Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 271-281

ANGIOLA LETIZIA (*)

Semimoduli g-Noetheriani (**)

1 - Premesse

Sia $S(*)$ un Λ-insieme (¹). Convenuto di scrivere αx invece di $\alpha * x$, è detto *c-sistema* in S (cfr. $[1]_1$) ogni sistema di chiusura $\mathscr{L}$ in S tale che

$$\text{(c)} \qquad \forall \mathscr{A} \subseteq \Lambda \qquad \forall X \subseteq S\colon\ \mathscr{A}\ulcorner X \urcorner \subseteq \ulcorner \mathscr{A}X \urcorner \cap \ulcorner X \urcorner$$

(dove $\ulcorner X \urcorner$ è la chiusura di X in $\mathscr{L}$).

Dati $\lambda \in \Lambda$, $X \subseteq S$, porremo, come è usuale,

$$X:\lambda = \{s \in S \mid \lambda S \subseteq X\} \qquad \mathscr{R}(X) = \{\alpha \in \Lambda \mid\ \exists n \in N \text{ t.c. } \alpha^n S \subseteq X\} \ (\textit{radicale} \text{ di } X).$$

Diremo l'insieme λX *traslato* di X tramite λ ed osserviamo che

$$X \subseteq X:\lambda \Leftrightarrow \lambda X \subseteq X \qquad \lambda(X:\lambda) \subseteq X.$$

È anche utile per il seguito notare che, dato un Λ-insieme $S(*)$ e un sistema di chiusura $\mathscr{L}$ in S, si ha N.B.I.. L'assioma (c) è equivalente a

$$\text{(c)}' \qquad \forall \lambda \in \Lambda \qquad \forall T \in \mathscr{L} \qquad T:\lambda \in \mathscr{L} \qquad T \subseteq T:\lambda\,.$$

Infatti, dato (c), si ha $\lambda T = \lambda \ulcorner T \urcorner \subseteq \ulcorner T \urcorner = T$ e quindi $T \subseteq T:\lambda$. Inoltre si ha $\lambda \ulcorner T:\lambda \urcorner \subseteq \ulcorner \lambda(T:\lambda) \urcorner \subseteq \ulcorner T \urcorner = T$ e da ciò $\ulcorner T:\lambda \urcorner \subseteq T:\lambda$; segue la tesi poiché $T:\lambda \subseteq \ulcorner T:\lambda \urcorner$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, I-73100 Lecce.

(**) Ricevuto: 14-X-1988.

(¹) Cioè $*$ è una operazione esterna nell'insieme S con dominio di operatori sul semigruppo commutativo $\Lambda(\cdot)$ tale che $\alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x\ \forall \alpha, \beta \in \Lambda\ \forall x \in S$.

Viceversa, valendo (c)′ e dati da $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$, $X \subseteq S$, è chiaro che $\mathcal{A}\ulcorner X \urcorner \subseteq \ulcorner X \urcorner$; proviamo che $\mathcal{A}\ulcorner X \urcorner \subseteq \ulcorner \mathcal{A} X \urcorner$.

Con $\lambda \in \mathcal{A}$, poiché da $\lambda X \subseteq \ulcorner \lambda X \urcorner$, segue $X \subseteq \ulcorner \lambda X \urcorner : \lambda$ ed essendo $\ulcorner \lambda X \urcorner : \lambda \in \mathcal{L}$, si ha che $\ulcorner X \urcorner \subseteq \ulcorner \lambda X \urcorner : \lambda$; da ciò la tesi.

Facciamo presente infine che le leggi di composizione interne che considereremo nel seguito saranno commutative, anche se ciò non sarà esplicitamente detto.

2 - g-sottogruppi

Sia $S(\cdot)$ un semigruppo $T \subseteq S$.

Diremo che T è un *g-sottosemigruppo* di S se è un sottosemigruppo tale che

$$\text{(g)} \qquad \forall x,\ y \in S : xy \in T, \quad x \in T \Rightarrow y \in T .$$

Notiamo subito che i filtri sono ovviamente g-sottosemigruppi e che esistono g-sottosemigruppi che non sono filtri, per esempio, $T = \{4^n\}_{n \in N_0}$ in $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Inoltre

Osservazione I. Se $S(\cdot)$ è un gruppo, un sottosemigruppo $T \neq \emptyset$ di $S(\cdot)$ è un g-sottosemigruppo se e solo se è un sottogruppo.

