) < \bar{\bar{A}}$ crescente

$B \in C^1[0, +\infty)$, $0 < \bar{B} < B(t) < \bar{\bar{B}}$ crescente

$f \in C^0[-\pi/2, \pi/2]$, pari, $f(\alpha) > \bar{f} > 0$

Ω aperto di IR^2 contenente l'origine 0

$d_0 = d(0, \partial\Omega)$ (eventualmente uguale a $+\infty$)

$\| \ \|$ è la norma euclidea di IR^2.

$z(t) = (\alpha(t, t_0, \alpha_0, \dot{\alpha}_0), \dot{\alpha}(t, t_0, \alpha_0, \dot{\alpha}_0))$ (più semplicemente scriveremo $(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$) è la soluzione dell'equazione (3.1) verificante le condizioni iniziali $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}_0$, con $t_0 \geq 0$.

Fissati $\gamma \in (0, d_0)$ e $t_0 \geq 0$ $\forall t \geq t_0$ e $\forall \alpha$ tale che $|\alpha| < \gamma$, si ha ora per un opportuno $C > 0$

$$\frac{A(t) f(\alpha)}{B^{1/2}(t)} + \frac{\dot{B}(t)}{2B^{3/2}(t)} > \frac{C}{B^{1/2}(t)} \equiv \Phi(t)$$

con $\Phi(t)$ funzione continua decrescente tale che

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) \sqrt{B(t)}\, dt = +\infty . \tag{3.2}$$

Vogliamo provare che la soluzione nulla $z(t) = (0, 0)$ della (3.1) è equi-asintoticamente stabile, cioè:

(i) è uniformemente stabile

$$\forall \gamma \in (0, d_0] \; \exists \delta(\gamma) > 0 \colon \forall t_0 \geqslant 0 \; \|z(t_0)\| < \delta(\gamma) \Rightarrow \|z(t)\| < \gamma \; \forall t \geqslant t_0 ;$$

(ii) è equiattrattiva

$$\forall t_0 > 0 \; \exists \sigma > 0 \colon \|z(t_0)\| < \sigma \Rightarrow \forall \nu > 0, \; \exists T(\nu, t_0) \colon \|z(t)\| < \nu$$
$$\forall t \geqslant t_0 + T \; (z(t) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty).$$

Eseguiamo nella (3.1) il cambiamento di variabile

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{B(\xi)}\, d\xi$$

in modo da trasformarla nell'equazione:

$$\alpha'' + \left(\frac{\dot{B}(t(s))}{2B^{3/2}(t(s))} + \frac{A(t(s)) f(\alpha)}{B^{1/2}(t(s))}\right)\alpha' + f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha = 0$$

dove $' = \frac{d}{ds}$, ovvero nel sistema equivalente

(3.3) $$\alpha' = \beta \qquad \beta' = -F(s, \alpha)\beta - f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha$$

in cui è posto

(3.4) $$F(s, \alpha) = \frac{\dot{B}}{2B^{3/2}} + \frac{A}{B^{1/2}} f(\alpha).$$

Proveremo che la soluzione nulla della (3.3) è equi-asintoticamente stabile.
A tal scopo introduciamo la funzione

$$V(\alpha, \beta) = \frac{\beta^2}{2} + \int_0^\alpha f(\xi) \operatorname{sen} \xi \, d\xi \equiv \frac{\beta^2}{2} + G(\alpha).$$

$G(\alpha)$ è una funzione pari, positiva in $[-\pi/2, \pi/2]$, nulla solo in $\alpha = 0$, decrescente in $[-\pi/2, 0]$, crescente in $[0, \pi/2]$.

La funzione V è definita positiva; inoltre lungo ogni traiettoria integrale del sistema (3.3) si ha

$$V' = -\beta^2 F(s, \alpha) \leqslant 0 .$$

Dunque V verifica le ipotesi del teorema di stabilità di Liapunov, e questo prova l'uniforme stabilità della soluzione nulla di (3.3)

$$\forall \gamma \in (0, d_0] \ \exists \delta(\gamma) > 0 \colon \|z(s_0)\| < \delta \Rightarrow \|z(s)\| < \gamma \qquad \forall s \geqslant s_0 .$$

Poiché V' è maggiorata da una funzione che è solo semidefinita, non si può applicare il teorema di Liapunov sulla stabilità asintotica. Per provare questa stabilità ricorriamo al teorema di Matrosov (cfr. [2], Teorema 1.1, pag. 1339).

