Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 129-136

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Attualità di un contributo di Lagrange alla Balistica interna

Alla memoria di ANTONIO MAMBRIANI

1 - Premessa

1.1 - In svariati studi, [**10**], prevalentemente rivolti a porre in risalto i contributi apportati a problemi di Balistica esterna, ed a questioni connesse, da Vito Volterra, Tullio Levi-Civita, Guido Fubini, Francesco Severi, Mauro Picone (con lievi cenni sui contributi di altri matematici italiani: Antonio Signorini, Pietro Teofilato, Oscar Chisini, Alessandro Terracini, Giovanni Sansone), mi era accaduto, nel consultare opere e monografie di Balistica (1), di trovare citato, senza ulteriori precisazioni, un certo «problema di Lagrange» della Balistica interna (2).

Anche la lettura della bella monografia [2] di Filippo Burzio, «Lagrange», edita a Torino nel 1942, non contribuiva a chiarire gran che di che tipo di problema si trattasse. Il Burzio, infatti, si limitava a ricordare (a pag. 227) quel contributo di Lagrange con le seguenti brevi parole: «Come narra il Genocchi, [...] restano di lui [Lagrange] ricerche manoscritte sui moti simultanei della palla, del cannone, ecc., pubblicati poi dal Poisson», e citava, a pie' di pagina, il

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, I-43100 Parma.

(1) In particolare: G. Bianchi [1], C. Cranz [3], G. Festa [4], C. Montù [7].

(2) La *Balistica interna* si occupa dello studio dei fenomeni termodinamici e meccanici che avvengono all'interno di un'arma da fuoco (considerata come un particolare tipo di motore termico a combustione interna), prescindendo completamente dalle reazioni chimiche costituenti la combustione vera e propria.

titolo *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscripts de Lagrange.*

La successiva consultazione delle Opere di Lagrange, [5], mi aveva mostrato, alla fine del VII volume (edito nel 1877), una Memoria recante il titolo sopra riportato, con l'aggiunta «par M. Poisson», Memoria che era stata precedentemente pubblicata da Poisson, nel 1832, sul Journal de l'École Polytecnique, [9].

Così inizia Poisson:

«Les manuscripts de Lagrange, déposés à la biblioteque de l'Institut, renferment des recherques sur les mouvements simultanés du boulet, du canon et de la poudre réduite en gaz, dont la rédaction n'est pas achevée, et qui n'ont pas été publiés. Le resultat auquel l'Auteur parvient ne satisfait pas complétement à toutes les conditions de la question; mais il prouve que la solution qu'on donne ordinairement de ce Problème est inexacte; et d'ailleurs ce travail de Lagrange contient de vues nouvelles que j'ai cru utile de faire connaître».

Poisson accenna poi ad alcune notizie storiche su questi studi di Lagrange, che fa risalire al 1793 (3).

1.2 - Il «problema di Lagrange» costituisce pertanto un basilare problema di Balistica interna, con lo studio del quale Lagrange si proponeva di pervenire alla determinazione della velocità acquisita dal proiettile quando abbia raggiunto l'estremità della canna (ossia della *velocità alla bocca* o *velocità al vivo di volata* (4)).

Poisson dà, dello studio di Lagrange, una accurata descrizione, con osservazioni e confronti con risultati trovati da altri Autori, e dimostrati errati da Lagrange; riprendendo poi un risultato incompleto di Lagrange e facendo uso, in un punto importante per concludere, di «une formule connue et due a Lagrange», fornisce un procedimento risolutivo del problema, valido nella restrittiva ipotesi in cui il peso della carica di polvere sia «assai piccolo» rispetto a quello del proiettile (ipotesi non rispondente a quei tempi a dati di fatto reali, poiché, come ricorda lo stesso Poisson, il rapporto fra il peso della polvere e quello del proiettile variava allora fra 1/3 e 1/2).

---

(3) Per esaurienti notizie storiche su Lagrange si veda, ad esempio, G. Loria $[6]_1$, $[6]_2$ (vol. II, pp. 233-262), $[6]_3$ (pp. 293-333), e F. Burzio [2].

(4) Come è noto, tale velocità non coincide esattamente con la *velocità iniziale* del proiettile, velocità massima raggiunta poco oltre il vivo di volata, per effetto del cosiddetto *soffio di bocca*. Precisiamo che nella presente Nota si dirà, con abuso di linguaggio assai usato, *velocità* anziché *modulo della velocità*.

Per completare, pur nelle restrittive ipotesi dichiarate, lo studio del problema, Poisson perviene ad una non semplice equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine, soddisfacente ad assegnate condizioni iniziali, «qui ne peut s'intégrer que par les méthodes d'approximation».

