Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 265-269

MARK ANDREA DE CATALDO (*)

Fibrazioni ellittiche e fibrati olomorfi (**)

Introduzione

Le trasformazioni logaritmiche e le loro inverse, operanti sulle fibrazioni ellittiche, sono state introdotte da Kodaira in $[4]_2$. Poiché in generale esse non conservano l'algebricità, sorge naturale il problema di determinare esplicitamente classi di fibrazioni ellittiche per cui si verifichi questa circostanza. Dal momento che tali trasformazioni sono sempre dei meromorfismi, ciò equivale a caratterizzare classi di superfici per le quali queste applicazioni non siano birazionali. Qui si fornisce una dimostrazione (Teorema 1.6) del fatto che ciò accade per tutte le fibrazioni ellittiche $S \xrightarrow{\varphi} \Delta$ relativamente minimali tali che S abbia dimensione di Kodaira $\varkappa(S) \geqslant 0$. Viene inoltre data una caratterizzazione (Proposizione 1.2) di quelle fibrazioni ellittiche che individuano dei fibrati olomorfi: sono tutte e sole quelle le cui fibre siano lisce.

0 - Notazioni e generalità

Il termine superficie denoterà sempre una superficie complessa e compatta. Sia S una superficie. Si utilizzeranno le seguenti notazioni:

K_S:	un divisore canonico di S;
$\varkappa(S)$:	la dimensione di Kodaira di S;
$q(S)$:	l'irregolarità di S;
$\chi(O_S)$:	la caratteristica del fascio strutturale di S;
$\chi_{\text{top}}(S)$:	la caratteristica topologica della superficie S;

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica «F. Enriques», Via C. Saldini 50, I-20133 Milano.

(**) Ricevuto: 20-XI-1989.

A^2: l'indice d'autointersezione di un divisore A di S;
$A \cdot B$: l'indice d'intersezione di due divisori A, B di S.
$\sim_n$: il simbolo d'equivalenza numerica di divisori.

Si ricorda che una superficie S è detta *ellittica* se essa ammette una fibrazione ellittica, cioè se esiste una mappa olomorfa suriettiva $\psi: S \to \Delta$ su una curva liscia Δ la cui fibra generica sia liscia ed ellittica; qualora le fibre di ψ non contengano curve eccezionali di prima specie si dice che la fibrazione ellittica (o addirittura S) è *relativamente minimale*. Per quanto concerne le notazioni, la terminologia ed i risultati riguardanti le fibrazioni ellittiche, che qui verranno utilizzati liberamente, si rimanda ai lavori di Kodaira $[4]_{1,2}$. Ci si limita a ricordare che una fibra di $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ viene detta *singolare* se contiene punti sui quali il rango dello jacobiano di ψ cala. I tipi possibili di fibre singolari sono descritti in $[4]_1$ (Theorem 6); fra esse si trovano quelle di tipo mI_b, $b \geqslant 0$ e $m \geqslant 2$, le quali vengono dette *multiple*. Inoltre si ricordi che una trasformazione logaritmica centrata su una fibra di tipo $1I_b$, relativa alla fibrazione $S \xrightarrow{\psi} \Delta$, fornisce una seconda fibrazione ellittica $S^* \xrightarrow{\psi^*} \Delta$ ottenuta dalla precedente sostituendo alla fibra considerata una di tipo mI_b ($\forall m > 1$). Qui l'operazione inversa di una trasformazione logaritmica verrà chiamata *scioglimento* della fibra multipla.

Per quanto attiene alle due nozioni di *fibrato olomorfo* e di *famiglia liscia* si rimanda ad esempio a [1].

Infine si ricorda il seguente fatto noto.

(0.1) Siano S una superficie e $p: S \to B$ una mappa olomorfa e suriettiva su una curva B. Si supponga che p sia fibre connesse e si denoti con F la fibra generica di p. Risulta

$$\chi_{\text{top}}(S) = \chi_{\text{top}}(F)\,\chi_{\text{top}}(B) + \sum_{s \in \Sigma} (\chi_{\text{top}}(F_s) - \chi_{\text{top}}(F))$$

ove Σ denota l'insieme dei punti di B sopra i quali p non è liscia e F_s denota la fibra sopra il punto s. (Cfr. [2], Lemma VI.4).

