Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 25-33

GIUSEPPE MAMBRIANI (*)

Determinazione di equazioni differenziali con associate soluzioni e la possibilità di costruirne un archivio informatico attivo

In memoria di mio padre

1 - Introduzione

Il problema fondamentale espresso da una equazione differenziale (ED) è quello della determinazione delle sue soluzioni. Ma, come è ben noto, non esistono tecniche solutive generali, salvo che per pochi tipi di ED più semplici. In questo secolo sono stati particolarmente sviluppati vari metodi atti a trarre direttamente da una ED e da eventuali condizioni associate, informazioni su le sue soluzioni. Con la disponibilità degli elaboratori è divenuto possibile trovare per via numerica soluzioni approssimate di qualunque ED, anche se spesso è difficile valutare la bontà dei risultati ottenuti. Inoltre, queste soluzioni numeriche presentano molteplici limitazioni rispetto a quelle analitiche esatte. Oggi con l'ausilio degli elaboratori è pensabile di arrivare a disporre delle soluzioni analitiche esatte di svariate equazioni, costruendo un archivio di ED con associate soluzioni. Archivi molto limitati non informatici esistono già: sono quei trattati e manuali, come ad esempio quello di Kamke [2]. Ma gli archivi su carta oltre che limitati sono anche di meno agevole e più lenta consultazione e ovviamente passivi e statici.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Fisica dell'Università, Viale delle Scienze, I-43100 Parma.

La disponibilità degli elaboratori potrebbe permettere di creare un archivio più ampio, più facilmente aggiornabile e di più rapida consultazione rispetto a quelli su carta. Ovviamente si potrebbero riversare in esso tutte le equazioni di cui si conosce almeno una soluzione, sviluppando i necessari metodi di classificazione. Per le ED la classificazione (al di là delle tipizzazioni standard: ordinarie o alle derivate parziali, lineari e non, ordine, ecc.) può essere fatta con un insieme di funzioni. Ad esempio per le ED lineari ordinarie, tali funzioni sono semplicemente i coefficienti. Quindi occorrono delle metodiche efficaci per classificare le funzioni, sviluppando ad esempio i metodi esistenti che vengono utilizzati per la classificazione delle funzioni nella gestione delle tavole di primitive in vari SMP. Questi Symbolic Mathematical Programs utilizzano la ricerca nelle tavole di primitive per il calcolo analitico letterale di integrali indefiniti.

Un archivio informatico in cui riversare tutte le ED con soluzioni note, richiederebbe un lavoro notevole per essere impostato, impiantato, gestito ed aggiornato, ma forse i costi conseguenti non sarebbero ripagati dalle prestazioni. Infatti, queste ultime non sarebbero probabilmente molto superiori rispetto a quelle di una buona biblioteca, anche se i tempi di ricerca potrebbero essere notevolmente inferiori, con in più la possibilità di accesso remoto.

Oggi però sembra pensabile un archivio informatico attivo, cioè in grado di accrescere anche autonomamente il numero di ED archiviate con relative soluzioni: un numero limitato solo dai costi delle memorie di massa necessarie. Le basi matematiche per sviluppare questa possibilità hanno radici remote (cfr 2) e sono quelle che permettono di costruire ED a partire da funzioni note che le soddisfino o tecniche simili (cfr. 3). Si tratterebbe di creare un sistema informatico che sia in grado di determinare analiticamente le ED con associate soluzioni, di caratterizzarle e classificarle, di archiviarle, e di gestire nel contempo le richieste di informazioni da parte di utenti locali e remoti. Un sistema siffatto può essere basato su un elaboratore singolo, o meglio può utilizzare gli elaboratori di una rete. Si potrebbero così utilizzare i tempi morti per accrescere continuamente l'archivio, che potrebbe essere realizzato su una memoria di massa distribuita, agevolando in questo modo anche le necessarie memorizzazioni di riserva e sicurezza.

In questo articolo ci si occuperà a titolo di esempio solo di un tipo particolare di ED, e cioè quelle ordinarie, lineari e omogenee del 2° ordine (EDOLO2), che come è noto hanno una importanza rilevante anche dal punto di vista applicativo. In 2 si riassume un metodo classico di determinazione di ED con associate soluzioni, analizzandolo per quanto riguarda le EDOLO2. In 3 si sviluppano, sempre per le EDOLO2, altri metodi di determinazione delle ED con associate soluzioni. In particolare, si indichino con $p(t)$ e $q(t)$ le due funzioni (reali o complesse) della variabile indipendente t (reale o complessa) che individuano una EDOLO2 (scritta con il coefficiente della derivata seconda equale all'unità), e con $y_1(t)$ una sua soluzione (reale o complessa). Le tre suddette funzioni e le altre utilizzate nel seguito (sempre reali o complesse) verranno considerate derivabili fino all'ordine di interesse. In 3, si espongono tre metodi di determinazione delle EDOLO2, considerando nota una delle tre funzioni p, o q, ovvero y_1, e determinando classi delle altre due. In 4 si traggono alcune conclusioni individuando ulteriori aspetti e problemi della costruzione di un possibile archivio informatico attivo.