E con queste parole Poisson conclude la Memoria [9]; l'integrazione di tale equazione (resa attuale dai metodi della moderna Analisi Numerica e dai moderni mezzi di calcolo) fornisce i coefficienti di una particolare serie trigonometrica che dà la soluzione del problema.

2 - Il «problema di Lagrange», ripreso da Poisson

2.1 - Dopo la breve presentazione, sopra riportata, Poisson espone il «problema di Lagrange della Balistica interna». Scrive Poisson:

«All'origine del moto, la densità del gas è la stessa in tutti i suoi punti ed uguale a quella della polvere. [...] Per pervenire ad una determinazione esatta della velocità raggiunta dal proiettile quando sia pervenuto alla bocca della canna, è necessario considerare simultaneamente il moto del gas e del proiettile. Ciò non si fa ordinariamente ed è ciò che Lagrange ha tentato di fare [...]. Si supporrà che in ogni istante la velocità, la densità e la pressione siano le stesse in tutti i punti di una stessa lamina gassosa infinitamente sottile e perpendicolare all'asse della canna; al tempo t, contato dall'origine del moto, si rappresenteranno queste tre quantità rispettivamente con v, ρ, p, relativamente alla lamina la cui distanza da un piano fisso e perpendicolare all'asse è attualmente z, mentre era x all'origine del moto; pertanto v, ρ, p, z sono le incognite che si dovranno determinare in funzione di x e di t».

Dopo aver riportato le equazioni differenziali del moto del gas, del proiettile e della canna (5), Poisson fa varie osservazioni critiche circa l'attendibilità delle ipotesi, comunemente fatte, che all'origine del moto la velocità del proiettile e dell'arma siano nulle o infinitamente piccole. Illustra poi il modo col quale altri Autori avevano trattato il problema:

«Nella soluzione che Robins (6) e altri Autori hanno dato del problema di cui ci

(5) Poisson dice canna per intendere, come lui stesso precisa, il sistema canna-affusto, poiché allora le artiglierie erano ad *affusto rigido* e non ad *affusto deformabile*, come avverrà dalla fine dell'Ottocento in poi.

(6) Ricordiamo che l'opera di B. Robins (assai noto anche come inventore del *pendolo*

occupiamo, si suppone che la densità del gas sia la stessa per tutta la sua estensione e che tale densità non vari che col tempo. [...] Si trascura [...], nella soluzione, la massa della polvere rispetto a quella del proiettile».

Dopo dettagliate considerazioni analitiche su come, invece, Lagrange affronta il problema, conclude, dai confronti dei risultati di Lagrange con quelli di Robins e di altri, «come debba essere errata la soluzione [di tali Autori] e come debbano essere inesatti i valori delle velocità, del proiettile e dell'arma, che se ne deducono».

2.2 - Dopo avere dettagliatamente esposto i vari procedimenti usati da Lagrange nel tentativo di pervenire alla soluzione del problema ed averne riportato i relativi lunghi calcoli, Poisson espone il contributo da lui stesso apportato: rifacendosi a due equazioni differenziali ottenute da Lagrange nell'impostazione del problema (la prima dal principio generale della conservazione del moto del baricentro del sistema proiettile-arma-polvere ridotta in gas, la seconda dal principio generale delle forze vive), al fine di ottenere «il valore corretto di z», trascura i termini dipendenti dal quadrato di μ, dove μ è la massa della polvere (che suppone abbastanza piccola rispetto alla massa del proiettile); ottiene due equazioni in cui figurano: le masse m_1 e m_2 del proiettile e dell'arma, le rispettive «velocità alla bocca» v_1 e v_2 (o meglio, volendo usare locuzioni più correnti, la velocità alla bocca v_1 del proiettile e la velocità v_2 di rinculo dell'arma), la massa μ della polvere; ed inoltre: la lunghezza della canna, il calibro dell'arma, ecc. (7). Ed aggiunge:

«Eliminando v_2 fra queste due equazioni, si dedurrà il valore della velocità v_1

---

balistico, atto a determinare la velocità dei proiettili), *New principles of gunnery* (London, 1742) era stata tradotta in tedesco e commentata da Eulero (Berlin, 1745) (Cfr. [3], Bd. I, p. 562; [7], vol. XII, p. 324; [8], pp. 192-197).

(7) Può essere interessante un confronto fra la prima di queste due equazioni di Lagrange-Poisson

$$(m_1 + \tfrac{1}{2}\mu)\, v_1 + (m_2 + \tfrac{1}{2}\mu)\, v_2 = 0\,, \tag{1}$$

e l'analoga ottenuta da Robins

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0\,, \tag{2}$$

che risulta dalla (1) quando si consideri nulla la massa μ della polvere: in tale ipotesi semplificatrice la (2) è di solito data nella forma $v_2 = -\, m_1 v_1 / m_2$, che dà la *velocità di rinculo* dell'arma espressa in funzione della *velocità alla bocca* del proiettile e delle masse del proiettile e dell'arma (e si esprime anche dicendo che «le velocità sono, in valore del proiettile alla bocca dell'arma, *velocità che sarà tanto più approssimata quanto più piccolo sarà il peso della polvere rispetto a quello del proiettile* (8)».

