Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 283-302

ALBERTO CIALDEA (*)

Formule di maggiorazione e teoremi di completezza relativi al sistema dell'elasticità tridimensionale (**)

1 - Posizione dei problemi

Sia Ω un campo limitato dello spazio reale cartesiano $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$ sia connesso e la frontiera $\partial\Omega$ sia una superficie di Lyapunov, ossia il vettore *normale interna* $\nu(x)$ risulti di classe C^λ su Σ e quindi le sue componenti $\nu_j(x)$ soddisfano una condizione uniforme di Hölder su $\partial\Omega$ per qualche esponente λ $(0 < \lambda \leq 1)$.

Indichiamo con $L^p(\Omega)$ $(L^p(\partial\Omega))$ la classe dei vettori le cui componenti sono funzioni misurabili secondo Lebesgue su Ω (su $\partial\Omega$) a potenza p-sima sommabile. Con $H^1(\Omega)$ indichiamo la classe dei vettori $(f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)$ tali che f_j $(j = 1, 2, 3)$ possiede derivate deboli di quadrato sommabile in Ω.

Con $C^k(\Omega)$ indichiamo lo spazio dei vettori le cui componenti sono derivabili con continuità fino all'ordine k incluso. $C^1(\bar{\Omega})$ è lo spazio dei vettori $(f_1, f_2, f_3) \in C^1(\Omega)$ tali che f_j, $\partial f_j/\partial x_h$ $(j, h = 1, 2, 3)$ coincidono con funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$.

Consideriamo il problema

$$(1.1) \qquad v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \qquad Av = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad Lv = f \quad \text{su } \partial\Omega$$

dove A ed L, scritti in forma vettoriale, sono

$$(1.2) \qquad Au = \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u \qquad (\mu > 4/3)$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università «La Sapienza», P.le Aldo Moro 2, I-00185 Roma.

(**) Ricevuto: 17-X-1988.

$$Lu = (\mu - 2)\,\mathrm{div}\,u \cdot \nu + 2\frac{\partial u}{\partial \nu} + \nu \wedge \mathrm{rot}\,u\,. \tag{1.3}$$

Poniamo

$$E(v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4}(v_{i,j} + v_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{\mu - 2}{2}(\mathrm{div}\,v)^2\right] dx$$

dove $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$ e viene adottata la solita convenzione di sommatoria per gli indici ripetuti.

Come è ben noto $E(v)$ rappresenta l'*energia di deformazione*. Vogliamo maggiorare $E(v)$ con le forze di superficie, ossia mediante il vettore f. Osserviamo che, se v è soluzione di (1.1), con un'integrazione per parti, si ottiene (¹)

$$E(v) = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{L}v\,d\sigma \leq \frac{1}{2}\|v\|_{\partial\Omega}\|f\|_{\partial\Omega}\,.$$

Consideriamo ora il

$$\sup_{v \in W} \frac{\|v\|^2_{\partial\Omega}}{E(v)} \tag{1.4}$$

essendo $W = \{v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\partial\Omega} v(a + b \wedge x)\,d\sigma = 0 \quad \forall a,\; b \in \mathbb{R}^3\}$.

Se si riesce a maggiorare questo estremo superiore mediante una costante K, si ha

$$E(v) \leq \frac{K^{1/2}}{2} E(v)^{1/2}\|f\|_{\partial\Omega} \qquad \text{ossia}$$

$$E(v) \leq \frac{K}{4}\|f\|^2_{\partial\Omega} \tag{1.5}$$

purché, ovviamente, si imponga alla soluzione v di (1.1) di essere ortogonale su $\partial\Omega$ agli spostamenti rigidi. D'altra parte, essendo $E(v + a + b \wedge x) = E(v)$ ed

(¹) Avendo posto, ovviamente, $\|v\|^2_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} v_i v_i\,d\sigma$.

$L(v+a+b\wedge x)=Lv$, la (1.5) rimane acquisita per ogni soluzione v di (1.1). In **2** e **3** mostreremo un metodo per ottenere esplicitamente una costante K. La tecnica impiegata trae partito da un procedimento introdotto da L. E. Payne e H. F. Weinberger in [7].

In questo paragrafo introduttivo vogliamo ancora osservare che, come si prova con ragionamenti classici,

$$\sup_{v\in W}\frac{\|v\|^2_{\partial\Omega}}{E(v)}=\frac{2}{\lambda_2} \tag{1.6}$$

essendo λ_2 il più piccolo autovalore non nullo del seguente problema di Stekloff

$$v\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega) \qquad Av=0 \quad \text{in } \Omega \qquad Lv+\lambda v=0 \quad \text{su } \partial\Omega\,.$$

In **4** viene affrontato infine il problema della completezza di sistemi di funzioni approssimanti la soluzione del problema dell'elasticità nel quale vengono assegnate le forze superficiali e quelle di massa.

Si considera prima la completezza in un campo a contorno connesso del sistema delle soluzioni polinomiali dell'equazione omogenea dell'equilibrio elastico relativamente all'operatore che sulla frontiera rappresenta le forze superficiali per mezzo degli spostamenti. Si considera poi il caso generale relativo a forze di massa non nulle.

Le formule di maggiorazione ottenute nella prima parte del lavoro permettono la maggiorazione esplicita dell'errore di approssimazione.

2 - Maggiorazione relativa alla sfera

Consideriamo il problema di Stekloff seguente

$$u\in C^1(\bar{D})\cap C^2(D) \qquad Au=0 \quad \text{in } D \qquad Lu+\lambda u=0 \quad \text{su } \partial D \tag{2.1}$$

essendo D il campo sferico: $|x|<1$.

