Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 91-96

GIULIO MATTEI (*)

Sulla formula barometrica nei plasmi

Alla memoria di ANTONIO MAMBRIANI

1 - Introduzione

È notissima nella statica dei gas perfetti pesanti la formula che dà, nell'ipotesi isoterma, l'andamento della pressione (e della densità) con la quota (*formula barometrica*).

Del corrispondente problema per un plasma descritto nel modello magneto-fluidodinamico (MFD) si sono occupati soltanto (per quanto è a conoscenza dell'autore) N. G. Van Kampen e B. U. Felderhof in [1] (Cap. IV, n. 4).

Si riprende qui la questione affrontata in [1] con l'intento di fornire qualche ulteriore contributo.

2 - Formula barometrica nei plasmi

Le equazioni di base sono quelle della magnetoidrostatica

$$\rho \boldsymbol{g} - \operatorname{grad} p + \boldsymbol{f}_m = 0 \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{f}_m = \frac{1}{4\pi\mu} (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} \tag{2.1}$$

$$\rho = kp \qquad (k = \text{cost})\,(^1) \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.3}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università, I-56100, Pisa.

(1) Per quanto concerne l'ipotesi isoterma nella statica dei plasmi, cfr. [1], p. 13.

dove ρ è la densità, $\boldsymbol{g}$ l'accelerazione di gravità, p la pressione (2), $\boldsymbol{f}_m$ la forza magnetica per unità di volume, μ la permeabilità magnetica (costante), e $\boldsymbol{B}$ il vettore induzione magnetica (si usa il sistema di unità di misura di Gauss).

Per un gas ordinario la formula barometrica (conseguenza di (2.1)′ e (2.2)) si scrive notoriamente

$$p = p_0\, \mathrm{e}^{-kgz} \qquad \text{od anche} \qquad \rho = \rho_0\, \mathrm{e}^{-kgz} \tag{2.4}$$

dove p_0 e ρ_0 sono i valori di p e ρ per $z=0$ ed avendo scelto l'asse z verticale ascendente.

Scopo della presente nota è lo studio delle modificazioni della (2.4) causate in un gas elettroconduttore dalla presenza di un campo magnetico $\boldsymbol{B}/\mu$.

Stante l'impossibilità di fornire una soluzione completa delle equazioni (2.1)-(2.3) (cfr. [1], p. 35), si impone la necessità di cercare soluzioni particolari. Al riguardo procederemo nel seguente modo. Cercheremo dapprima di determinare campi magnetici (solenoidali) generatori di forza magnetica $\boldsymbol{f}_m$ verticale e funzione solo della quota (3), cioè $\boldsymbol{B}$ tali che

$$\boldsymbol{f}_m \equiv \frac{1}{4\pi\mu}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} = f_m(z)\, \boldsymbol{e}_z \tag{2.5}$$

($\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ versori della terna cartesiana di riferimento). Successivamente, in corrispondenza a tali $\boldsymbol{B}$, passeremo a determinare l'andamento di p (e quindi, automaticamente, di ρ) con la quota.

Da (2.5) segue che $\boldsymbol{f}_m$ è conservativa; per $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(z)$, posto $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\perp(z) + B_z(z)\,\boldsymbol{e}_z$ con $\boldsymbol{B}_\perp = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y$, avendosi

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} = -\operatorname{grad}\frac{B^2}{2} + \boldsymbol{B}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{d}B_\perp^2/2}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{e}_z + B_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\perp}{\mathrm{d}z}$$

---

(2) Se si considera accanto alla (2.1) la corrispondente per un gas ordinario

$$\rho\boldsymbol{g} - \operatorname{grad} p = 0 \tag{2.1$'$}$$

si può fare la seguente osservazione. Mentre per un gas ordinario in equilibrio meccanico nel campo della gravità la pressione deve necessariamente dipendere solo dalla quota z (la (2.1)′ subito dà $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$), ciò in generale non accade per un gas elettroconduttore sottoposto ad un campo magnetico (come chiaramente indica la (2.1)).

(3) Del tutto ovvia è l'osservazione che i cosiddetti campi magnetici force-free (cioè quelli per i quali $\boldsymbol{f}_m = 0$ e che, per altra via, hanno notoriamente un rilievo notevole in magnetoidrostatica) lasciano invariata la (2.4).

segue $B_z = 0$, con il che resta soddisfatta la (2.3). Nel seguito assumeremo

$$B \equiv (B(z),\ 0,\ 0) \tag{2.6}$$

con $B(z)$ funzione arbitraria. Da (2.6) segue

$$f_m = -\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\mathrm{d}B^2(z)}{\mathrm{d}z}e_z\,. \tag{2.7}$$

Esamineremo nel seguito tre casi particolari di (2.6) che sono apparsi significativi e daremo per essi la soluzione esplicita.

I Caso

Esaminiamo il caso particolare notevole di (2.6)

$$B = Aze_x \qquad A \cos t\,(^4)\,. \tag{2.8}$$

In corrispondenza a (2.8), la (2.1) fornisce la

$$\rho g + \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} + \frac{A^2}{4\pi\mu}z = 0\,. \tag{2.9}$$

Risolvendo l'equazione differenziale (2.9) si trova

$$\rho = \bar{\rho} + \frac{A^2}{4\pi\mu k g^2}(1 - kgz - \mathrm{e}^{-kgz}) \tag{2.10}$$

dove si è indicato con $\bar{\rho} = \rho_0\,\mathrm{e}^{-kgz}$ la densità che si avrebbe per un gas ordinario (cfr. (2.4)).

