Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 193-214

TIZIANA CARDINALI e FRANCESCA PAPALINI (*)

Sulle semicontinuità inferiore e superiore di una multifunzione (**)

1 - Introduzione

È noto (cfr. [9], pp. 167, 168; [2], p. 114) che, a proposito di applicazioni multivoche, sono state fornite due definizioni di semicontinuità inferiore e due definizioni di semicontinuità superiore, una topologica e una metrica. È stata, inoltre, fornita per la semicontinuità superiore (cfr. [7], Definizione VI.1.4) una terza definizione (1) che, come abbiamo provato qui in 3, è più debole delle altre due.

Osserviamo che le due definizioni di semicontinuità inferiore coincidono fra loro, come pure coincidono fra loro le prime due definizioni di semicontinuità superiore, se i valori della multifunzione sono compatti; mentre, nel caso in cui i valori della multifunzione sono in uno spazio compatto, vengono addirittura a coincidere fra loro tutte e tre le definizioni di semicontinuità superiore.

Si è reso pertanto necessario confrontare tra loro questi concetti. Altri Autori hanno già iniziato ad affrontare questo problema. In [1] e in [7] sono riportate le seguenti relazioni (2):

$$(s.c.s.)_t \Rightarrow (s.c.s.)_m \qquad (s.c.s.)_m \not\Rightarrow (s.c.s.)_t$$

$$(s.c.i.)_m \Rightarrow (s.c.i.)_t \qquad (s.c.s.)_t \Rightarrow (s.c.s.)_w$$

(*) Indirizzo degli AA: Dipartimento di Matematica, Via Vanvitelli 1, I-06100, Perugia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 20-VII-1988.

(1) Sono state fornite altre definizioni di semicontinuità inferiore e di semicontinuità superiore per applicazioni multivoche: ricordiamo, in particolare, quelle introdotte da C. Kuratowski (cfr. [6], p. 148).

(2) Con i simboli $(s.c.i.)_m$ e $(s.c.s.)_m$ abbiamo indicato rispettivamente la semiconti-

le quali però n o n rappresentano una risposta esauriente al problema di questo confronto. Noi in 3 di questa Nota abbiamo per l'appunto completato l'analisi di questo confronto, fornendo altre relazioni fra i tre concetti di semicontinuità superiore e i due concetti di semicontinuità inferiore e provando, infine, che n o n sussiste alcuna relazione fra la *continuità* topologica e quella metrica.

In 4 abbiamo esteso l'analisi al confronto tra la $(s.c.i.)_m$ di F e la $(s.c.i.)_m$ di ∂F, tra la $(s.c.s.)_m$ di F e la $(s.c.s.)_m$ di ∂F e, infine, tra la $(s.c.s.)_w$ di F e la $(s.c.s.)_w$ di ∂F. I risultati di questa analisi sono contenuti nel Teorema 4.1 e negli Esempi 4.1 e 4.2.

M.D.P. Monteiro Marques [8] aveva già iniziato ad occuparsi del problema a proposito della $(s.c.i.)_t$ e della $(s.c.s.)_t$. Noi, sempre in 4, abbiamo preso in esame i risultati di cui in [8], conseguendo delle proposizioni (cfr. Corollari 4.8, 4.9, 4.10 di qui) che migliorano o estendono questi risultati.

Il citato Autore, sempre in [8], a proposito della *continuità metrica*, ha provato che per multifunzioni a valori in uno spazio *normato* sussiste la relazione

«F continua metricamente $\Leftrightarrow$ ∂F continua metricamente».

Noi, nel contesto di multifunzioni a valori in uno spazio seminormato, a proposito della continuità topologica, abbiamo dimostrato

«F continua topologicamente $\Rightarrow$ ∂F $(s.c.i.)_t$»

mentre, già nel caso di multifunzioni a valori in uno spazio di Hilbert, abbiamo provato (cfr. Esempio 4.3 di qui)

«F continua topologicamente $\not\Rightarrow$ ∂F $(s.c.s.)_t$».

Infine, in 5, abbiamo esteso (cfr. Teorema 5.1 di qui) una proposizione di M. Valadier (cfr. [12], Proposizione 3), provando altresì che una proposizione fornita da questo Autore, per multifunzioni a valori nella famiglia dei sottoinsiemi chiusi e convessi di $\mathbf{R}^n$, n o n continua più a sussistere già nel caso in cui la multifunzione è a valori nella famiglia dei sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di uno spazio di Hilbert (di dimensione infinita).