Introduciamo un sistema di coordinate polari ρ, φ, ϑ ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$) mediante le relazioni $x=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $z=\rho\cos\varphi$.

Siano $(u_\rho,\ u_\varphi,\ u_\vartheta)$ le *componenti* (o *proiezioni*) di u secondo le linee coordinate del sistema polare. In [1] si trova dimostrato che, se il vettore u è soluzione dell'equazione $Au=0$ in D, sussistono i seguenti sviluppi

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} U_{nk}(\rho)\, Y_{nk} \tag{2.2$_1$}$$

$$u_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n(n+1)} [V_{nk}(\rho) \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \varphi} + W_{nk}(\rho) \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \vartheta}] \tag{2.2$_2$}$$

$$u_\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n(n+1)} [V_{nk}(\rho) \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \vartheta} - W_{nk}(\rho) \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \varphi}] \tag{2.2$_3$}$$

dove $\{Y_{nk}\}$ è il sistema di funzioni sferiche

$$Y_{nk}(\varphi,\ \vartheta) = \begin{cases} [\frac{2n+1}{4\pi}]^{1/2} X_n(\cos\varphi) & \\ [\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!}]^{1/2} X_n^{(k)}(\cos\varphi)\, \operatorname{sen}^k\varphi \cos k\vartheta & (k=1,\dots,n) \\ [\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(2n-k)!}{k!}]^{1/2} X_n^{(k-n)}(\cos\varphi)\, \operatorname{sen}^{k-n}\varphi\, \operatorname{sen}(k-n)\vartheta & (k=n+1,\dots,2n) \end{cases}$$

ove $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ ed $X_n(\cos\varphi)$ è il polinomio di Legendre di grado n. Inoltre

$$U_{nk}(\rho) = A_{nk}\, \alpha_n^\mu \rho^{n-1} + B_{nk}\, \beta_n^\mu \rho^{n+1} \tag{2.3$_1$}$$

$$V_{nk}(\rho) = n(n+1)\, [A_{nk}\, \gamma_n^\mu \rho^{n-1} + B_{nk}\, \delta_n^\mu \rho^{n+1}] \tag{2.3$_2$}$$

$$W_{nk}(\rho) = n(n+1)\, C_{nk}\, \rho^n \tag{2.3$_3$}$$

$(k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n)$, $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ essendo A_{nk}, B_{nk}, C_{nk} costanti arbitrarie e $\alpha_n^\mu = n[(n-1)-\mu(n+1)]$, $\beta_n^\mu = (n+1)[n+2-\mu n]$, $\gamma_n^\mu = (1-\mu)(n-1)-2\mu$, $\delta_n^\mu = (1-\mu)(n+1)-2\mu$.

Consideriamo ora l'operatore al contorno Lu; le sue componenti nel sistema di riferimento polare sono [2]

$$
(2.4)\qquad \begin{aligned}
&(Lu)_\rho = -2\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - (\mu - 2)\Delta \qquad (Lu)_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right)\\
&(Lu)_\vartheta = -\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{u_\vartheta}{\rho}\right)\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\Delta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\operatorname{sen}\varphi u_\varphi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}.
$$

Un calcolo diretto mostra che, se u è dato da (2.2), si ha

$$
\Delta = \operatorname{div} u = 6B_{00}Y_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n} B_{nk}[(n+3)\beta_n^\mu - n(n+1)\delta_n^\mu]\rho^n Y_{nk}.
$$

L'equazione $Lu + \lambda u = 0$ su ∂D equivale al sistema

$$
(Lu)_\rho + \lambda u_\rho = 0 \qquad (Lu)_\varphi + \lambda u_\varphi = 0 \qquad (Lu)_\vartheta + \lambda u_\vartheta = 0 \qquad (\rho = 1)
$$

ossia, tenendo presente la (2.4),

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}[(n-1)A_{nk}\alpha_n^\mu + (n+1)B_{nk}\beta_n^\mu]Y_{nk}\\
&+(\mu-2)\{6B_{00}Y_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}B_{nk}[(n+3)\beta_n^\mu - n(n+1)\delta_n^\mu]Y_{nk}\}\\
&=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}[A_{nk}\alpha_n^\mu + B_{nk}\beta_n^\mu]Y_{nk};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}[A_{nk}\alpha_n^\mu + B_{nk}\beta_n^\mu]\frac{\partial Y_{nk}}{\partial \varphi}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\{[(n-2)A_{nk}\gamma_n^\mu + nB_{nk}\delta_n^\mu]\frac{\partial Y_{nk}}{\partial \varphi} + (n-1)C_{nk}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial \vartheta}\}\\
&=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\{[A_{nk}\gamma_n^\mu + B_{nk}\delta_n^\mu]\frac{\partial Y_{nk}}{\partial \varphi} + C_{nk}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial \vartheta}\};
\end{aligned}
$$

---

[2] Cfr. ad esempio [2].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}[A_{nk}\alpha_n^\mu+B_{nk}\beta_n^\mu]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\vartheta}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\{[(n-2)A_{nk}\gamma_n^\mu+nB_{nk}\delta_n^\mu]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\vartheta}-(n-1)C_{nk}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\varphi}\}$$

$$=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\{[A_{nk}\gamma_n^\mu+B_{nk}\delta_n^\mu]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\vartheta}-C_{nk}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\varphi}\}.$$