Svolgiamo ora alcune considerazioni che forniscono, fra l'altro, esempi di sottogruppi di semigruppi che non sono g-sottosemigruppi.

Proposizione 1. *Sia* $S = [\Omega,\ G_\alpha,\ \emptyset_\beta^\alpha]$ *un semireticolo forte di gruppi* [2], *sia* $\Omega' \subseteq \Omega$. *Risulta che* $\bigcup_{\alpha \in \Omega'} G_\alpha$ *è un g-sottosemigruppo di S se e solo se* Ω' *è un filtro di* Ω.

---

[2] Un semigruppo $S(\cdot)$ è detto *semireticolo forte di gruppi* se:

(i) Esistono un semireticolo inferiore $\Omega(\leqslant)$ e una famiglia di gruppi $(G_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ t.c. $S = \bigcup_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$ e $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset\ \forall \alpha,\ \beta \in \Omega,\ \alpha \neq \beta$.

(ii) Esiste una famiglia di applicazioni $(\emptyset_\beta^\alpha)_{(\alpha,\beta) \in \gamma}$, dove $\gamma = \{(\alpha,\ \beta) \in \Omega | \alpha \geqslant \beta\}$, t.c. $\emptyset_\beta^\alpha$ è un omomorfismo di G_α in G_β con $\emptyset_\alpha^\alpha$ omomorfismo identico su G_α e t.c., se $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \in \Omega$ con $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ allora $\emptyset_\beta^\alpha \cdot \emptyset_\gamma^\beta = \emptyset_\gamma^\alpha$.

(iii) Con $a,\ b \in S$, si ha $a \cdot b = \emptyset_\gamma^\alpha(a) \cdot \emptyset_\gamma^\beta(b)$ dove $a \in G_\alpha,\ b \in G_\beta$ e $\gamma = \alpha \cdot \beta = \inf\{\alpha,\ \beta\}$.

Dim. Se $\Omega' = \emptyset$ l'asserto è ovvio; sia perciò $\Omega' \neq \emptyset$. Sia $\bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$ un g-sottosemigruppo di S, allora Ω' è un sottosemigruppo di Ω. Inoltre se $\alpha \in \Omega'$ e $\beta \in \Omega$ con $\beta \geqslant \alpha$, allora $1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_\alpha \in \bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$; da ciò $1_\beta \in \bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$, onde $\beta \in \Omega'$. Viceversa, sia Ω' un filtro, allora $\bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$ è un sottosemigruppo di $S(\cdot)$ essendo Ω' stabile rispetto all'operazione in Ω associata a $\leqslant$. Inoltre se xy, $x \in \bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$ si ha $xy \in G_\beta$, $x \in G_\gamma$, $y \in G_\delta$ con β, $\gamma \in \Omega'$, $\delta \in \Omega$. Pertanto $\gamma\delta = \beta \in \Omega'$, $\gamma \in \Omega'$; da ciò $\delta \in \Omega'$ e quindi $y \in \bigcup_{\alpha\in\Omega'} G_\alpha$.

Poiché $\{\alpha\}$ è un filtro per Ω se e solo se α è massimale in Ω, si ha

Corollario 2. *Sia $S = [\Omega, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ un semireticolo forte di gruppi. Risulta che G_α è g-sottosemigruppo di S se e solo se α è massimale in Ω.*

Proposizione 3. *Se $S = [\Omega, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ è un semireticolo forte di gruppi e se $T \neq \emptyset$ è un g-sottosemigruppo di S allora, per ogni $\alpha \in \Omega$ tale che $T \cap G_\alpha \neq \emptyset$, si ha $T \cap G_\alpha$ è sottogruppo di G_α.*

Dim. Sia $x \in T \cap G_\alpha$, si ha così $x = 1_\alpha . x \in T \cap G_\alpha$ e quindi $1_\alpha \in T \cap G_\alpha$; inoltre da $x_\alpha^{-1} \cdot x = 1_\alpha \in T \cap G_\alpha$ segue $x_\alpha^{-1} \in T \cap G_\alpha$; pertanto, essendo $T \cap G_\alpha$ un sottosemigruppo di G_α, si ha la tesi.