A tal scopo accanto alla funzione V, introduciamo la funzione

$$V^* = -c\beta^2 \quad \text{con } c \text{ costante tale che} \quad V'(\alpha, \beta) \leqslant V^*(\beta)$$

e la funzione

$$W(\alpha, \beta) = \alpha\beta . \tag{3.5}$$

Per quest'ultima, tenendo conto delle (3.3), risulta su ogni traiettoria integrale

$$W'(\alpha, \beta) = \beta^2 - F(s, \alpha)\alpha\beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha f(\alpha) .$$

W' è definitivamente diversa da zero nell'insieme in cui si annulla V^*, secondo la definizione di Matrosov, cioè

$$\forall r, R \quad (0 < r < R < \gamma) \ \exists \varepsilon(r, R) > 0 \ \exists \xi(r, R) > 0 \colon$$
$$|W'(\alpha, \beta)| > \xi \quad \text{per } r < \|z\| < R \quad |\beta| < \varepsilon \quad s \geqslant s_0 .$$

(Basta osservare che per $\beta = 0$ è $W' = -\alpha \operatorname{sen} \alpha f(\alpha)$, nulla solo in $\alpha = 0$, e ragionare per continuità).

Sono pertanto verificate le ipotesi del teorema di Matrosov e questo ci permette di ottenere la stabilità asintotica richiesta.

Per completezza riportiamo la dimostrazione di Matrosov adattandola al problema esaminato e con lievi modifiche.

Avendo già l'uniforme stabilità manca da verificare che l'origine è attrattiva, cioè che se è $\sigma=\delta(\gamma)$, $s_0>0$, $\|z(s_0)\|<\sigma$, allora $\forall\nu\in(0,\ \gamma)\ \exists s_0'>s_0$: $\|z(s_0')\|<\delta(\nu)$; questo basta per dire che $\|z(s)\|<\nu\ \forall s\geq s_0'$.

Ragioneremo per assurdo, supponendo che

$$\|z(s_0)\|<\sigma \qquad \delta(\nu)\leq\|z(s)\|\leq\gamma \quad \forall s\geq s_0\,.$$

(a) Introdotto l'insieme

$$N_\varepsilon=\{z=(\alpha,\ \beta)\in IR^2\colon\ \delta(\nu)\leq\|z\|\leq\gamma,\ |\beta|<\varepsilon\}$$

vogliamo far vedere che per un opportuno $\varepsilon>0$ la traiettoria integrale non può stare definitivamente in N_ε. Se così non fosse, si avrebbe $\forall\varepsilon>0\ \exists s'>0$: $\delta(\nu)\leq\|z\|\leq\gamma$, $|\beta(s)|<\varepsilon\ \forall s>s'$.

Consideriamo invece la funzione ausiliaria W introdotta in (3.5): $W(z)=\alpha\beta$; su ogni traiettoria integrale si ha

$$W'(z(s))=\beta^2-F(s,\ \alpha)\,\alpha\beta-\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha f(\alpha) \tag{3.6}$$

$$=\beta^2-\frac{\dot B(t(s))}{2B^{3/2}(t(s))}\alpha\beta-\frac{A(t(s))}{B^{1/2}(t(s))}f(\alpha)\,\alpha\beta-\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha f(\alpha)\,;$$

vogliamo far vedere che, per un opportuno $m>0$, è

$$\int_{s'}^{s}W'(z(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\leq H_\varepsilon\overset{\to 0}{\rightrightarrows}-m(s-s')\,.$$

Questa fornisce l'assurdo, perché risulterebbe che sulla traiettoria $W(s)$ dovrebbe divergere per $s\to+\infty$, mentre su di essa W è limitata ($|W|\leq W_0$).