Introdotti i vettori di componenti polari

$$a_{nk}=(Y_{nk},\ 0,\ 0) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\ k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n)$$

$$b_{nk}=(0,\ \frac{1}{(n(n+1))^{1/2}}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\varphi},\ \frac{1}{(n(n+1)^{1/2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\vartheta})$$

$$(n=1,\ 2,\ \dots;\ k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n)$$

$$c_{nk}=(0,\ \frac{1}{(n(n+1))^{1/2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\vartheta},\ -\frac{1}{(n(n+1))^{1/2}}\frac{\partial Y_{nk}}{\partial\varphi})$$

$$(n=1,\ 2,\ \dots;\ k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n)$$

il precedente sistema non è altro che l'equazione vettoriale

$$\Gamma_{00}a_{00}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}(\Gamma_{nk}a_{nk}+\Theta_{nk}b_{nk}+\Lambda_{nk}c_{nk})=0$$

dove: $n=1,\ 2,\ \dots;\ k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n;\ \Gamma_{00}=2(3\mu-4-\lambda)B_{00};$

$$\Gamma_{nk}=2[(n-1)A_{nk}\alpha_n^\mu+(n+1)B_{nk}\beta_n^\mu]+(\mu-2)\{B_{nk}[(n+3)\beta_n^\mu$$
$$-n(n+1)\delta_n^\mu]-\lambda[A_{nk}\alpha_n^\mu+B_{nk}\beta_n^\mu];$$

$$\Theta_{nk}=A_{nk}\alpha_n^\mu+B_{nk}\beta_n^\mu+(n-2)A_{nk}\gamma_n^\mu+nB_{nk}\delta_n^\mu-\lambda[A_{nk}\gamma_n^\mu+B_{nk}\delta_n^\mu];$$

$$\Lambda_{nk}=(n-1-\lambda)C_{nk}.$$

Essendo il sistema a_{00}, a_{nk}, b_{nk}, c_{nk} $(n=1, 2, \ldots; k=0, 1, \ldots, 2n)$ ortonormale sulla sfera, dovrà essere

$$(2.5) \qquad \Gamma_{00}=0 \qquad \Gamma_{nk}=\Theta_{nk}=\Lambda_{nk}=0 \qquad (n=1, 2, \ldots; k=0, 1, \ldots, 2n).$$

I valori di λ per i quali esistono delle autosoluzioni A_{nk}, B_{nk}, C_{nk} del sistema (2.5) saranno quindi autovalori del problema (2.1).

Dall'equazione $\Gamma_{00}=0$ e dal fatto che B_{00} non compare nelle altre equazioni del sistema (2.5), si trae che

$$(2.6) \qquad \lambda=3\mu-4$$

è un autovalore del problema (2.1).

Dalle equazioni $\Lambda_{nk}=0$ e dal fatto che le C_{nk} non compaiono nelle altre equazioni del sistema (2.5), si trae che

$$(2.7) \qquad \lambda=n-1 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

sono autovalori del problema (2.1).

Infine, $\Gamma_{nk}=\Theta_{nk}=0$, osservando che $\alpha_n^\mu=n\gamma_n^\mu$, si può scrivere al modo seguente

$$[2n(n-1)-\lambda n]\,\gamma_n^\mu A_{nk}$$
$$+\{2(n+1)\beta_n^\mu+(\mu-2)[(n+3)\beta_n^\mu-n(n+1)\delta_n^\mu]-\lambda\beta_n^\mu\}\,B_{nk}=0$$
$$n[2n-2-\lambda]\,\gamma_n^\mu A_{nk}+n[\beta_n^\mu+(n-\lambda)\,\delta_n^\mu]\,B_{nk}=0\,.$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema è nullo se e solo se

$$(2.8) \qquad 2n-2-\lambda=0 \qquad \text{oppure}$$

$$(2.9) \qquad 2(n+1)\beta_n^\mu+(\mu-2)[(n+3)\beta_n^\mu-n(n+1)\delta_n^\mu]-\lambda\beta_n^\mu=n[\beta_n^\mu+(n-\lambda)\,\delta_n^\mu]\,.$$

Dalla (2.8) si trae che

$$(2.10) \qquad \lambda=2(n-1) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

sono autovalori del problema (2.1). La (2.9), osservato che $\beta_n^\mu - n\delta_n^\mu = 2(n+1+\mu n) \neq 0$, ammette la radice

$$\lambda = \frac{2(\mu-1)n^2 + 2(2\mu-3)n + 3\mu - 4}{n(1+\mu)+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.11}$$

La (2.11), quindi, fornisce altri autovalori. Dalla completezza del sistema a_{00}, a_{nk}, b_{nk}, c_{nk} (3) si deduce che (2.6), (2.7), (2.10), (2.11) sono *tutti* gli autovalori del problema (2.1).

I. *Si ha*

$$\sup_{u \in W} \frac{\|u\|^2_{\partial D}}{E(u)} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\mu+2}{3\mu-4} & 4/3 < \mu \leqslant 7/4 \\ 2 & 7/4 \leqslant \mu\,. \end{cases}$$

In base alla (1.6) è sufficiente determinare il più piccolo autovalore non nullo del problema (2.1), ossia il più piccolo valore non nullo tra quelli forniti dalle (2.6), (2.7), (2.10), (2.11). Con considerazioni del tutto elementari si trova

$$\lambda_2 = \begin{cases} 3\,\dfrac{3\mu-4}{\mu+2} & 4/3 < \mu \leqslant 7/4 \\ 1 & 7/4 \leqslant \mu \end{cases} \tag{2.12}$$

ossia la tesi.

