Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 1-6

KERIM KOCA (*)

# Pseudoholomorphe Logarithmusfunktionen (**)

Die komplexe logarithmische Funktion erfüllt das komplexe Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad w_{\bar z} = 0 \qquad w_z = l \cdot \mathrm{e}^{-w} \qquad (z = x + iy, \ \bar z = x - iy)$$

für $z \neq 0$, $-\pi < \arg z < \pi$, $w := \operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg z$.

Wir betrachten jetzt das komplexe partielle Differentialgleichungssystem

$$(2) \qquad w_{\bar z} = A(z, \ \bar z)\, \mathrm{e}^{-w} \qquad w_z = B(z, \ \bar z)\, \mathrm{e}^{-w}$$

wobei die Funktionen $A$ und $B$ differenzierbar in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbf{C}$ sind. Wir nehmen an, dass das Gebiet $D$ den Nullpunkt nicht enthält.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Lösungen des Systems (2) die Funktionelgleichung

$$(3) \qquad w(z_1 z_2) = w(z_1) + w(z_2)$$

für alle $z_1$, $z_2 \in D$ erfüllen.

Wir definieren jetzt eine Funktion $T(z)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} \text{(i) } T(z_1 z_2) = T(z_1)\, T(z_2) \text{ für alle } z_1, \ z_2 \in D & \text{(ii) } T(1) = 1 \quad 1 \in \mathrm{D} \\ \text{(iii) } -\pi < \arg [T(z)] < \pi & \text{(iv) } T \text{ besitzt keine Nullstelle in } D. \end{array}$$

---

(*) Indirizzo: Ankara Universitesi Fen Fakültesi, Matematik Bolümü, TR-06100 Tandogan-Ankara.

(**) Ricevuto: 4-VIII-1988.

Z.B., wir können die Funktion $T$ speziell so wählen

$$T(z)=z \qquad T(z)=1 \qquad T(z)=z\bar{z} \qquad T(z)=\exp[g(\operatorname{Log} z)]$$

mit $-\pi<\arg z<\pi$ und $g$ eine additive Funktion, d.h.g. $(z_1+z_2)=g(z_1)+g(z_2)$ für alle $z_1,\ z_2\in D$.

Das System (2) lösbar genau dann, wenn $A_z=B_{\bar{z}}$ ist. Wir berücksichtigen nun die Funktion

$$W(z)=\operatorname{Log}[T(z)]. \tag{5}$$

Hierbei sei $T$ eine Funktion, die Eigenschaften (4) erfüllt.

Satz 1. (a) (5) *ist eine Lösung von* (2), *wenn die Relationen*

$$T_{\bar{z}}=A \qquad T_z=B \tag{6}$$

*gültit sind.*

(b) *Wenn $T$ eine die Relationen* (6) *genügende Funktion ist, dann ist die allgemeinste Lösung in der Form*

$$w=\operatorname{Log}[T(z)+c] \tag{7}$$

*mit $c\in C$ schreibbar.*

(c) *Wenn $T$ neben* (6) *den Eigenschaften* (i)-(iv) *in* (4) *genügt, dann erfüllt die Lösung* (5) *die Funktionelgleichung* (3). *Ausserdem gilt $W(1)=0$.*

Beweis. (a) Es sei (6) gültig. Dann kann man aus (5)

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}}&=T_{\bar{z}}\frac{1}{T}=T_{\bar{z}}\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Log}(T)}=T_{\bar{z}}\,\mathrm{e}^{-W}=A\mathrm{e}^{-W}\\ W_z&=T_z\frac{1}{T}=T_z\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Log}(T)}=T_z\,\mathrm{e}^{-W}=B\mathrm{e}^{-W}\end{aligned} \tag{8}$$

schreiben. Also ist die Funktion (5) eine Lösung von (2).

(b) Wenn (6) gilt, dann können wir aus (2)

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\mathrm{e}^{w})=A=T_{\bar{z}} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{e}^{w})=B=T_z \tag{9}$$

schreiben. Hieraus erhält man durch Integral nach $\bar{z}$ und $z$

$$w = \mathrm{Log}[T(z) + \phi(z)] \qquad w = \mathrm{Log}[T(z) + \psi(z)]$$

mit $\phi$ holomorf, $\psi$ anti-holomorf in $D$. Weil wir uns mit den eindeutigen Lösungen von (2) beschäftigen, muß $\phi = \psi = c \in \mathrm{C}$ sein.