La soluzione data in [1] (p. 38), trovata per altra via, è la seguente

$$\rho = \frac{A^2}{4\pi\mu k g^2}(1 - kgz) \tag{2.11}$$

---

(4) Questo caso, con diverso modo di procedere, è stato esaminato in [1] (p. 38): tuttavia in [1] si giunge ad una formula barometrica modificata che in generale non sembra valida, risultando tale solo in una circostanza assai speciale (cfr. (2.11) e (2.12) nel seguito).

che coincide con la (2.10) solo nel caso particolare

$$\rho_0 = \frac{A^2}{4\pi\mu k g^2} \text{ (5)}. \tag{2.12}$$

Dalla (2.10) si traggono le seguenti conclusioni:

(1) In assenza di campo magnetico la (2.10) (al contrario della (2.11)) ridà la (2.4).

(2) Per piccoli valori di z la (2.10) fornisce

$$\rho = \bar{\rho} = \rho_0(1 - kgz). \tag{2.13}$$

(3) Da un punto di vista matematico la funzione $\rho(z)$ data dalla (2.10) ha un andamento diverso nei due casi $\rho_0 \gtrless A^2/4\pi\mu k g^2$ (nel caso $\rho_0 = A^2/4\pi\mu k g^2$ l'andamento di ρ con z è dato dalla (2.11), che indica un decremento lineare di ρ a partire da ρ_0). Nel caso $\rho_0 > A^2/4\pi\mu k g^2$ si ha $\lim_{z\to\pm\infty} \rho = \mp\infty$, nessun punto di massimo o di minimo ed un solo zero (positivo); nel caso $\rho_0 < A^2/4\pi\mu k g^2$ si ha $\lim_{z\to\pm\infty} \rho = -\infty$, un massimo per un valore negativo di z e due zeri, uno positivo e l'altro negativo. Da un punto di vista fisico però, dovendosi ovviamente avere $\rho > 0$ e $z \geqslant 0$, i due casi non differiscono qualitativamente avendosi in entrambi un decremento di tipo esponenziale di ρ a partire da ρ_0.

II Caso

Sia

$$\boldsymbol{B} = C z^2 \boldsymbol{e}_x \qquad C \text{ cost}. \tag{2.14}$$

In corrispondenza a (2.14), la (2.1) fornisce la

$$\rho g + \frac{1}{k}\frac{d\rho}{dz} + \frac{C^2}{2\pi\mu} z^3 = 0. \tag{2.15}$$

(5) La conclusione (2.11) tratta in [1] proviene presumibilmente dall'aver ivi tralasciato una costante di integrazione (cfr. [1], pp. 37-38).

Risolvendo l'equazione differenziale (2.15) si trova

$$\rho = \tilde{\rho} + \frac{3C^2}{\pi\mu k^3 g^4}\left(1 - kgz + \frac{k^2 g^2}{2} z^2 - \frac{k^3 g^3}{6} z^3 - e^{-kgz}\right). \tag{2.16}$$

Lo studio della (2.16) si svolge in modo analogo a quello della (2.10); basti qui osservare esplicitamente che la (2.16)

(i) in assenza di campo magnetico ridà la (2.4);

(ii) per piccoli valori di z dà ancora la (2.13).

III Caso

Sia

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{-\lambda z} \boldsymbol{e}_x \tag{2.17}$$

con B_0 e λ costanti positive assegnate.

In corrispondenza a (2.17), la (2.1) fornisce

$$\rho g + \frac{1}{k}\frac{d\rho}{dz} - \frac{B_0^2 \lambda}{4\pi\mu} e^{-2\lambda z} = 0. \tag{2.18}$$

Risolvendo l'equazione differenziale (2.18) si trova se $\lambda \neq kg/2$

$$\rho = \tilde{\rho} + \frac{B_0^2 \lambda}{4\pi\mu(g - 2\lambda/k)}\left(e^{-2\lambda z} - e^{-kgz}\right) \tag{2.19}$$

mentre se $\lambda = kg/2$

$$\rho = \tilde{\rho} + \frac{B_0^2 g k^2}{8\pi\mu} z e^{-kgz}. \tag{2.20}$$

L'andamento di $\rho(z)$ nei due casi appare chiaro. Ci si limita qui ad osservare esplicitamente che, in entrambi, in assenza di campo magnetico si ritrova la (2.4) e che, per piccoli dislivelli la (2.19) fornisce

$$\rho = \tilde{\rho}_* + \frac{B_0^2 \lambda k}{4\pi\mu} z \tag{2.21}$$

e la (2.20)

$$\rho = \tilde{\rho}_* + \frac{B_0^2 g k^2}{8\pi\mu} z \tag{2.22}$$

con $\tilde{\rho}_* = \rho_0(1 - kgz)$.

Bibliografia

[1] N. G. VAN KAMPEN and B. U. FELDERHOF, *Theoretical methods in plasma physics*, North-Holland, Amsterdam, 1967.

Summary

Some contributions are given in the study of the barometric formula for a MHD *plasma.*

***