Infatti, sia per $\delta(\nu)\leq\|z\|\leq\gamma$, $\dfrac{\dot B}{2B^{3/2}}\leq L$, $\dfrac{A}{B^{1/2}}f(\alpha)\leq M$. Sia poi $m_\varepsilon=\min\{\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha f(\alpha),\ \alpha\colon (\alpha,\ \beta)\in N_\varepsilon\}$, $m=\min\{\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha f(\alpha),\ \delta(\nu)\leq|\alpha|\leq\gamma\}>0$. Allora è

$$\int_{s'}^{s}W'(z(\sigma))\,d\sigma\leq(\varepsilon^2+L\gamma\varepsilon+M\gamma\varepsilon-m_\varepsilon)(s-s')=H_\varepsilon\overset{\to 0}{\rightrightarrows}-m(s-s')\,.$$

Dunque $\exists\varepsilon>0\ \exists T>0$: $\forall s'>0\ |\beta(s)|\geq\varepsilon$ per $s>s'$, e quindi la traiettoria non può stare definitivamente in N_ε. Inoltre poiché

$$\frac{m}{2}(s-s') \leqslant \left|\int_{s'}^{s} W'\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant 2W_0$$

si ricava che la traiettoria esce da N_ε in un intervallo di tempo tale che $s-s' \leqslant \dfrac{4W_0}{m} \equiv \Delta$.

(b) La traiettoria d'altra parte non può stare definitivamente fuori di N_ε ma, una volta uscitane, deve rientrarci.

Vogliamo infatti provare che $\forall \chi > 0\ \exists \{s_n\},\ s_n \to +\infty\colon |\beta(s_n)| < \chi$.

Ragioniamo per assurdo, supponendo che $\exists \chi > 0 \colon |\beta(s)| > \chi\ \ \forall s > \bar{s}$ opportuno. Allora sulla traiettoria integrale si avrebbe

$$V(z(s)) - V(z(\bar{s})) = \int_{\bar{s}}^{s} V'\,d\sigma = -\int_{\bar{s}}^{s} \beta^2 F(\sigma,\ \alpha)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\leqslant -\chi^2 \int_{\bar{s}}^{s} \Phi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = -\chi^2 \int_{\bar{t}}^{t} \Phi(\tau)\sqrt{B(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

e dunque, per la (3.2), V dovrebbe divergere; questo è assurdo poiché in $\{\|z\| \leqslant \gamma\}$ la V è limitata.

(c) Vogliamo studiare le oscillazioni intorno a $\beta = 0$.

Per quanto visto sopra, scelto ε come in (a) e fissato χ di (b) uguale a $\varepsilon/2$, esistono due successioni divergenti $\{s'_n\}$ e $\{s''_n\}$ con $s'_n < s''_n$ tali che s'_n è l'ultimo istante per cui $|\beta(s'_n)| = \varepsilon/2$, s''_n è il primo istante per cui $|\beta(s''_n)| = \varepsilon$, in modo che $\varepsilon/2 < |\beta(s)| < \varepsilon\ \ \forall s \in (s'_n,\ s''_n)$. Si ha

$$V(z(s''_n)) - V(z(s'_n)) = -\int_{s'_n}^{s''_n} \beta^2 F(s,\ \alpha)\,\mathrm{d}s \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{s'_n}^{s''_n} \Phi(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.8}$$

D'altra parte $\|z(s''_n) - z(s'_n)\| \geqslant \varepsilon/2$ e questo può aversi solo se $\exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon,\ \nu)$, $\exists \bar{\eta} = \bar{\eta}(\varepsilon,\ \nu)$ tali che

$$s''_n - s'_n \geqslant \bar{\eta} \qquad \forall n \geqslant \bar{n} \tag{3.9}$$

(infatti è
$$\|z(s''_n) - z(s'_n)\| = \left\|\int_{s'_n}^{s''_n} z'\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant \int_{s'_n}^{s''_n} \{\beta^2 + (\Phi(s)\beta + f(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2\}^{1/2}\,\mathrm{d}s \leqslant (s''_n - s'_n)\,c(\nu))\,.$$

Allora dalle (3.8) e (3.9), tenendo anche conto della descrescenza di Φ, si deduce che definitivamente è

$$V(z(s_n'')) - V(z(s_n')) < -\frac{\varepsilon^2}{4}\,\Phi(s_n'')\,\bar{\eta}\,. \tag{3.10}$$

(d) Vogliamo far vedere che una completa oscillazione attorno a $\beta = 0$ avviene in un tempo finito.