3 - Formule di maggiorazione in domini generali

II. *Sussistono le seguenti relazioni*

$$\sup_{v \in W} \frac{\|v\|^2_{\partial\Omega}}{E(v)} = \sup_{v \in W_0} \frac{\|v\|^2_{\partial\Omega}}{E(v)} \leqslant \sup_{u \in \mathcal{X}} \frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{E(u)}, \tag{3.1}$$

(3) Cfr. [1], pp. 294-295.

dove Ω è un campo che soddisfa le condizioni indicate in **1**, *W è lo spazio definito nel medesimo paragrafo e*

$$W_0 = \{u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \,|\, Au = 0 \text{ in } \Omega \qquad \int_{\partial\Omega} u(a + b \wedge x)\, d\sigma = 0 \qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\mathcal{K} = \{u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \,|\, Au = 0 \text{ in } \Omega \qquad \int_{\Omega} u(a + b \wedge x)\, dx = 0 \ \forall a, \qquad b \in \mathbb{R}^3\}.$$

La prima relazione in (3.1) è ovvia. Sia ora $v \in W_0$ e siano $\chi_k(x)$ $(k = 1, \ldots, 6)$ gli spostamenti rigidi ortonormalizzati in modo che

$$\int_{\Omega} \chi_h \chi_k \, dx = \delta_{hk}.$$

Poniamo
$$u(x) = v(x) - \sum_{k=1}^{6} c_k \chi_k(x) \qquad c_k = \int_{\Omega} u\chi_k \, dx.$$

È ovvio che $u \in \mathcal{K}$ ed $E(u) = E(v)$. Inoltre, essendo v ortogonale agli spostamenti rigidi su $\partial\Omega$, si ha

$$\|u\|^2_{\partial\Omega} = \|v\|^2_{\partial\Omega} + \Big\|\sum_{k=1}^{6} c_k \chi_k\Big\|^2_{\partial\Omega} \geq \|v\|^2_{\partial\Omega}$$

da cui segue facilmente la tesi.

Sul campo Ω facciamo l'ulteriore *ipotesi* che sia definito l'omeomorfismo

$$y^i = y^i(x_1,\ x_2,\ x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

di $\bar{\Omega}$ su $\bar{D}$ $(\bar{D}: |y| \leq 1)$, di classe 2 in $\bar{\Omega}$ e tale che il determinante della matrice jacobiana $\dfrac{\partial(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\partial(x_1,\ x_2,\ x_3)}$ sia sempre diverso da zero in $\bar{\Omega}$. Allora $(y^1,\ y^2,\ y^3)$ rappresenta un sistema di coordinate curvilinee in $\bar{\Omega}$. Sia u un vettore appartenente ad $H^1(\Omega)$; indicheremo con $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ le sue *componenti covarianti* rispetto al sistema di coordinate curvilinee $(y^1,\ y^2,\ y^3)$ e con $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ le sue *componenti* rispetto alle coordinate cartesiane ortogonali $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Posto

$$S(u) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i})\, dx$$

è ben noto che si può scrivere (4)

$$S(u)=\frac{1}{4}\int_D \sqrt{g}\, g^{ik} g^{jl}(u_{i|j}+u_{j|i})(u_{k|l}+u_{l|k})\,dy$$

dove g^{ik} sono le componenti controvarianti del tensore fondamentale, ossia $g^{ik}=\frac{\partial y^i}{\partial x_p}\frac{\partial y^k}{\partial x_p}$, g è il determinante della matrice formata dalle componenti covarianti del tensore fondamentale, ossia l'inverso del determinante della matrice $\{g^{ik}\}$, e, infine, $u_{i|j}$ denota la derivata covariante $u_{i|j}=\frac{\partial u_i}{\partial y^j}-\left\{ {p \atop i\ j} \right\} u_p$ essendo $\left\{ {p \atop i\ j} \right\}$ il simbolo di Christoffel di seconda specie (5).

Poniamo inoltre

$$S_0(u)=\frac{1}{4}\int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}+\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}+\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)dy \qquad D_0(u)=\int_D \frac{\partial u_i}{\partial y_j}\frac{\partial u_i}{\partial y_j}\,dy\,.$$

Per le ipotesi fatte sulle funzioni (3.2) esistono tre costanti positive α, β, γ tali che

$$\alpha\xi_i\xi_i \leq g^{1/4} g^{ij}\xi_i\xi_j \leq \beta\xi_i\xi_i \tag{3.3}$$

$$\sqrt{g}\, g^{ik} g^{jl} \left\{ {p \atop i\ j} \right\} \left\{ {q \atop k\ l} \right\} \xi_p\xi_q \leq \gamma^2 \xi_i\xi_i \tag{3.4}$$

valida per ogni $\xi\in\mathbb{R}^3$ e per ogni $y\in\bar{D}$.

Applicando (3.3), (3.4) e la disuguaglianza triangolare, si ottiene facilmente

$$\alpha[S_0(u)]^{1/2} \leq [S(u)]^{1/2}+\gamma\left(\int_D u_i u_i\,dy\right)^{1/2}. \tag{3.5}$$

D'altra parte, sia $\mathcal{K}$ lo spazio delle *funzioni scalari* $\varphi\in H^1(D)$, tali che $\int_D \varphi\,dy=0$ munito del prodotto scalare

$$(\varphi,\ \psi)=\int_D \operatorname{grad}\varphi\, \operatorname{grad}\psi\, dy\,. \tag{3.6}$$

(4) Cfr. [9].
(5) Cfr. [5], p. 124.