3 - Il problema di Lagrange ripresentatosi, verso la fine dell'Ottocento, per dare spiegazione di un paradossale fenomeno

L'interesse, in Balistica interna, per il «problema di Lagrange» si era poi di colpo, fatto sentire, circa un secolo dopo, verso la fine dell'Ottocento (quando dalla «polvere nera» si era passati all'uso della «polvere senza fumo», inventata dal chimico francese Vieille nel 1884), per dare spiegazione del paradossale fenomeno, consistente in pericolose sovrapressioni — provocate all'interno della canna — che erano state rilevate in particolari circostanze (ad esempio, paradossalmente, quando si faceva uso di cariche ridotte).

Tale fenomeno, detto delle «pressioni ondulatorie» (e studiato anche sperimentalmente dal Vieille, che aveva misurato pressioni fino a 3/4 superiori a quelle normali), era stato spiegato proprio con la più generale impostazione, rispetto a quella di altri Autori, data da Lagrange a quel problema di Balistica interna, problema che sta anche alla base della «Meccanica degli esplosivi» (ed è connesso alla cosiddetta «Teoria delle onde d'urto»).

Il fenomeno delle pressioni ondulatorie è ricordato, in relazione al «problema di Lagrange», da alcuni fra i più noti autori di trattati o monografie di Balistica interna: ne parla G. Bianchi in [1] (pp. 104-106), C. Cranz in [3] (Bd. II, pp. 146-147, 217, 226, Bd. IV, p. 140), G. Festa in [4] (Cap. XII, pp. 1-2); ed è pure ricordata più volte nella monumentale opera, curata da C. Montù, [7] (vol. V, p. 2192, vol. XII, p. 23, vol. XV, p. 183).

La generale impostazione, data da Lagrange al problema, per certi aspetti precorre (e i Grandi sono stati spesso anche grandi precursori: si pensi ad Archimede, a Leonardo, a Galileo, a Newton, ai Bernoulli, ad Eulero, a Gauss, ecc.) lo studio dei fenomeni di Fluidodinamica non stazionaria, cioè di fenomeni di onde (e la Fluidodinamica non stazionaria di un'arma da fuoco, che è una

---

assoluto, inversamente proporzionali alle rispettive masse)». Osserviamo che nella (1) la massa della polvere è, per così dire, attribuita per metà alla massa del proiettile e per metà alla massa dell'arma. Ritroviamo, ad esempio, la (1) nella monografia di G. Festa [4] (Cap. X, p. 3), al fine di determinare la velocità di rinculo dell'arma.

(8) Il corsivo è nostro.

particolare macchina termica, è assai complessa, come ci si può render conto anche soltanto da quanto qui accennato).

Lagrange vuole quindi anche essere da noi presentato come pioniere della moderna Fluidodinamica.

4 - Attualità del problema di Lagrange. Osservazioni

L'attualità di questo studio di Lagrange, ripreso quarant'anni dopo da Poisson (che è pure grande ed attuale in molte discipline matematiche, dalla Meccanica Razionale, al Calcolo delle Probabilità, alla Teoria dell'Elasticità, ecc.), è anche dovuta al fatto che l'ipotesi di Lagrange-Poisson di supporre assai piccolo il rapporto fra il peso della carica di polvere e quello del proiettile (ipotesi allora non rispondente a dati di fatto reali, poiché quel rapporto — come si è già ricordato — oscillava fra 1/3 e 1/2) è attualmente, in certi casi, verificata: ad esempio nel caso di certe armi da fuoco per uso sportivo ed, in particolare, per il tiro agonistico [9]), che forniscono velocità iniziali dei proiettili relativamente basse (fra i 200 ed i 400 m/s circa, rispetto a quelle assai elevate sia per armi portatili — carabine rigate con velocità iniziali dei proiettili fino a 1200 m/s ed oltre —, sia per artiglierie di piccolo e medio calibro — fino a circa 1500 m/s ed oltre).

Attualmente, però, da un punto di vista strettamente pratico, si sarebbe portati ad obiettare che la determinazione della velocità alla bocca viene ormai abitualmente determinata con metodi sperimentali anziché teorici, sia indirettamente, attraverso la velocità di rinculo dell'arma [10], sia direttamente, con apparecchiature elettroniche. A parte il fatto che tali metodi non esistevano al tempo di Lagrange, è doveroso ricordare che ogni sperimentazione bene impostata va condotta conoscendo le basi teoriche dei fenomeni che si vogliono studiare.