Sia adesso $\{\sigma_n\}$ la successione di quegli istanti per cui

$$s_n' < s_n'' < \sigma_n \leqslant s_{n+1}' \qquad |\beta(\sigma_n)| = \varepsilon/2 \qquad |\beta(s)| > \varepsilon/2 \quad \forall s \in (s_n'', \ \sigma_n)\,.$$

Allora

$$s_{n+1}' - s_n' = (s_n'' - s_n') + (\sigma_n - s_n'') + (s_{n+1}' - \sigma_n) \leqslant \Delta + \frac{4\gamma}{\varepsilon} + \Delta \equiv \tilde{T}\,.$$

Infatti, la valutazione per $s_n'' - s_n'$ e $s_{n+1}' - \sigma_n$ è dedotta da quanto si è visto in (a), dato che, in un intervallo di tempo minore o uguale a Δ, $|\beta(s)|$ deve diventare maggiore o uguale a ε.

Per quanto riguarda $\sigma_n - s_n''$, osservando che per continuità β ha segno costante in tale intervallo di tempo (supponiamo ad esempio $\beta > 0$), e che $|\alpha| < \gamma$, $|\beta| \geqslant \varepsilon/2$, da $\alpha' = \beta$ si deduce

$$\alpha(\sigma_n) - \alpha(s_n'') = \int_{s_n''}^{\sigma_n} \beta\,\mathrm{d}s \qquad \text{onde} \qquad 2\gamma \geqslant \int_{s_n''}^{\sigma_n} \beta\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{\varepsilon}{2}(\sigma_n - s_n'')$$

da cui la valutazione indicata.

Si osservi che questo implica anche

$$s_n'' \leqslant n\tilde{T} + s_1'\,. \tag{3.11}$$

(e) Escludiamo infine la possibilità di infinite oscillazioni della traiettoria; questo porta alla voluta contraddizione.

Riprendiamo la (3.10); tenendo conto della (3.11) e del fatto che Φ è decrescente si ottiene

$$V(z(s_n'')) - V(z(s_n')) \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{4}\,\Phi(n\tilde{T} + s_1')\,\bar{\eta}\,.$$

Da questa, essendo $V' < 0$ sulla traiettoria integrale, si deduce

$$\int_0^{+\infty} V' \, \mathrm{d}s \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s'_n}^{s''_n} V' \, \mathrm{d}s \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{4} \bar{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n\tilde{T} + s'_1) \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\bar{\eta}}{\tilde{T}} \int_{\bar{s}}^{+\infty} \Phi(s) \, \mathrm{d}s$$

e il divergere a $-\infty$ dell'ultimo termine porta all'assurdo.

Rimane dunque provato che la soluzione nulla $z(t) = (0, 0)$ è equiasintoticamente stabile per l'equazione (3.1) che regola le oscillazioni del corpo rigido con massa variabile sopra descritto, questo anche nel caso in cui i coefficienti (2.5) dell'equazione stessa dipendano dal tempo t anziché mantenersi costanti come supposto in [4].

Bibliografia

[1] T. Manacorda, *Il moto di un corpo con massa variabile*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) 3 (1952), 361-373.

[2] V. M. Matrosov, *On the stability of motion*, J. Appl. Math. Mech. **26** (1962), 1337-1353.

[3] J. B. Rosser, R. R. Newton and G. L. Gross, *Mathematical theory of rocket flight*, I, New York-London, Mc Graw, 1947.

[4] C. Silli, *Sulla stabilità dei missili con massa variabile*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **20** (1965), 194-209.

Summary

Stability for the oscillations of a rocket whose mass is variable due to fuel consumption and scoriae expulsion is proved. The non-linear non autonomous system describing the physical problem is studied by the method introduced by Matrosov.

***