Il problema

$$(3.7) \qquad u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D) \qquad \Delta_2 u + pu = 0 \quad \text{in } D \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial D$$

ammette come autovalori le radici dell'equazione (6)

$$(3.8) \qquad \frac{d}{d\rho}[\psi_n(\sqrt{p}\,\rho)]_{\rho=1} = 0$$

dove $\psi_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}}$ e $J_{n+\frac{1}{2}}(r)$ indica la funzione di Bessel d'ordine $n + 1/2$. Se p_{nl} è radice dell'equazione (3.8), allora le funzioni

$$\psi_n(\sqrt{p_{nl}}\,\rho)\, Y_{nk}(\varphi, \vartheta) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

sono autosoluzioni del problema (3.7).

Ordiniamo gli autovalori in un'unica successione, diciamo $\{p_h\}$ ($p_0 = 0 < p_1 \leq p_2 \ldots$), e siano $\pi_h(x)$ ($h = 1, 2, \ldots$) le relative autofunzioni (che certamente appartengono allo spazio $\mathcal{K}$) ortonormalizzate secondo il prodotto scalare (3.6). Consideriamo, quindi, le proiezioni

$$P_n \varphi = \sum_{h=1}^{n} (\pi_h, \varphi)\, \pi_h \qquad Q_n = I - P_n\,.$$

Risulta

$$\sup_{\varphi \in Q_n \mathcal{K}} \frac{\int_D \varphi^2\, dy}{(\varphi, \varphi)} = \frac{1}{p_{n+1}}\,.$$

Dato un $\varepsilon > 0$, possiamo quindi determinare un m tale che

$$\int_D \varphi^2\, dy \leq \varepsilon^2 \int_D |\text{grad}\, \varphi|^2\, dy \qquad \forall \varphi \in Q^m \mathcal{K}\,;$$

in altri termini, per ogni funzione scalare $\varphi \in H^1(D)$ tale che

$$(3.9) \qquad \int_D \varphi\, dy = 0 \qquad \int_D \text{grad}\, \varphi\, \text{grad}\, \pi_h\, dy = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m)\,.$$

(6) Cfr. ad esempio [8], pp. 177 e p. 111-114.

È opportuno osservare che, essendo le π_h autosoluzioni di (3.7), mediante le formule di Green, le (3.9) si riscrivono al modo seguente ($\pi_0 \equiv 1$)

$$\int_D \varphi \pi_h \, dy = 0 \qquad (h = 0, 1, \dots, m). \tag{3.10}$$

Tornando alla (3.5), si può affermare che

$$\alpha [S_0(u)]^{1/2} \leq [S(u)]^{1/2} + \gamma \varepsilon [D_0(u)]^{1/2}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_D u_j \pi_h \, dy = 0 \qquad (j = 1, 2, 3;\ h = 0, 1, \dots, m). \tag{3.11}$$

D'altra parte, in [7] è dimostrato che $D_0(u) \leq \frac{56}{13} S_0(u)$ per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) dy = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3.12}$$

In definitiva si ha

$$\alpha [S_0(u)]^{1/2} \leq [S(u)]^{1/2} + \gamma \varepsilon \sqrt{\frac{56}{13}} [S_0(u)]^{1/2}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che valgano (3.11), (3.12). Se ε (e quindi m) viene scelto in modo tale che $\varepsilon < \sqrt{\frac{13}{56}} \frac{\alpha}{\gamma}$ allora

$$S_0(u) \leq C_1 S(u) \qquad C_1 = \frac{13}{(\sqrt{13}\,\alpha - \sqrt{56}\,\gamma\varepsilon)^2}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che valgano (3.11), (3.12).

Inoltre si ha

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma_x = \int_{\partial D} g^{ih} u_i u_h H \, d\sigma_y \leq C_2 \int_{\partial D} u_i u_i \, d\sigma_y \qquad \forall u \in L^2(\partial\Omega)$$

(con ovvio significato di $H(y)$ e di C_2). Possiamo quindi dire

$$\frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{S(u)} \leqslant C_1 C_2 \frac{\int_{\partial D} u_i u_i \, d\sigma_y}{S_0(u)} \tag{3.13}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che valgano (3.11), (3.12).

Dal Teorema I si deduce

$$\frac{\int_{\partial D} u_i u_i \, d\sigma_y}{S_0(u)} \leqslant 2 \tag{3.14}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\partial D} u_j \, d\sigma_y = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{3.15}$$

$$\int_{\partial D} (u_i y^j - u_j y^i) \, d\sigma_y = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3.16}$$

Osserviamo che su $\partial D - \nu_j = y^j$ e quindi le (3.16) coincidono con le (3.12). Da (3.13), (3.14) si trae

$$\frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{S(u)} \leqslant 2 C_1 C_2$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che valgano (3.11), (3.15), (3.16).

Inoltre, poiché $0 \leqslant \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 \, dx \leqslant 3S(u)$ si ha

$$\frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{E(u)} \leqslant K_1 \qquad K_1 = \begin{cases} 2C_1 C_2 & \mu \geqslant 2 \\ \dfrac{4}{3\mu - 4} C_1 C_2 & 4/3 < \mu \leqslant 2 \end{cases}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che valgano (3.11), (3.15), (3.16).