(c) $T$ sei neben (6) die Eigenschaften (i)-(iv) in (4) erfüllt. Dann gilt für alle $z_1,\ z_2 \in D$

$$W(z_1 z_2) = \mathrm{Log}[T(z_1 z_2)] = \mathrm{Log}[T(z_1) \cdot T(z_2)] = W(z_1) + W(z_2).$$

Weil $T(1) = 1$ ist, gilt die Eigenschaft $W(1) = 0$.

Es sei $w$ eine Lösung von (2), die in der Form (5) schreibbar ist. Dann ist die komplexe Differential von $w$

$$dw = w_z\, dz + w_{\bar{z}}\, d\bar{z}. \tag{10}$$

Wenn wir in (10) die Polarkoordinaten

$$x = t \cos\theta \qquad y = t \sin\theta$$

verwenden, dann ergibt sich

$$dw = [(Be^{i\theta} + Ae^{-i\theta})\, dt + it(Be^{i\theta} - Ae^{-i\theta})\, d\theta]\, e^{-w}. \tag{11}$$

Andererseits gilt für die Funktion

$$w(t,\ \theta) = \mathrm{Log}[\chi(t,\ \theta)] \tag{12}$$

$$dw(t,\ \theta) = \frac{1}{\chi(t,\ \theta)} d\chi(t,\ \theta) = e^{-w(t,\ \theta)}\, d\chi(t,\ \theta). \tag{13}$$

Hierbei ist $\chi$ eine Funktion, die neben der Eigenschaften von $T$ in (4)

$$\chi_{\bar{z}} = A \qquad \chi_z = B \tag{14}$$

erfüllt und besitzt in $D$ keine Nullstelle. Wenn wir (11) mit (13) vergleichen, dann können wir

$$d\chi(t,\ \theta) = (Be^{i\theta} + Ae^{-i\theta})\, dt + it(Be^{i\theta} - Ae^{-i\theta})\, d\theta \tag{15}$$

schreiben. Daraus folgt

$$\chi = \int_{\Gamma} (Be^{i\theta} + Ae^{-i\theta})\, dt + it(Be^{i\theta} - Ae^{-i\theta})\, d\theta \tag{16}$$

wobei $\Gamma(z_0, z)$ eine hinreichend glatte Kurve in $D$, deren Anfangspunkt $z_0$, Endpunkt $z(z \neq z_0)$ ist. Also ist die Funktion

$$w = \mathrm{Log}\left[\int_{\Gamma} (Be^{i\theta} + Ae^{-i\theta})\, dt + it(Be^{i\theta} - Ae^{-i\theta})\, d\theta\right] \tag{17}$$

eine Lösung von (2) in Polarkoordinaten unter Bedingung (14). Wenn es $-\pi < \arg[\chi(z)] < \pi$ gilt, so ist (17) eine eindeutige Lösung von (2).

Folgerung. *Wenn die Funktion $\chi$ die Eigenschaften* (i)-(iv) *in* (4) *erfüllt, dann genügt die Funktion* (17) *der Funktionelgleichung* (3) *für alle $z_1$, $z_2 \in D$ und $w(1) = 0$.*

Beweis. Beweis ist klar, weil $w(z) = \mathrm{Log}[\chi(z)]$ ist.
Aus (15) kann man

$$\chi_t = Be^{i\theta} + Ae^{-i\theta} \qquad \chi_\theta = it(Be^{i\theta} - Ae^{-i\theta}) \tag{18}$$

schreiben. Wir berücksichtigen nun die Funktion

$$w(z) = \mathrm{Log}[\chi(z)]\,. \tag{19}$$

Satz 2. *Es sei $w$ eine Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems* (2), *die in der Form* (19) *schreibbar ist. Die Funktion $\chi$ erfülle die Eigenschaft $\chi(1) = 1$ und* (18). *$w$ genügt der Funktionelgleichung* (3) *für alle $z_1$, $z_2 \in D$ genau dann, wenn eine lineare Funktion $g$ existiert, die die Relationen*

$$\begin{aligned} A(te^{i\theta})\, e^{-i\theta} + B(te^{i\theta})\, e^{i\theta} &= \frac{\partial}{\partial t}\{\exp g[\mathrm{Log}(te^{i\theta})]\} \\ A(te^{i\theta})\, e^{-i\theta} - B(te^{i\theta})\, e^{i\theta} &= it^{-1}\frac{\partial}{\partial \theta}\{\exp g[\mathrm{Log}(te^{i\theta})]\} \end{aligned} \tag{20}$$

*erfüllt, wobei $z = te^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$ sind.*