Proposizione 4. *Sia $S = [\Omega, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ un semireticolo forte di gruppi e sia $\emptyset \neq A \subseteq G_\alpha$. Risulta che A è un g-sottosemigruppo di $S(\cdot)$ se e solo se A è sottogruppo di G_α e α è massimale in Ω.*

Dim. Poiché $A = A \cap G_\alpha \neq \emptyset$ è g-sottosemigruppo di S, si ha $A \leqslant G_\alpha$; inoltre, se esistesse $\beta \in \Omega$ t.c. $\alpha < \beta$, si avrebbe $1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_\alpha \in A$ e quindi $1_\beta \in A \subseteq G_\alpha$, il che è assurdo. Viceversa, siano x, $y \cdot y \in A \leqslant G_\alpha$. Osservato che $y \in G_\alpha$ (3), si ha

$$xy,\ x \in A \Rightarrow xy,\ x^{-1} \in A \Rightarrow x^{-1} \cdot x \cdot y \in A \Rightarrow 1_\alpha \cdot y = y \in A .$$

Proposizione 5. *Sia $S = [\Omega, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ un semireticolo forte di gruppi e sia $\emptyset \neq T \subseteq S$. Si ha che condizione necessaria e sufficiente perché T sia g-sottosemi-*

---

(3) Esiste $\beta \in \Omega$ t.c. $y \in G_\beta$ quindi $xy \in G_{\alpha\beta} \cap G_\alpha$. Da ciò $\alpha\beta = \alpha$ e pertanto $\alpha \leqslant \beta$. Si ha così, essendo α massimale, $\alpha = B$.

gruppo di S è che valgano le seguenti condizioni:

(i) $T = \bigcup_{\alpha \in \Omega'} T_\alpha$ *con Ω' filtro di Ω e* $T_\alpha \leqslant G_\alpha$ $(\forall \alpha \in \Omega')$.

(ii) $\emptyset_\beta^\alpha(T_\alpha) \subseteq T_\beta$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \Omega'$ $\quad$ t.c. $\alpha \geqslant \beta$.

(iii) $\emptyset_\beta^\alpha(x) \in T_\beta \Rightarrow x \in T_\alpha$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \Omega'$ $\quad$ t.c. $\alpha \geqslant \beta$.

Dim. (i) Sia $T \neq \emptyset$ un g-sottosemigruppo di S e sia $\Omega' = \{\alpha \in \Omega | T \cap G_\alpha \neq \emptyset\}$. Posto $T_\alpha = G_\alpha \cap T$ $\forall \alpha \in \Omega'$, data la Proposizione 3, si ha $T_\alpha \leqslant G_\alpha$, inoltre Ω' è filtro di Ω (4).

(ii) $x \in T_\alpha \Rightarrow 1_\beta \cdot x = 1_\beta \cdot \emptyset_\beta^\alpha(x) \in \Rightarrow \emptyset_\beta^\alpha(x) \in T \cap G_\beta = T_\beta$.

(iii) $\emptyset_\beta^\alpha(x) \in T_\beta \Rightarrow 1_\beta \cdot x = 1_\beta \cdot \emptyset_\beta^\alpha(x) \in T_\beta \subseteq T \Rightarrow x \in T \cap G_\alpha = T_\alpha$.

Viceversa. Chiaramente T è sottosemigruppo di S. Inoltre $xy \in \bigcup_{\alpha \in \Omega'} T_\alpha$, $x \in \bigcup_{\alpha \in \Omega'} T_\alpha \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \Omega'$ $\gamma \in \Omega$ t.c. $xy \in T_\alpha$ $x \in T_\beta$ $y \in G_\gamma$; pertanto, essendo $xy = \emptyset_\alpha^\beta(x) \cdot \emptyset_\alpha^\gamma(y) \in T_\alpha$ e $\emptyset_\alpha^\beta(x) \in T_\alpha$ (cfr. (ii)) si ha (poiché $T_\alpha \leqslant G_\alpha$) $\emptyset_\alpha^\gamma(y) \in T_\alpha$ e quindi $y \in T_\gamma \subseteq T$ (cfr. (iii)).