2 - Osservazioni sulla determinazione di equazioni differenziali ordinarie con associate soluzioni

La determinazione di ED ordinarie con associate soluzioni è un problema a cui storicamente è stata dedicata una attenzione marginale, ma che comunque ha radici remote. Ad esempio Goursat inizia lo studio delle ED nel suo trattato [1] osservando che dalla conoscenza di una funzione $y(t)$ data implicitamente è facile ricavare una ED ordinaria che è soddisfatta dalla funzione. Riprendiamo l'osservazione di Goursat specializzandola ad una EDOLO2. Sia $F(t, y, A, B)$ una funzione delle variabili t e y e delle costanti arbitrarie A e B (reali o complesse).

F ammetta almeno derivate seconde finite rispetto ai primi due argomenti e abbia le derivate seconde miste eguali. L'equazione

$$F(t, y, A, B) = 0 \tag{2.1}$$

definisce una famiglia di ∞^2 funzioni $y = y(t, A, B)$. Si derivi la (2.1) una prima e una seconda volta rispetto a t. Si ottiene

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0 .\end{gathered} \tag{2.2}$$

Le (2.2) possono essere considerate come un sistema di due equazioni nelle due incognite A e B. Ipotizzando di saper ricavare A e B, sostituendole nella (2.1) si ha

$$F(t,\ y,\ A(y',\ y''),\ B(y',\ y''))=0 \tag{2.3}$$

che è una ED ordinaria del secondo ordine in $y(t)$, in generale non lineare.

Ottenere per questa via, ad esempio una EDOLO2 o un altro tipo di equazione prefissato non sembra agevole, anche se si parte da una F esplicitata rispetto ad $y(t)$. Si consideri ad esempio come caso particolare della (2.1)

$$F\equiv y-[A\alpha(t)+Bt]=0$$

dove $\alpha(t)$ è una funzione arbitraria della t. Si ottiene

$$y''+\frac{\alpha'' t}{\alpha-t\alpha'}y'-\frac{\alpha''}{\alpha-t\alpha'}y=0\,. \tag{2.4}$$

Indicando con p e q i due coefficienti della (2.4), si ha che $q=-pt$. Si ha cioè una classe molto particolare di EDOLO2. Con i nuovi metodi di determinazione presentati nel prossimo paragrafo sembra più semplice mirare ad ED prefissate.

3 - Nuovi metodi per determinare equazioni differenziali ordinarie lineari e omogenee del secondo ordine con associate soluzioni

3.1 - *Premessa*

Consideriamo le EDOLO2 scritte nella forma ridotta (cioè con coefficiente della derivata seconda eguale all'unità)

$$y''(t)+p(t)\,y'(t)+q(t)\,y(t)=0\,. \tag{3.1}$$

Se $y\neq 0\ \forall t\in \mathrm{N}$ (N essendo un dominio di t in cui la y risulti definita), si può fare la seguente ben nota sostituzione [1]

$$y(t) = \exp[\bar{\int} x(t)\,\mathrm{d}t] \qquad \text{ovvero} \qquad x(t) = y'(t)/y(t) \tag{3.2}$$

dove il «piccolo tratto» sopra il segno dell'integrale indefinito indica una particolare primitiva. Con la trasformazione (3.2), le equazioni di tipo (3.1) assumono la forma associata di Riccati

$$x'(t) + x^2(t) + px(t) + q = 0\,. \tag{3.3}$$

Indicheremo inoltre con $y_1(t)$ ed $x_1(t)$, due soluzioni particolari rispettivamente della (3.1) e della (3.3).