Beweis. Es sei $w$ eine Lösung von (2) in der Form (19). Ausserdem nehmen wir an, daß die Funktionelgleichung $w(z_1 z_2) = w(z_1) + w(z_2)$ für alle $z_1,\ z_2 \in D$ gilt. Also ist

$$w(z_1 z_2) = \mathrm{Log}[\chi(z_1 z_2)] = w(z_1) + w(z_2) = \mathrm{Log}[\chi(z_1)] + \mathrm{Log}[\chi(x_2)]\,. \tag{21}$$

Nach (21) muß $\chi$ die Funktionelgleichung

$$\chi(z_1 z_2) = \chi(z_1) \cdot \chi(z_2) \tag{22}$$

erfüllen. Aber die Funktionelgleichung (22) besitzt eine Lösung in der Form

$$\chi(z) = \exp g(\mathrm{Log}\, z) \tag{23}$$

wobei $g$ eine lineare Funktion in $D$ ist. Dann ergibt sich die Relation (20) unter Verwendung (18). Umgekehrt: Wir nehmen nun an, daß (20) gültig ist. Weil $w = \mathrm{Log}[\chi(t)]$ eine Lösung von (2) ist, erfüllt $\chi$ (18). Weil (20) gilt, erhält man die Funktion $\chi$ unter Verwendung $\chi(1) = 1$ in der Form (23). Dann gilt es (22) und daraus (3).

Beispiel 1. Es seien $A(z) = bz^a(\bar{z})^{b-1}$, $B(z) = az^{a-1}(\bar{z})^b$ mit $a,\ b \in R - \{-1\}$, $z \neq 0$. Hieraus kann man

$$Ae^{-i\theta} + Be^{i\theta} = \frac{\partial}{\partial t}\{\exp[\mathrm{Log}(t^{a+b}\, e^{i\theta(a-b)})]\}$$

$$Ae^{-i\theta} - Be^{i\theta} = it^{-1}\frac{\partial}{\partial \theta}\{\exp[\mathrm{Log}(t^{a+b}\, e^{i\theta(a-b)})]\}$$

schreiben. Also ist $g(z) = az + b\bar{z}$ oder $g[\mathrm{Log}\, z] = a\,\mathrm{Log}\, z + b\,\mathrm{Log}\, \bar{z}$. Weil die Relationen (20) gültig und $A_z = B_{\bar{z}}$ sind, ist die Funktion $w = g(\mathrm{Log}\, z)$ eine Lösung von (2), die die Funktionelgleichung (3) und $w(1) = 0$ erfüllt.

Beispiel 2. Es seien $A$, $B$ und $\theta$ konstant und $A \neq B$. Dann kann man die Funktion $\chi$ aus (15) $\chi(z) = A\bar{z} + Bz + \alpha$ erhalten, wobei $\alpha$ eine willkürliche Konstante ist. Die Funktion

$$w = \mathrm{Log}[A\bar{z} + Bz + \alpha] \tag{24}$$

ist eine Lösung von (2). Andererseits erfüllt (24) die Funktionelgleichung (3) und $w(1) = 0$ im Allgemein nicht. (Wenn man $\alpha \equiv 0$ wählt, gilt das auch nicht.) Denn man kann keine lineare Funktion $g$ finden, die die Eigenschaften in (20) besitzt.

## Literaturverzeichnis


[1] L. BERS, *Theory of pseudo-analytic functions*, New York, 1953.

[2] K. KOCA, *Über die Eigenschaften der Räume $P_D(F^n, fF^n)$ und $P_D(F^n, iF^n)$*, Mathematics and Informatics 3 (1988), 15-22.

[3] K. KOCA und C. WITHALM, *Über die Eigenschaften des Raumes $P_D(F, fF)$*, An. Stiint. Univ. «Al. I. Cuza» Iasi Seet. I a Met. (2) 35 (1989).

[4] W. TUTSCHKE, *Pseudoholomorphe Exponentialfunktionen*, Beitrage zur Analysis (1971), 115-121.

[5] I. N. VEKUA, *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Akademie Verlag, Berlin, 1963.

[6] C. WITHALM: $[\bullet]_1$ *Main generating Systems of pseudoholomorphic Functions*, Math. Balkanica 11, 1981; $[\bullet]_2$ *Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen*, Glas. Mat. 2 (1974), 233-240.



## Zusammenfassung

*In der vorliegenden Arbeit wird das komplexe partielle Differentialgleichungssystem $w_{\bar z} = Ae^{-w}$, $w_z = Be^{-w}$ behandelt und untersucht, unter welchen Bedingungen die Lösungen dieses System die Funktionelgleichung $w(z_1 z_2) = w(z_1) + w(z_2)$ erfüllen.*


***