È anche utile stabilire la seguente

Proposizione 6. *Sia $\Lambda(+, \cdot, \leqslant)$ un semianello reticolato* (5) *e $H \subseteq \Lambda$. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(i) *H è g-sottosemigruppo di $\Lambda(+)$.*

(ii) *H è ideale reticolare di Λ.* (iii) *H è filtro di $\Lambda(+)$.*

Dim. È ovvio che (i) $\Leftrightarrow$ (iii). (ii) $\Rightarrow$ (iii). H è un sottosemigruppo di $\Lambda(+)$; inoltre, se $x + y \in S$ si ha $x \leqslant x \vee y = x + y \in S$, $y \leqslant x \vee y = x + y \in S$; da ciò $x, y \in S$. (i) $\Rightarrow$ (ii). H è un sottosemigruppo di $\Lambda(+)$, inoltre si ha $x \leqslant y$, $y \in H \Rightarrow x + y = x \vee y = y \in H \Rightarrow x \in H$.

---

(4) Ω' è un sottosemigruppo di Ω, inoltre si ha

$$\alpha \in \Omega', \ \alpha \leqslant \beta \Rightarrow 1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_\alpha \in T \cap G_\alpha \Rightarrow 1_\beta \in T \Rightarrow T \cap G_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \beta \in \Omega'.$$

(5) Cioè, $\Lambda(+, \cdot)$ semianello, $\Lambda(\leqslant)$ reticolo t.c. $a + b = a \vee b$, $ab \leqslant a \wedge b$ $\forall a, b \in \Lambda$ (cfr. [4], pag. 190).

3 - Semimoduli g-Noetheriani

Sia $A(+, \cdot)$ un semianello, $S(\cdot)$ un semigruppo, $*$ un'applicazione da $A \times S$ in S tale che $S(\cdot, *)$ risulti un A-semimodulo (cioè valgano gli assiomi formali di pseudomodulo).

Indichiamo con $\mathscr{L}$ l'insieme dei sottosemigruppi A-stabili di S e con $\mathscr{L}_g$ l'insieme dei g-sottosemigruppi A-stabili di S. Si ha $\emptyset$, $S \in \mathscr{L}_g$ e $\mathscr{L}_g \subseteq \mathscr{L}$. Inoltre

Osservazione II. Se $S(\cdot, *)$ è un A-modulo (anello unitario) risulta, come è ben noto, che $\mathscr{L} = \{H \subseteq S | H$ sottomodulo $S\} \cup \{\emptyset\}$ ($\mathscr{L} = \{H \subseteq S | H$ ideale di $S\} \cup \{\emptyset\}$), ma ciò non è più vero nel caso degli pseudomoduli (anelli non necessariamente unitari) (6). Comunque, anche in quest'ultimo caso, si ha che $\mathscr{L}_g = \{H \subseteq S | H$ sottopseudomodulo di $S\} \cup \{\emptyset\}$ ($\mathscr{L}_g = \{H \subseteq S | H$ ideale di $S\} \cup \{\emptyset\}$): basta ricordare che se $T \in \mathscr{L}_g$, allora $T = \emptyset$ oppure $T \leqslant S(+)$ (cfr. Osservazione I).

Ora, avendo intenzione di generalizzare i risultati che si hanno per gli pseudomoduli (anelli) e che riguardano decomposizioni primarie minimali, sceglieremo $\mathscr{L}_g$, fra i possibili c-sistemi algebrici su S, per svolgere le nostre considerazioni. Premesso ciò, si verifica immediatamente che $\mathscr{L}_g$ è un sistema di chiusura algebrico in S.

Sussiste la seguente

Proposizione 7. *Sia $S(\cdot, *)$ un A-semimodulo. Si ha che $T : \lambda \in \mathscr{L}_g$ per ogni $\lambda \in A$ e per ogni $T \in \mathscr{L}_g$.*

Dim. È immediato verificare che $T : \lambda$ è g-sottosemigruppo, inoltre esso è A-stabile essendo $A(\cdot)$ commutativo.

Tenendo presente la Proposizione 7 e il fatto che, per ogni $\lambda \in A$ e per ogni $T \in \mathscr{L}_g$, risulta $T \subseteq T$, si ha che $\mathscr{L}_g$ è un c-sistema algebrico (cfr. N.B.I.).

Diremo *g-Noetheriano* un A-semimodulo che soddisfi una delle seguenti

(6) Per esempio, quando S è lo 0-anello sul gruppo ciclico infinito, $N_0 \in \mathscr{L}$ pur non essendo un ideale.

condizioni fra loro equivalenti:

(1) $\mathscr{L}_g$ verifica la condizione delle catene ascendenti.

(2) $\mathscr{L}_g$ è condizione massimale per i suoi elementi.