3.2 - *Determinazione a partire dal coefficiente $q(t)$ prefissato*

Eseguiamo in (3.3) la seguente sostituzione

$$x(t) = -\,\alpha(t) - p(t) \tag{3.4}$$

dove p è il 2° coefficiente ancora indeterminato, ed $\alpha(t)$ è una funzione arbitraria. Si ottiene subito

$$p' - \alpha p - (\alpha^2 - \alpha' + q) = 0 \tag{3.5}$$

che può essere considerata come una ED ordinaria lineare del 1° ordine nella funzione incognita $p(t)$. Risolvendo la (3.5) si ha

$$p(t) = e^{\bar{\int}\alpha \mathrm{d}t}[\bar{\int} e^{-\bar{\int}\alpha \mathrm{d}t}(\alpha^2 - \alpha' + q)\,\mathrm{d}t + A] \tag{3.6}$$

dove A è la costante (reale o complessa) arbitraria di integrazione. Dalla (3.4) tenendo presente la (3.2), si ottiene

$$y_1(t) = \exp[-\,\bar{\int}(\alpha + p)\,\mathrm{d}t] \tag{3.7}$$

---

(1) Questa classica sostituzione è alla base dei lavori pubblicati [4] dall'autore del presente articolo con il padre Antonio Mambriani. In questi lavori si è proposta la cosiddetta «deralgebra», cioè un tentativo di riproporre quel tipo di analisi funzionale che assume la funzione derivata come funzionale fondamentale.

cioè una soluzione particolare di una ED di tipo (3.1) che si è ottenuta a partire da $q(t)$, determinando $p(t)$.

Una seconda soluzione particolare $y_2(t)$, linearmente indipendente da y_1 (e che quindi con y_1 dà l'integrale generale), è data (ad esempio, cfr. [1], paragrafo 402, p. 444) da

$$y_2(t) = y_1 \int y_1^{-2} \exp(-\int p \, \mathrm{d}t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{3.8}$$

3.3 - *Determinazione a partire da una soluzione $y_1(t)$ prefissata*

Risolvendo rispetto a $p(t)$ la (3.7) si ha

$$p(t) = -(\alpha + y_1'/y_1) \,. \tag{3.9}$$

Utilizzando questa espressione nella (3.5) si ottiene

$$q(t) = \alpha y_1'/y_1 - (y_1'/y_1)' \,. \tag{3.10}$$

Al variare di α la (3.9) e la (3.10) danno tutte le EDOLO2 che ammettono $y_1(t)$ come soluzione.

Qualora partendo dalle (3.6) e (3.7), ovvero dalle (3.9) e (3.10), si cerchi di trovare le soluzioni di una particolare equazione imponendo le specifiche espressioni dei coefficienti, ci si ritrova, come è facile verificare, a dover risolvere una ED di tipo (3.1) o (3.3).

3.4 - *Determinazione a partire dal coefficiente $p(t)$ prefissato*

Dalla (3.7) si ottiene subito una soluzione $y_1(t)$, da cui utilizzando la (3.4) e la (3.10) si ottiene

$$q(t) = \alpha' + p' - (\alpha^2 + \alpha p) \,. \tag{3.11}$$

3.5 - *Alcuni esempi di* EDOLO2 *con associate soluzioni*

Con i semplici metodi di questo paragrafo è facile determinare EDOLO2 con associate soluzioni, che ad esempio non vengono elencate in [2], come le tre equazioni seguenti

(a)
$$y'' - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\, y' + \mathrm{sen}(\omega t)\, y = 0$$
$$y_1(t) = \exp(\mathrm{sen}\,\omega t/\omega^2) \qquad \alpha(t) = 0 \qquad \Lambda = 0\,.$$

(b)
$$y'' - y' + \frac{1}{t}(1 - \frac{2}{t})\, y = 0$$
$$y_1(t) = \exp(t)/t \qquad \alpha(t) = 1/t\,.$$

(c)
$$y'' + \sqrt{t}\, y' + (\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t})\, y = 0$$
$$y_1(t) = 1/t \qquad \alpha(t) = 1/t - \sqrt{t}\,.$$

4 - Osservazioni conclusive

Da quanto si è visto in 2 e 3 le basi matematiche per determinare delle EDOLO2 con associate soluzioni, sono relativamente semplici e gestibili con metodi SMP. Tali basi formali possono essere estese senza difficoltà ad EDOLO di ordini superiori al secondo. Per quanto riguarda ED ordinarie non lineari il problema è ovviamente molto più intricato, ma sembra possibile individuare metodi di determinazione, almeno per classi particolari di ED. Metodi di determinazione, quali quelli qui delineati, per alcuni tipi di ED alle derivate parziali potrebbero essere messi a punto tramite la fattorizzazione dei pluriderivatori [3] [5], che da un certo punto di vista riconduce le ED a derivate parziali di prima specie [3] ad ED ordinarie.