Muniamo ora lo spazio $\mathcal{H}$, introdotto all'inizio di questo paragrafo, del prodotto scalare seguente

$$((f, h)) = \int_\Omega \left[\frac{1}{4}(f_{i,j} + f_{j,i})(h_{i,j} + h_{j,i}) + \frac{\mu - 2}{2} \operatorname{div} f \operatorname{div} h\right] dx$$

(essendo ovviamente f_j ed h_j le componenti di f e g rispetto alle coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2, x_3)). Consideriamo il seguente sottospazio $X = \{u \in \mathcal{H} |$ sussistono le (3.11), (3.15), (3.16)$\}$. Possiamo affermare che

$$\sup_{u \in X} \frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{E(u)} \leq K_1$$

con K_1 costante nota esplicitamente. D'altra parte, X è un sottospazio di $\mathcal{H}$ di codimensione finita. Per convincersi di questo basta scrivere le condizioni (3.11), (3.15), (3.16) come condizioni di ortogonalità rispetto al prodotto scalare introdotto in $\mathcal{H}$. Ciò si può fare esplicitamente al seguente modo: indichiamo con $N(x, t) = \{N_{ih}(x, t)\}$ il *secondo tensore di Green* ossia il tensore di Green relativo al problema (1.1), per la definizione del quale rimandiamo a [6] (p. 399-402).

Se $u \in \mathcal{H}$ possiamo scrivere (7)

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} N(x, t)\, Lu(t)\, d\sigma_t \qquad x \in \Omega$$

e, con una integrazione per parti, permessa dalle singolarità di $N(x, t)$ (ricordando che v_h sono le componenti di u rispetto al sistema di coordinate cartesiane ortogonali in Ω)

$$v_h(x) = \int_\Omega \{ \frac{1}{4} (v_{i,j}(t) + v_{j,i}(t)) (\frac{\partial}{\partial t_j} N_{hi}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t_i} N_{hj}(x, t)) + \frac{\mu - 2}{2} \operatorname{div} u \operatorname{div}_t [N_h(x, t)]\}\, dt \qquad x \in \Omega \tag{3.17}$$

($N_h(x, t)$ è il vettore di componenti $N_{hi}(x, t)$). Essendo $u_j = v_k \dfrac{\partial x_k}{\partial y^j}$ le condizioni (3.11), (3.15), (3.16) si possono scrivere al modo seguente

$$((u, W_{hj})) = 0 \quad (h = 0, 1, \ldots, m;\ j = 1, 2, 3) \qquad ((u, U_j)) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$((u, V_{ij})) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

(7) Cfr. [6], pp. 403-404.

dove W_{hj}, U_j, V_{ij} hanno rispettivamente le componenti

$$W_{hjl}(t) = \int_\Omega N_{kl}(x,\ t)\,\pi_h(x)\frac{\partial x_k}{\partial y^j}\frac{1}{\sqrt{g}}\,\mathrm{d}x \qquad U_{jl}(t) = \int_{\partial\Omega} N_{hl}(x,\ t)\frac{\partial x_h}{\partial y^j}K(x)\,\mathrm{d}\sigma_x$$

$$V_{ijl}(t) = \int_{\partial\Omega}[N_{hl}(x,\ t)\,y^j(x)\frac{\partial x_h}{\partial y^i} - N_{kl}(x,\ t)\,y^i(x)\frac{\partial x_k}{\partial y^j}]\,K(x)\,\mathrm{d}\sigma_x$$

$(K(x) = H[y(x)]^{-1})$.

$X^\perp$ è quindi il sottospazio di $\mathcal{H}$ generato dai vettori W_{hj}, U_j, V_{ij}. Sia

$$\sup_{u\in X^\perp}\frac{\|u\|^2_{\partial\Omega}}{E(u)} = K_2\,.$$

K_2 risulta finita perché altrimenti esisterebbe un $u\in X^\perp$ tale che $\|u\|^2_{\partial\Omega}=1$, $E(u)=0$. Ma ciò è assurdo,perché $E(u)=0$ implica che u è uno spostamento rigido e quindi, per definizione di $\mathcal{H}$, $u=0$ e $\|u\|^2_{\partial\Omega}=0$.

Posto quindi $u = u_1 + u_2$, $u_1\in X$, $u_2\in X^\perp$, si ha (8)

$$\|u\|^2_{\partial\Omega} \leqslant (1+\frac{K_2}{K_1})\|u_1\|^2_{\partial\Omega} + (1+\frac{K_1}{K_2})\|u_2\|^2_{\partial\Omega} \leqslant (K_1+K_2)(E(u_1)+E(u_2))$$

$$= (K_1+K_2)E(u) \qquad \forall u\in\mathcal{H}.$$

In base al Teorema II possiamo scrivere

$$\sup_{v\in W}\frac{\|v\|^2_{\partial\Omega}}{E(v)} \leqslant K_1 + K_2\,.$$

4 - Teoremi di completezza

Sia Ω un campo che soddisfa le ipotesi indicate in **1**. Indichiamo con $\{\omega_h;\ h=1,\ 2,\ \ldots\}$ un *sistema di soluzioni polinomiali omogenee* dell'equazione $Au=0$. Per una costruzione di tale sistema rimandiamo a [4] (p. 60).

---

(8) Si sfrutta il fatto elementare che per ogni $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ con $c>0$, risulta $(a+b)^2 \leqslant (1+c)\,a^2 + (1+c^{-1})\,b^2$.

III. *Il sistema* $\{L\omega_h;\ h=1, 2, \ldots\}$ *è completo (nella norma uniforme) nello spazio dei vettori* $f\in C^0(\Sigma)$ *ortogonali agli spostamenti rigidi.*

Sia $M(\Sigma)$ il duale topologico di $C^0(\Sigma)$, ossia lo spazio vettoriale i cui elementi sono $\beta=(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, con β^j misura di Borel.