---

nuità inferiore «metrica» e la semicontinuità superiore «metrica» di cui in [9]; mentre con i simboli $(s.c.i.)_t$ e $(s.c.s.)_t$ abbiamo indicato la semicontinuità inferiore «topologica» e la semicontinuità superiore «topologica» di cui in [2]. Il simbolo $(s.c.s.)_w$ sta ad indicare la terza definizione di semicontinuità superiore che, come abbiamo detto, è più debole delle altre due.

2 - Definizioni e notazioni

Essendo E uno spazio topologico, poniamo

(2.1) $\mathcal{P}(E) = \{S \subset E : S \neq \emptyset\}$ (2.2) $\mathcal{C}(E) = \{S \subset E : S \text{ chiuso, } S \neq \emptyset\}$.

Una multifunzione $F : T \to \mathcal{P}(E)$, ove T è uno spazio topologico, si dice (cfr. [2], p. 114) «semicontinua inferiormente topologicamente», $(\text{s.c.i.})_t$, in un punto $t_0 \in T$ se

$(\text{s.c.i.})_t$ $\forall A \subset E$, aperto in E, con $A \cap F(t_0) \neq \emptyset$, esiste un intorno $U(t_0)$ del punto t_0 tale che $A \cap F(t) \neq \emptyset$ $\forall t \in U(t_0)$;

si dice (cfr. [2], p. 114) «semicontinua superiormente topologicamente», $(\text{s.c.s.})_t$, in $t_0 \in T$ se

$(\text{s.c.s.})_t$ $\forall A \subset E$, aperto in E, con $F(t_0) \subset A$, esiste un intorno $V(t_0)$ del punto t_0 tale che $F(t) \subset A$ $\forall t \in V(t_0)$.

La multifunzione F si dice «continua topologicamente» in un punto $t_0 \in T$ se è semicontinua inferiormente topologicamente e semicontinua superiormente topologicamente in tale punto.

Nel caso particolare in cui la multifunzione F è a valori nella famiglia $\mathcal{C}(E)$, si dice (cfr. [7], Definizione VI.1.4) che F è «semicontinua superiormente debolmente» (3), $(\text{s.c.s.})_w$, in un punto $t_0 \in T$ se

$(\text{s.c.s.})_w$ $F(t_0) = E$, oppure $\forall y \notin F(t_0)$ esistono un aperto A contenente il punto y e un intorno $W(t_0)$ del punto t_0 in modo che risulti $A \cap F(t) = \emptyset$ $\forall t \in W(t_0)$.

Indicato con $(L, \mathcal{P})$ uno spazio lineare seminormato, ove L è uno spazio lineare e $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su L, poniamo:

(2.3) $\mathcal{K}(L) = \{S \subset L\text{: } S \text{ chiuso, convesso, } S \neq \emptyset\}$

(2.4) $\mathcal{A}(L) = \{S \subset L\text{: } S \text{ limitato, convesso, } S \neq \emptyset\}$

(2.5) $\mathcal{B}(L) = \{S \subset L\text{: } S \text{ chiuso, limitato, convesso, } S \neq \emptyset\}$.

---

(3) Abbiamo aggiunto il termine «debolmente» poiché, come sarà precisato in 3, la «semicontinuità superiore topologica» implica la «semicontinuità superiore debole», mentre esistono multifunzioni «semicontinue superiormente debolmente» che non sono «semicontinue superiormente topologicamente».

Andiamo ora a considerare una multifunzione $F: T \to \mathcal{C}(L)$ e indichiamo con ∂F la multifunzione $\partial F: t \mapsto \partial F(t)$, $t \in T$, ove $\partial F(t)$ è l'insieme dei punti di frontiera di $F(t)$.

Detto (X, d) uno spazio metrico, per ogni insieme $C \subset X$ indichiamo con $B(C, \varepsilon)$ la boccia

$$(2.6) \qquad B(C, \varepsilon) = \{x \in X \colon \delta(x, C) < \varepsilon\} \quad \text{ove } \delta(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y).$$

Una multifunzione $F: T \to \mathcal{P}(X)$ (cfr. (2.1)) si dice (cfr. [9], p. 168) «semicontinua inferiormente metricamente», $(\text{s.c.i.})_m$, in un punto $t_0 \in T$ se

$(\text{s.c.i.})_m$ $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno $U(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà $F(t_0) \subset B(F(t), \varepsilon)$ $\forall t \in U(t_0)$,

mentre si dice (cfr. [9], p. 167) «semicontinua superiormente metricamente», $(\text{s.c.s.})_m$, in $t_0 \in T$ se

$(\text{s.c.s.})_m$ $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno $V(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà $F(t) \subset B(F(t_0), \varepsilon)$ $\forall t \in V(t_0)$.