Per le EDOLO2, possiamo tratteggiare qualche aspetto e qualche problema della costruzione di un archivio informatico attivo (AEDB: poiché in lingua inglese si potrebbe denominare «Active Equation Data Base»). Una attività fondamentale di AEDB è quella di classificare funzioni: ogni funzione potrebbe essere identificata da un gruppo di lettere e da un insieme aperto di gruppi di cifre. Un AEDB è infatti basato su un archivio relazionale di funzioni (RFDB = Relational Function Data Base). Le funzioni classificate nel RFDB sono sia le soluzioni, sia i coefficienti delle EDOLO2 inserite inizialmente nell'archivio o determinate successivamente. La relazione fondamentale interna al RFDB è quella di una funzione di essere primitiva (o derivata) di un'altra.

L'archivio di funzioni RFDB è anche il punto di partenza (con p, o q, ovvero y_1 nota) di un insieme di EDOLO2, cioè quelle ottenibili variando α, anche essa da estrarre da RFDB. Il programma SMP di AEDB dovrà determinare le altre due funzioni (e la soluzione y_2) computando le espressioni date in 3, facendo ricorso a delle integrazioni indefinite e quindi facendo uso di RFDB e del suo carattere di tavola di primitive. Potrà presentarsi il caso in cui la primitiva della funzione integranda, non sia disponibile in RFDB in quanto non vi è la funzione integranda. Dovrà quindi essere presente anche un programma generatore di coppie «primitiva-derivata» con tecniche sia di integrazione numerica (ed associate tabulazioni e visualizzazioni grafiche), sia di integrazione simbolica (SMP).

Tipicamente il passaggio attraverso la generazione di nuove coppie «primitiva-derivata», potrà avvenire all'atto del collegamento di un utente che cerchi la soluzione di una EDOLO2. AEDB vedrà se tra le EDOLO2 archiviate esiste quella cercata, cioè quella con i coeficienti p e q richiesti dall'utente, o eventualmente con solo p (ed altri q), ovvero con solo q (ed altri p), ovvero nessuna EDOLO2 con i coefficienti richiesti. Mentre nella prima eventualità AEDB fornirà all'utente la soluzione o le soluzioni desiderate, negli altri tre casi scatterà una fase di determinazione (prioritaria rispetto a quella autonoma), mirata all'esigenza dell'utente, il quale potrà avere solo una eventuale risposta differita.

Consideriamo un esempio. In AEDB esistono una o più equazioni con il coefficiente p fornito dall'utente, ma non ne esiste alcuna che abbia come secondo coefficiente la q dell'utente, e questa ultima non è neppure classificata in RFDB. Partirà allora uno studio di classificazione della q e di funzioni simili e poi la determinazione di un insieme sufficientemente ampio di EDOLO2 con associate soluzioni aventi tutte il p di utente. La classificazione dei secondi coefficienti così generati in RFDB potrebbe essere il punto di partenza per un programma di analisi delle identità-differenze di questi q rispetto alla q di utente (ad esempio della distanza tra i coefficienti q in opportuni spazi funzionali), che potrebbe permettere di scegliere $\alpha(t)$ e Λ in modo da generare proprio il q di utente, almeno per una parte significativa delle richieste.

Dagli accenni sopra considerati emerge la difficoltà dell'impresa anche soltanto nel caso relativamente semplice delle EDOLO2, specie per gli aspetti legati alle richieste non direttamente soddisfacibili. Sembra però emergere anche una significativa potenzialità di archivi informatici attivi quale quelli qui delineati, che dovrebbe spingere ad avviare una indagine di fattibilità su questi potenziali strumenti.

Bibliografia

[1] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, Vol. II, Chap. 18, Gauthier-Villars Éd., Paris, 1925.

[2] E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Losungsmethoden und Losungen* (II), Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

[3] A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) 6 (1955), 321-348.

[4] A. MAMBRIANI e G. MAMBRIANI: $[\bullet]_1$ *Deralgebra ristretta: primo passo verso una nuova «analisi funzionale»* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 1-22; $[\bullet]_2$ *Deralgebra ristretta: primo passo verso una nuova «analisi funzionale»* (II), Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 1-26.

[5] B. MANFREDI, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 4 (1949), 381-390.

Abstract

The problem of building a differential equation jointly with its solutions is briefly analysed, and simple new methods are described for the particular case of linear homogeneous differential equations of the second order. This problem can be said to be marginal from a standard point of view, because one is usually interested in getting information concerning the solutions of a given equation. But the determination of equations together with their general solutions could become an interesting tool when considering the present development of computers and symbolic mathematical software. In fact one can imagine an active data base, where a large number of differential equations with their solutions are not only classified and registered, but also new equations and their integrals are generated, either automatically or in connection with some user requests. Starting with the above mentioned methods for building second-order equations, some features and problems of possible active data bases for differential equations are considered and analysed.

***