Consideriamo $\beta\in M(\Sigma)$ tale che

$$\int_\Sigma L\omega_h \, d\beta = 0 \qquad (h=1, 2, \ldots). \tag{4.1}$$

Dobbiamo dimostrare che $\int_\Sigma f\, d\beta=0$ per ogni $f\in C^0(\Sigma)$ tale che

$$\int_\Sigma f(a+b\wedge x)\, d\sigma = 0 \qquad \forall a,\ b\in \mathbb{R}^3. \tag{4.2}$$

Da (4.1) si trae

$$\int_\Sigma L_y[s(x, y)]\, d\beta_y = 0 \qquad \forall x\in \mathbb{R}^3-\bar{\Omega}$$

essendo $s(x, y)$ la matrice di Somigliana $\{\delta_{ij}\frac{1}{|x-y|}-\frac{\mu-1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}|x-y|\}$.

Allora, se $p\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\rho<0$, possiamo scrivere

$$\int_{\Sigma_\rho} p_h(x_\rho)\, d\sigma_{x_\rho} \int_\Sigma L_{jy}[s^h(x_\rho, y)]\, d\beta^j_y = 0$$

avendo indicato con $s^h(x, y)$ il vettore le cui componenti sono gli elementi dell'h-sima riga di $s(x, y)$; $L_j v$ è la componente j-sima di Lv e Σ_ρ è la superficie di equazione $x_\rho = x+\rho\gamma(x)$, $x\in\Sigma$ e $\gamma(x)$ vettore unitario di classe 1 su Σ tale che $\gamma(x)\cdot\nu(x)\geqslant\gamma_0>0$.

Passando al limite per $\rho\to 0^-$, si ottiene (9)

$$-2\pi \int_\Sigma p_j\, d\beta^j + \int_\Sigma d\beta^j_y \int_\Sigma p_h(x) L_{jy}[s^h(x, y)]\, d\sigma_x = 0 \tag{4.3}$$

ossia $\int_\Sigma Tp\, d\beta = 0 \qquad \forall p\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dove

(9) Cfr. [3].

$$Tp = (T_1 p,\ T_2 p,\ T_3 p) \qquad T_j p(y) = -2\pi p_j(y) + \int_\Sigma p_h(x)\, L_{jy}[s^h(x,\ y)]\, d\sigma_x$$

e questo ultimo integrale è un *integrale singolare*.

Sia T^* l'operatore seguente, $T^* q = (T_1^* q,\ T_2^* q,\ T_3^* q)$,

$$T_h^* q(x) = -2\pi q^h(x) + \int_\Sigma q^j(y)\, L_{jy}[s^h(x,\ y)]\, d\sigma_y .$$

L'operatore T^* risulta riducibile, ossia esiste un operatore integrale singolare S tale che (10)

$$(ST^* q)^k = q^k(x) + \int_\Sigma q^j(y)\, K_j^k(x,\ y)\, d\sigma_y$$

presentando la matrice nucleare $\{K_j^k(x,\ y)\}$ soltanto singolarità deboli. Allora si ha

$$[(ST^*)^* p]_k = (TS^* p)_k = p_k(x) + \int_\Sigma p_j(y)\, K_k^j(y,\ x)\, d\sigma_y .$$

Sostituendo nella (4.3) p con $S^* p$, si ottiene

$$\int_\Sigma p_k\, d\beta^k + \int_\Sigma d\beta_x^k \int_\Sigma p_j(y)\, K_k^j(y,\ x)\, d\sigma_y = 0 \qquad \forall p \in C^\infty(\mathrm{R}^3) .$$

Poiché $K_k^j(x,\ y)$ presenta solo singolarità deboli, si vede facilmente che è possibile applicare i teoremi di Tonelli e Fubini e scrivere

$$\int_\Sigma p_k\, d\beta^k = -\int_\Sigma p_j(y)\, d\sigma_y \int_\Sigma K_k^j(y,\ x)\, d\beta_x^k \qquad \forall p \in C^\infty(\mathrm{R}^3) .$$

Da ciò segue immediatamente che β è una misura assolutamente continua su Σ e che, inoltre, la derivata di β rispetto alla misura superficiale di Lebesgue su Σ appartiene ad $L^s(\Sigma)$ per qualche $s > 1$. In altri termini

$$d\beta^k = \varphi^k\, d\sigma \qquad \varphi^k \in L^s(\Sigma) .$$

La (4.3) diventa quindi

$$-2\pi \int_\Sigma p_j \varphi^j\, d\sigma + \int_\Sigma \varphi^j(y)\, d\sigma_y \int_\Sigma p_h(x)\, L_{jy}[s^h(x,\ y)]\, d\sigma_x = 0 \qquad \forall p \in C^\infty(\mathrm{R}^3)$$

(10) Cfr. [6], pp. 247-259.

da cui

$$-2\pi\varphi^h(x) + \int_\Sigma \varphi^j(y)\, L_{jy}[s^h(x,\ y)]\, d\sigma_y = 0 \qquad \text{q.o. } x \in \Sigma\,.$$

Ma le autosoluzioni di questa equazione sono gli spostamenti rigidi ([11]), ossia $\varphi = a + b \wedge x$ $(x \in \Sigma)$.

Se f soddisfa (4.2) si ha

$$\int_\Sigma f\, d\beta = \int_\Sigma f(a + b \wedge x)\, d\sigma = 0\,.$$

È interessante anche osservare il seguente teorema di completezza.