1 - I risultati

Qui e nel seguito verranno utilizzate le notazioni di Kodaira.

Lemma 1.1. *Sia $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ una superficie ellittica relativamente minimale con $\varkappa(S) \geqslant 0$. Allora S è minimale.*

Dim. La formula del canonico (cfr. [4]$_2$, Theorem 12) comporta $K_S \sim_n qF$ ove F denota la fibra generica di ψ e q è un numero razionale.

Per assurdo S contenga una curva eccezionale di prima specie E. Poiché $F \cdot E > 0$, essendo S relativamente minimale, la relazione $-1 = K_S \cdot E = qF \cdot E$ comporta $q < 0$. Ciò contrasta l'ipotesi $\varkappa(S) \geqslant 0$.

Proposizione 1.2. *Sia $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ una fibrazione ellittica. Allora le tre seguenti proprietà sono fra loro equivalenti:*

(a) *$S \xrightarrow{\psi} \Delta$ individua un fibrato olomorfo;*
(b) *S è minimale e non vi sono fibre singolari;*
(c) *$\chi_{\text{top}}(S) = 0$ e non vi sono fibre multiple.*

Dim. Si denoti con F una fibra generica di ψ.

(a) $\Rightarrow$ (b). Poiché ψ individua un fibrato olomorfo è sufficiente provare la minimalità di S. Per assurdo sia E una curva eccezionale di prima specie contenuta in S; si osservi che, per le ipotesi su ψ, S è relativamente minimale e, quindi, $F \cdot E > 0$. Innanzitutto S è algebrica in quanto, considerato il divisore $D := 2F + E$, risulta $D^2 > 0$ (cfr. [3], pag. 363). Inoltre S è rigata per il Lemma 1.1. Dal momento che ψ non ha fibre singolari, applicando la (0.1) a ψ si ottiene $\chi_{\text{top}}(S) = 0$ e, quindi, per la formula di Noether $0 = \chi(O_S) = 1 - q(S)$. Ne viene che un modello minimale S' di S è una superficie geometricamente rigata su una curva ellittica; la (0.1) porge pertanto $\chi_{\text{top}}(S') = 0$, ma ciò contrasta l'ovvia disuguaglianza $\chi_{\text{top}}(S') < \chi_{\text{top}}(S) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Ancora la (0.1) basta per concludere.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sia $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ come in (c). Si ricorda che la caratteristica topologica di una fibra singolare in una fibrazione ellittica è non negativa, inoltre è nulla se e solo se la fibra è di tipo mI_0 $(m > 1)$. Quindi la (0.1) assicura che non vi sono fibre singolari. Ne viene che *l'invariante fondamentale* $J(S)$ di $S \xrightarrow{\psi} \Delta$, definito in [4]$_1$ risulta essere una applicazione olomorfa a valori nel campo complesso ed è perciò costante. Le fibre di ψ sono dunque analiticamente isomorfe fra loro e, per via del teorema di trivializzazione locale di Grauert-Fischer (cfr. [1], pag. 29), ciò equivale ad affermare che $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ individua un fibrato olomorfo.

Osservazione 1.3. Le due nozioni di fibrato olomorfo e di famiglia liscia sono, in generale, distinte (si veda [1], pag. 29): più precisamente un fibrato olomorfo costituisce una famiglia liscia, ma non viceversa. I due concetti, nel caso che S sia una superficie compatta, sono equivalenti precisamente quando le fibre siano analiticamente isomorfe fra loro. Nel caso delle superfici ellittiche ciò accade, in forza della proposizione precedente, precisamente quando la superficie è minimale e non compaiono fibre singolari.