---

(9) Ad esempio, sono attualmente universalmente usati, per il tiro agonistico, i calibri .22 Short tipo «Olimpionico» e .22 Long Rifle (o .22 LR) tipo «Competizione», per i quali il rapporto suddetto è di circa 3/100; i calibri .32 S. & W. Long e .38 S. & W. Special, con proiettili pressoché cilindrici ed a «bassa velocità», del tipo cosiddetto WC (Wad Cutter), per i quali quel rapporto oscilla addirittura fra 1/100 e 2/100; i calibri 12 e 20 per fucile ad anima liscia (per citare solo i più diffusi), per i quali quel rapporto oscilla fra 1/25 e 1/20; ecc.

(10) Cfr. [8], pp. 135-136.

L'aver voluto richiamare qui, a distanza di circa due secoli, questo assai poco noto studio di Lagrange vuole anche essere un invito, rivolto ai moderni cultori di Balistica interna e di Gasdinamica, a riesaminare sotto nuova luce questi antichi contributi di Lagrange-Poisson, sia sotto l'aspetto analitico, coi moderni metodi della Fluidinamica, sia sotto l'aspetto numerico, coi moderni metodi e mezzi dell'Analisi Numerica.

Bibliografia

[1] G. BIANCHI, *Nozioni fondamentali di Balistica interna*, 2ª ed., Pasta, Torino, 1914.

[2] F. BURZIO, *Lagrange*, UTET, Torino, 1942.

[3] C. CRANZ, *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I (1925), II (1926), III (1927), IV (1936), J. Springer, Berlin.

[4] G. FESTA, *Sinossi di Balistica interna*, Scuole di Applicazione, Torino, 1967.

[5] J. LAGRANGE, *Oeuvres*, tomes I-XIV, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892.

[6] G. LORIA: $[\bullet]_1$ *G. L. Lagrange nella vita e nelle opere*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **20** (1913), pp. IX-LII; $[\bullet]_2$ *Storia delle Matematiche*, vol. I (1929), II (1931), III (1933), S.T.E.N., Torino; $[\bullet]_3$ *Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle Matematiche*, CEDAM, Padova, 1937.

[7] C. MONTÙ, *Storia dell'Artiglieria Italiana*, voll. I-XVI (1934-1955), Ediz. a cura della Rivista e della Biblioteca di Artigl. e Genio, Roma.

[8] G. A. PIGNONE e U. R. VERCELLI, *Appunti di Balistica*, Editoriale Olimpia, Firenze, 1987.

[9] S. D. POISSON, *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscripts de Lagrange*, J. de l'École Polyt., XXIᵉ Cahier, t. XIII (1832).

[10] L. TANZI CATTABIANCHI: $[\bullet]_1$ *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 357-389; $[\bullet]_2$ *Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 459-474; $[\bullet]_3$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei tempi: un teorema di confronto*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 855-860; $[\bullet]_4$ *Su alcune varianti e generalizzazioni di una formula di balistica terminale di Resal*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 469-484; $[\bullet]_5$ *I contributi di Guido Fubini e di Francesco Severi ad alcuni problemi di balistica esterna*, Supplem. vol. **115**, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1981), 619-625; $[\bullet]_6$ *Generalizzazioni di una formula di Levi-Civita sulla penetrazione dei proiettili deformabili*, Atti Conv. Balistica Forense, Montagnoli Edit., Roma (1982), 619-625; $[\bullet]_7$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulla velocità residua: generalizzazioni e confronti*, Riv. Mat.

Univ. Parma (4) **10** (1984), 359-372; [•]$_8$ *Su alcune generalizzazioni di casi di effetto Levi-Civita «negativo» in balistica terminale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 463-473; [•]$_9$ *Un problema inverso connesso all'effetto Levi-Civita della balistica terminale e alle sue generalzizazioni*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 211-217; [•]$_{10}$ *Attualità di uno studio inedito di balistica interna di Lagrange, completato, in un caso particolare, da Poisson*, Accad. Militare, Modena (1987-88), pp. 29; [•]$_{11}$ *I contributi di Vito Volterra alla balistica da aeromobili*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 87-105.

Summary

We consider the so-called «Lagrange's Problem of Interior Ballistics», which goes back to an incompleted, unpublised study of 1793. This was completed in 1832, subject to a restrictive hypothesis — at that time not based on actual facts —, by Poisson. The broadness of perspective of Lagrange's approach is stressed, vis-à-vis other Authors. His perspective enabled, towards the end of the XIX Century, to account for the so-called «phenomenon on ondulatory pressures». This makes Lagrange a precursor of far as certain aspects of Fluid Dynamics are concerned. The present relevance of such a classic problem is remarked, since Lagrange-Poisson's restrictive hypothesis is nowadays felicitously being used to certain applications.

***

Finito di stampare il 7 Luglio 1991 Tipografia Compositori Bologna