IV. *Sia Ω_1 un campo contenente Ω. Il sistema $\{(Au,\ Lu)\,|\, u \in C^\infty(\Omega_1)\}$ è completo (nella norma uniforme) nello spazio dei vettori $(f,\ g) \in C^0(\bar\Omega) \times C^0(\Sigma)$ tali che*

$$\int_\Omega f(a + b \wedge x)\, dx + \int_\Sigma g(a + b \wedge x)\, d\sigma = 0 \qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R}^3\,. \tag{4.4}$$

Sia $(\alpha,\ \beta) \in M(\bar\Omega) \times M(\Sigma)$ tale che

$$\int_{\bar\Omega} Au\, d\alpha + \int_\Sigma Lu\, d\beta = 0 \qquad \forall u \in C^\infty(\Omega_1)\,. \tag{4.5}$$

In particolare

$$\int_\Sigma L\omega_h\, d\beta = 0 \qquad (h = 1,\ 2,\ ,,,)$$

e quindi, per il Teorema III,

$$d\beta = (a + b \wedge x)\, d\sigma\,. \tag{4.6}$$

La (4.5) allora diventa

$$\int_{\bar\Omega} Au\, d\alpha + \int_\Sigma Lu(a + b \wedge x)\, d\sigma = 0 \qquad \forall u \in C^\infty(\Omega_1)$$

([11]) Cfr. [6], pp. 367-371. Avvertiamo che in [6] è stata scelta la normale esterna; ciò implica delle ovvie differenze di segno.

e, integrando per parti,

$$\int_{\bar{\Omega}} Au \, d\alpha = \int_{\Omega} Au(a + b \wedge x) \, dx \qquad \forall u \in C^{\infty}(\Omega_1).$$

Da ciò segue che

$$\int_{\bar{\Omega}} H \, d\alpha = \int_{\Omega} H(a + b \wedge x) \, dx$$

per ogni vettore H le cui componenti siano dei polinomi. Ciò mostra che α è assolutamente continua in $\bar{\Omega}$ e che la sua derivata rispetto alla misura di Lebesgue in Ω è $a + b \wedge x$

$$d\alpha = (a + b \wedge x) \, dx . \tag{4.7}$$

Sia ora $(f, g) \in C^0(\bar{\Omega}) \times C^0(\Sigma)$ tale che sussistono le (4.4); da (4.6), (4.7) segue immediatamente

$$\int_{\bar{\Omega}} f \, d\alpha + \int_{\Sigma} g \, d\beta = \int_{\Omega} f(a + b \wedge x) \, dx + \int_{\Sigma} g(a + b \wedge x) \, d\sigma = 0$$

ossia la tesi.

Come corollari dei teoremi III e IV si hanno i seguenti teoremi.

V. *Sia* $1 \leqslant p < +\infty$. *Il sistema* $\{L\omega_h;\ h = 1, 2, \ldots\}$ *è completo* (*nella norma* L^p) *nello spazio delle* $f \in L^p(\Sigma)$ *che verificano le* (4.2).

VI. *Sia* $1 \leqslant p < +\infty$. *Il sistema* $\{(Au, Lu) \,|\, u \in C^{\infty}(\Omega_1)\}$ *è completo* (*nella norma* L^p) *nello spazio delle* $(f, g) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$ *che verificano le* (4.4).

Osserviamo anche che, con dimostrazioni perfettamente analoghe a quelle qui svolte, è possibile dimostrare i Teoremi III, IV, V, VI dove all'operatore L si sostituisca l'operatore

$$L_\lambda u = (\mu - 1 - \lambda) \operatorname{div} u \cdot \nu + (1 + \lambda) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda(\nu \wedge \operatorname{rot} u)$$

con $\mu > 0$; $-1 < \lambda < \min\{1; (3\mu - 2)/2\}$; alle (4.2) e alle (4.4) si sostituiscano rispettivamente [12]

$$\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}\sigma = 0 \qquad \int_{\Omega} f\,\mathrm{d}x + \int_{\Sigma} g\,\mathrm{d}\sigma = 0\,.$$

Bibliografia

[1] G. AQUARO, *Sul calcolo delle deformazioni di uno strato sferico elastico*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **VII** (1949), 289-297.

[2] C. CHREE, *The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates, their solution and application*, Trans. of the Cambridge Ph. S. (14) **III** (1889), 250-369.

[3] A. CIALDEA, *Elastostatics with non absolutely continuous data*, in corso di stampa su J. Elasticity.

[4] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 4 (1950), 35-99.

[5] B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna, II Ediz., 1961.

[6] V. D. KUPRADZE (Editor), *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.

[7] L. E. PAYNE and H. F. WEINBERGER, *On Korn's inequality*, Arch. Rational Mech. Anal. (8) 2 (1961), 89-98.

[8] A. SOMMERFELD, *Partial differential equations in Physics*, Lectures on Theoretical Physics, 6, Academic Press, New York-London, 1964.

[9] E. VOLTERRA, *Questioni di elasticità vincolata* (I). *Componenti di deformazione e potenziale elastico in coordinate qualsivolgliano*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (6) **XX** (1934), 424-428.

Summary

If v is a smooth solution of the second boudary-value problem of classical elasticity (1.1), *then the inequality* (1.5) *holds, where $E(v)$ is the strain energy and f represents the surface forces acting on the body surface. In this paper a method for explicitly determining the constant K in* (1.5) *is given. Moreover completeness theorems connected to the problem* (1.1) *are proved.*

***

[12] Si noti, infatti, che le autosoluzioni del problema $Au = 0$ in Ω, $L_\lambda u = 0$ su Σ, sono le costanti (cfr. [4], pp. 43-46).