(3) Ogni elemento di $\mathscr{L}_g$ ha un sistema finito di generatori.

È chiaro che uno pseudomodulo (anello) è Noetheriano se e solo se è g-Noetheriano (cfr. Osservazione II). Daremo in 4 ulteriori esempi.

Def. Un Λ-semimodulo $S(\cdot, *)$ è *g-chiuso* se accade che

(1) $\forall H,\ K \in \mathscr{L}_g : \sup_{\mathscr{L}}\{H, K\} \in \mathscr{L}_g$ (2) $\forall \alpha \in \Lambda \quad \forall H \in \mathscr{L}_g : \alpha H \in \mathscr{L}_g$.

Osserviamo che (1) equivale a dire che il reticolo $\mathscr{L}_g(\subseteq)$ è sottoreticolo di $\mathscr{L}(\subseteq)$. Ovviamente ogni pseudomodulo è g-chiuso; per ulteriori esempi si rinvia a 4.

Teorema 8. *Sia $S(\cdot\ , *)$ un Λ-semimodulo g-chiuso. Se $S(\cdot\ , *)$ è g-Noetheriano, allora per ogni $T \in \mathscr{L}_g$ si ha che T g-irriducibile $\Rightarrow T$ primario.*

Dim. Supposto T non primario, si ha che

$$\exists \alpha \in \Lambda \quad \exists x \in S \text{ t.c.} \quad x \in T \quad x \notin T \quad \alpha^i S \notin T \quad \forall i \in N.$$

Dato il N.B.I., si consideri $T:\alpha \subseteq T:\alpha^2 \subseteq \ldots \subseteq T:\alpha^i \subseteq \ldots$ catena ascendente di elementi di $\mathscr{L}_g$ e sia $n \in N$ tale che $T:\alpha^i = T:\alpha^n\ \forall i > n$.

Sia $y \in S$ tale che $\alpha^n y \notin T$; posto $T_1 = T:\alpha^n$, $T_2 = \lceil T \cup (\alpha^{n+1} \lceil y \rceil) \rceil$, gli elementi x, $\alpha^n y$ assicurano che $T \subset T_1$ e $T \subset T_2$.

Osservato infine che, essendo S g-chiuso, $\lceil T \cup (\alpha^{n+1} \lceil y \rceil) \rceil = T \cup (\alpha^{n+1} \lceil y \rceil) \cup (T \cdot \alpha^{n+1} \lceil y \rceil)$, si ha $T = T_1 \cap T_2$ e così la tesi.

Segue immediatamente con dimostrazioni di tipo classico e con nomenclature standard il

Teorema 9. *Sia $S(\cdot\ , *)$ un Λ-semimodulo g-chiuso. Se $S(\cdot\ , *)$ è g-Noetheriano, allora ogni elemento ($\neq S$) di $\mathscr{L}_g$ ammette una decomposizione primaria minimale.*

Al fine di stabilire il Teorema 9 l'ipotesi di g-chiusura su S non è superflua; daremo in 4 un esempio di semimodulo g-Noetheriano per il quale il teorema non vale.

Concludiamo questo paragrafo enunciando i seguenti teoremi le cui dimostrazioni possono esplicitarsi tenendo presente quelle esistenti per gli pseudomobili.

Teorema 10. *Siano* $S(\cdot\,,*)$ *un* Λ*-semimodulo,* $T\in\mathscr{L}_g$ *e* $T=\bigcap_{i=1}^{r}Q_i=\bigcap_{j=1}^{s}Q'_j$ *decomposizioni primarie e minimali di* T*. Allora* $r=s$ *e sono uguali gli insiemi dei radicali primi associati a* $\bigcap_{i=1}^{r}Q_i$ *ed a* $\bigcap_{j=1}^{s}Q'_j$.

Teorema 11. *Siano* $S(\cdot\,,*)$ *un* Λ*-semimodulo,* $T\in\mathscr{L}_g$ *e* $T=\bigcap_{i=1}^{r}Q_i=\bigcap_{j=1}^{s}Q'_j$
decomposizioni primarie minimali di T*; se* P_i *è un ideale* (7) *primo isolato di* T *e se* $P_i=\mathscr{R}(Q_i)=\mathscr{R}(Q'_i)$ *allora* $Q_i=Q'_i$.