Osservazione 1.4. Sia $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ una fibrazione ellittica relativamente minimale con $\chi(O_S)=0$; allora la formula di Noether e la relazione $K_S^2=0$ porgono $\chi_{\mathrm{top}}(S)=0$. Ne viene che ψ presenta al più fibre di tipo mI_0. Pertanto la superficie ellittica $S^* \xrightarrow{\psi^*} \Delta^*$, ottenuta sciogliendo le eventuali fibre multiple di ψ, individua, per la proposizione sopra dimostrata, un fibrato olomorfo.

Siano $S \xrightarrow{\psi} \Delta$ una superficie ellittica relativamente minimale dotata di una fibra multipla f e $S^* \xrightarrow{\psi^*} \Delta^*$ la superficie ottenuta da S sciogliendo la fibra f; si denoti con f^* la fibra su S^* corrispondente a f. Risulta definito un biolomorfismo

$$h: S \setminus \{f\} \to S^* \setminus \{f^*\}. \tag{1.5}$$

Sussiste il seguente

Teorema 1.6. *Siano S e S^* come sopra. Se S è algebrica e $\varkappa(S) \geqslant 0$, allora S^* non lo è.*

Dim. Per assurdo si supponga che S^* sia algebrica; ne viene che il biolomorfismo h che figura nella (1.5) definisce una applicazione birazionale $h: S \dashrightarrow S^*$. Per il teorema dell'eliminazione delle indeterminazioni, si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\eta} & S \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ S^* & \xrightarrow{\psi^*} & \Delta \end{array}$$

dove $\tilde{S}$ è una superficie algebrica e η e g sono dei morfismi birazionali. Si osservi che $S^* \xrightarrow{\psi^*} \Delta$ è anch'essa relativamente minimale e quindi S ed S^* sono minimali in virtù del Lemma 1.1. Poiché $\varkappa(S) \geqslant 0$, l'unicità del modello minimale per le superfici algebriche non rigate comporta $S \approx S^*$.

Si denotino con f_i $(i=1, \ldots, s)$ le fibre multiple di ψ, in particolare sia $f=f_s$, e con F e F^* le fibre generiche reltive a ψ e a ψ^* rispettivamente. È chiaro che $F \sim_n F^*$ e, pertanto, se m_i è la molteplicità di f_i si hanno le seguenti due relazioni, che discendono dalla formula del divisore canonico,

$$K_{S^*} = K_S \sim_n (2g(\Delta) - 2 + \chi(O_S))F + \sum_{i=1}^{s} (m_i - 1) f_i$$

$$K_S = K_{S^*} \sim_n (2g(\Delta) - 2 + \chi(O_S))F^* + \sum_{i=1}^{s-1} (m_i - 1) f_i$$

ciò che è assurdo.

Osservazione 1.7. Dalla dimostrazione precedente si ricava facilmente che, sciogliendo un numero qualsiasi di fibre multiple, partendo da una superficie ellittica algebrica e minimale avente $\varkappa(S) \geqslant 0$, si ottiene una superficie non algebrica. Viceversa partendo da una superficie ellittica algebrica relativamente minimale, si introducano delle fibre multiple mediante successive trasformazioni logaritmiche; la superficie così ottenuta non è algebrica.

Bibliografia

[1] W. Barth, C. Peters and A. Van De Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

[2] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, London Math. Soc. Lectures Note Series, Cambridge University Press, Cambridge 1983.

[3] E. Bombieri and D. Husemoller, *Classification and embeddings of surfaces*, in Algebraic Geometry, Arcata 1974 Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 329-420.

[4] K. Kodaira; [•]$_1$ *On Compact analytic surfaces* II, Ann. of Math. 77 (1963), 1-40; [•]$_2$ *On the structure of compact complex analytic surfaces* I, Amer. J. Math. 86 (1964), 751-798.

Summary

Let S be a compact complex surface and let $S \to \Delta$ be an elliptic fibration. Let S^* stand for the transform of S via either a logarithmic transformation or the inverse of one of them. We exhibit a class of algebraic surfaces S such that S^* is not algebraic. Furthermore, we characterize the elliptic fibrations which are holomorphic bundles.

* * *