4 - Semireticoli forti di moduli

Sia $\Omega(\leqslant)$ un semireticolo inferiore e $(G_\alpha(\cdot\,,\perp))_{\alpha\in\Omega}$ una famiglia di Λ-pseudomobili a due a due disgiunti. Sia $(\emptyset^{\alpha}_{\beta})_{(\alpha,\beta)\in\gamma}$ una famiglia di applicazioni con $\gamma=\{\alpha,\beta)\in\Omega^2|\alpha\geqslant\beta\}$, tale che

(1) $\forall(\alpha,\beta)\in\gamma:\emptyset^{\alpha}_{\beta}$ è un omomorfismo di moduli da G_α in G_β e $\forall\alpha\in\Omega:\emptyset^{\alpha}_{\alpha}$ è l'applicazione identica in G_α.

(2) $\forall\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\Omega$ t.c. $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma:\emptyset^{\alpha}_{\beta}\cdot\emptyset^{\beta}_{\gamma}=\emptyset^{\alpha}_{\gamma}$.

Sotto queste ipotesi (cfr. [4] Teorema 4) l'insieme $S=\bigcup_{\alpha\in\Omega}G_\alpha$ è strutturabile come Λ-semimodulo ponendo $x\cdot y=\emptyset^{\alpha}_{\gamma}(x)\cdot\emptyset^{\beta}_{\gamma}(y)$ con $x\in G_\alpha$, $y\in G_\beta$, $\gamma=\alpha\cdot\beta=\inf\{\alpha,\beta\}$ e $\lambda*x=\lambda\perp x$ con $\lambda\in\Lambda$, $x\in G_\alpha$.

Seguendo la nomenclatura riguardante i semigruppi diremo *semireticolo forte* di Λ-pseudomobili ogni Λ-semimodulo costruito nel modo esposto precedentemente e lo indicheremo con $S=[\Omega,\ \Lambda,\ G_\alpha,\ \emptyset^{\alpha}_{\beta}]$.

Chiameremo *componente di tipo massimale* di $S=[\Omega,\ \Lambda,\ G_\alpha,\ \emptyset^{\alpha}_{\beta}]$ ogni G_α con α massimale in Ω.

---

(7) Le ipotesi su $\Lambda(+\,,\cdot)$ garantiscono che, per ogni $H\in\mathscr{L}_g$, $\mathscr{R}(H)$ è un ideale del semianello $\Lambda(+,\ \cdot)$ (i.e. $\mathscr{R}(H)\in\mathscr{L}$).

Data la Proposizione 5 si ha

Proposizione 12. *Sia* $S=[\Omega, \Lambda, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ *un semireticolo forte di pseudomobili e* $\emptyset \neq T \subseteq S$. *Si ha che* $T \in \mathscr{L}_g$ *se e solo se sussistono le seguenti condizioni*

(1) $T = \bigcup_{\alpha\in\Omega'} T_\alpha$ *con* Ω' *filtro di* Ω, *filtro di* Ω, T_α *sottopseudomodulo di* G_α $\forall\alpha \in \Omega'$.

(2) $\emptyset_\beta^\alpha(T_\alpha) \subseteq T_\beta \quad \forall\alpha, \beta \in \Omega'$ t.c. $\alpha \geqslant \beta$.

(3) $\emptyset_\beta^\alpha(x) \in T_\alpha \Rightarrow x \in T_\alpha \quad \forall\alpha, \beta \in \Omega'$ t.c. $\alpha \geqslant \beta$.

Si ha

Proposizione 13. *Ogni semireticolo forte di* Λ*-pseudomoduli Noetheriani con struttura semireticolare finita è un* Λ*-semimodulo g-Noetheriano.*

Dim. Sia $S=[\Omega, \Lambda, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ con Ω finito e G_α Noetheriano per ogni $\alpha \in \Omega$. Sia $T \in \mathscr{L}_g$.

Se $T=\emptyset$ allora $T \equiv \ulcorner\emptyset\urcorner$ è finitamente generato; se $T \neq \emptyset$ allora, usando la Proposizione 12 si ha $T = \bigcup_{\alpha\in\Omega'} T_\alpha$, dove Ω' é un filtro di Ω e $T_\alpha = T \cap G_\alpha$ è sottopseudomodulo di G_α per ogni $\alpha \in \Omega'$. Sia, pertanto, $T_\alpha = \ulcorner\{x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{r_\alpha}^{(\alpha)}\}\urcorner$ $\forall\alpha \in \Omega'$, proviamo che $T = \ulcorner\{x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{r_\alpha}^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\Omega'}\urcorner$. Infatti, posto $T' = \ulcorner\{x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{r_\alpha}^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\Omega'}\urcorner$, si ha intanto che $T' \subseteq T$ e $T' \neq \emptyset$. Osserviamo ora che, essendo $T' = \bigcup_{\alpha\in\Omega''} T'_\alpha$ con $\Omega'' = \Omega'$ [8] e T'_α sottopseudomobili di G_α, si ha che $T_\alpha \subseteq T'_\alpha$ $\forall\alpha \in \Omega'$; pertanto $T = \bigcup_{\alpha\in\Omega'} T_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Omega'} T'_\alpha = T'$.

Così, data la definizione, si ha la tesi.

Proposizione 14. *Uno pseudomodulo* $G(\cdot\ , *)$ *è Noetheriano se e solo se è una componente di tipo massimale di un certo* $S=[\Omega, \Lambda, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ *g-Noetheriano.*

---

[8] $\alpha \in \Omega' \Rightarrow G_\alpha \cap T' \neq \emptyset \Rightarrow G_\alpha \cap T \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in \Omega'$.
$\alpha \in \Omega' \Rightarrow x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{r_\alpha}^{(\alpha)} \in T' \cap G_\alpha \Rightarrow T' \cap G_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in \Omega'$.

Dim. Immediata, una volta che si è osservato che se H è sottopseudomodulo di G_α, con α massimale in Ω, allora $H \in \mathscr{L}_g$ (cfr. Proposizione 4).

Proposizione 15. *Un semireticolo forte di pseudomoduli* $S=[\Omega, \Lambda, G_\alpha, \emptyset_\beta^\alpha]$ *con* Ω *reticolo distributivo e* $\emptyset_\beta^\alpha$ *biettiva* $(\alpha \ldots \beta)$ *è g-chiuso.*

Dim. La tesi si consegue tenendo presente la Proposizione 12 e i seguenti fatti:

(1) Dati $H=\bigcup_{\alpha\in A} R_\alpha$, $K=\bigcup_{\beta\in B} S_\beta$ elementi di $\mathscr{L}_g$, si ha $\sup_{\mathscr{L}} \{H, K\}=H\cdot K$.

(2) Dati A, B filtri di Ω, essendo Ω reticolo distributivo, il filtro generato da A e B è $I=\{\alpha\wedge\beta\}_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}$.

(3) Dati $H=\bigcup_{\alpha\in A} R_\alpha$, $K=\bigcup_{\beta\in B} S_\beta$ elementi di $\mathscr{L}_g$, si ha $H\cdot K=\bigcup_{\gamma\in I} T_\gamma$, dove $I=\{\alpha\wedge\beta\}_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}$ e $T_{\alpha\wedge\beta}=R_\alpha\cdot S_\beta$ è sottopseudomodulo di $G_{\alpha\wedge B}$.

(4) $\forall \alpha\wedge\beta,\ \alpha'\wedge\beta'\in I$ con $\alpha\wedge\beta\geqslant\alpha'\wedge\beta' : \emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(T_{\alpha\wedge\beta})$

$$=\emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(\emptyset_{\alpha\wedge\beta}^{\alpha}(R_\alpha))\cdot\emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(\emptyset_{\alpha\wedge\beta}^{\beta}(S_\beta))\subseteq R_{\alpha'\wedge\beta'}\cdot S_{\alpha'\wedge\beta'}=T_{\alpha'\wedge\beta'}.$$

(5) Se $\emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(x)=y'\cdot z'\in R_{\alpha'}\cdot S_{\beta'}=T_{\alpha'\wedge\beta'}$, considerati

$$y=(\emptyset_{\alpha\wedge\alpha'}^{\alpha})^{-1}(\emptyset_{\alpha\wedge\alpha'}^{\alpha'}(y'))\in R_\alpha \qquad z=(\emptyset_{\beta\wedge\beta'}^{\beta})^{-1}(\emptyset_{\beta\wedge\beta'}^{\beta'}(z'))\in S_\beta,$$

si verifica facilmente che $\emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(y\cdot z)=\emptyset_{\alpha'\wedge\beta'}^{\alpha\wedge\beta}(x)$ e da ciò $x=y\cdot z\in R_\alpha\cdot S_\beta=T_{\alpha\wedge\beta}$.

Considerato ogni semianello come semimodulo su se stesso, si ha

Proposizione 16. *Un semianello reticolato* $\Lambda(+\,,\,\cdot)$ *è Noetheriano rispetto agli ideali reticolari se e solo se è un* Λ*-semimodulo g-Noetheriano.*

Dim. Poiché ogni ideale reticolare di Λ è Λ-stabile (cfr. [3] consequencia 3, Cap. II, Part. 1), e poiché sussiste la Proposizione 6, si ha $\mathscr{L}_g=\{H\subseteq\Lambda \mid H \text{ ideale reticolare di } \Lambda\}$.

Proposizione 17. *È g-chiuso ogni semianello reticolato* $\Lambda(+\,,\,\cdot,\,\leqslant)$ *tale che* $a\leqslant b\Rightarrow a\cdot b=a\wedge b\ \ \forall a,\ b\in\Lambda$.

Dim. Si ha $\mathscr{L}_g = \{H \subseteq A | H$ ideale reticolare di $A\}$ (cfr. Proposizione 16). Se $H, K \in \mathscr{L}_g$, semplici considerazioni insieme al fatto che, con $h \in H$, $k \in K$,

$$\lambda \leqslant h + k \Rightarrow \lambda = \lambda \wedge (h+k) = \lambda(h+k) = \lambda h + \lambda K \in H + K,$$

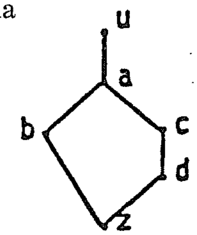
assicurano che $\sup_{\mathscr{L}}\{H, K\} = H \cup K \cup H + K \in \mathscr{L}_g$.

Analogamente $\alpha \cdot H \in \mathscr{L}_g$ $\forall \alpha \in A$ $\forall H \in \mathscr{L}_g$.

Corollario 18. *Ogni reticolo distributivo $S(\wedge, \vee)$ è g-chiuso.*

Concludiamo mostrando come, al fine di stabilire il Teorema 10, l'ipotesi di g-chiusura non è superflua. Infatti si consideri il semianello reticolato $S(+, \cdot, \leqslant)$ con $S = \{u, a, b, c, d, z\}$

$S(\leqslant)$ dato da



$S(\cdot)$ dato da

$\cdot$	u	a	b	c	d	z
u	u	a	b	c	d	z
a	a	b	b	z	z	z
b	b	b	b	z	z	z
c	c	z	z	z	z	z
d	d	z	z	z	z	z
z	z	z	z	z	z	z

e + uguale all'unione reticolare di $S(\leqslant)$.

È facile vedere (cfr. dimostrazione della Proposizione 16) che $\mathscr{L}_g = \{\{z\}, \{z, d\}, \{z, b\}, \{z, d, c\}, \{z, a, b, c, d\}, S\}$. Quindi S è g-Noetheriano; inoltre $\{d, z\}$ è g-irriducibile e non primario (9) (e quindi privo di una rappresentazione primaria).

Bibliografia

[1] K. E. Aubert: $[\bullet]_1$ *Theory of x-ideals*, Acta Math. **107** (1962), 1-52; $[\bullet]_2$ *Additive ideal systems*, J. Algebra 18 (1971), 511-528.

[2] K. E. Aubert and E. R. Hansen, *Systèmes de modules*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. **A**, 272 (1971), 525-528.

---

(9) $cb \in \{d, z\}$, $c \notin \{d, z\}$, $b^n \notin \{d, z\}$ $\forall n \in N$.

[3] L. N. CALVÃO, *Sobre a teoria de Noether-Krull em semianeis*, Rev. Fac. Ci. Lisboa (1962), 175-254.

[4] F. PASTIJN and H. REYNAERTS, *Semilattice of modules*, Lecture Note in Mat. Séminaire d'Algèbre, Paul Dubreil, Paris, 19756/76, 145-155.

Summary

We study in this paper particular substructures of semimodules (semirings) and we exspound for them same facts concerning minimal primary decompositions, generalizing the well-known results which we have in the case of pseudomodules (commutative rings not necessarily unitary). A semimodule which is Noetherian with respect to these substructures has been called a g-Noetherian semimodule. Also, we prove that a pseudomodule is Noetherian if and only if it is a component of maximal type of a g-Noetherian strong semilattice of pseudomodules.

***