La multifunzione F si dice «continua metricamente» in un punto $t_0 \in T$ se è semicontinua inferiormente metricamente e semicontinua superiormente metricamente in tale punto.

Diciamo con M. Valadier (cfr. [12], p. 1) che la multifunzione $F: T \to \mathcal{P}(X)$ (4) ha la proprietà (P) nel punto $t_0 \in T$ se

(P) $\mathring{F}(t_0) = \emptyset$ (5) oppure $\forall z \in \mathring{F}(t_0)$ esiste un intorno $I(t_0)$ del punto t_0 in modo che $z \in F(t)$ $\forall t \in I(t_0)$,

mentre si dice (cfr. [12], p. 5) che la proprietà (P_0) in $t_0 \in T$ se

(P_0) $\mathring{F}(t_0) = \emptyset$ oppure $\forall z \in \mathring{F}(t_0)$ $\forall \rho' > 0$ tale che $\overline{B(z, \rho')} \subset F(t_0)$ (6) e $\forall \rho < \rho'$ esiste un intorno $J(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà $\overline{B(z, \rho)} \subset F(t)$ $\forall t \in J(t_0)$.

3 – In quel che segue metteremo a confronto alcune definizioni introdotte nel paragrafo precedente.

---

(4) In realtà, M. Valadier in [12] fornisce queste definizioni nel contesto meno generale di multifunzioni a valori chiusi e convessi di uno spazio di Banach.

(5) Il soprassegno ° sta ad indicare che di un insieme si considera l'apertura.

(6) $\overline{B(z, \rho')}$ rappresenta la chiusura di $B(z, \rho')$.

Facciamo intanto osservare che per una multifunzione F, definita in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{P}(X)$, ove (X, d) è uno spazio metrico, sussistono (cfr. [1], p. 45) le seguenti implicazioni

$$F \text{ (s.c.s.)}_t \text{ in } t_0 \in T \Rightarrow F \text{ (s.c.s.)}_m \text{ in } t_0 \tag{3.1}$$

$$F \text{ (s.c.i.)}_m \text{ in } t_0 \in T \Rightarrow F \text{ (s.c.i.)}_t \text{ in } t_0 . \tag{3.2}$$

In generale però non sussistono le implicazioni inverse (7). Infatti, esistono (cfr. [1], p. 45) multifunzioni $F: T \to \mathcal{K}(X)$ «semicontinue superiormente metricamente» in un punto $t_0 \in T$, che non sono «semicontinue superiormente topologicamente» in t_0 mentre esistono multifunzioni «semicontinue inferiormente topologicamente» in un punto che non sono «semicontinue inferiormente metricamente» in tale punto, come proviamo con il seguente

Esempio 3.1. Posto $T = (\mathrm{R}_0^+, \mathcal{T})$, ove $\mathcal{T}$ indica la topologia indotta da quella usuale di R e $X = (\mathrm{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (8), consideriamo la multifunzione $F: T \to \mathcal{K}(X)$ definita ponendo

$$F(t) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \colon x \geqslant 0, \ y = tx\} \qquad t \in \mathrm{R}_0^+ . \tag{3.3}$$

È subito visto che F non è (s.c.i.)_m nel punto $t = 0$, pur essendo (s.c.i.)_t in tale punto.

Allo stesso modo, proveremo con due Esempi, che le due definizioni di «continuità topologica» e di «continuità metrica» non sono tra loro confrontabili.

Esempio 3.2. Posto $T = ([0, 1], \mathcal{T})$, ove $\mathcal{T}$ indica la topologia indotta da quella usuale di R e $X = (\mathrm{R}^2, \|\cdot\|_2)$, andiamo a considerare la multifunzione $F: T \to \mathcal{K}(X)$, così definita

$$F(t) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \colon x \geqslant 1; \ y = t\} \qquad t \in [0, 1] . \tag{3.4}$$

La multifunzione F non è «continua topologicamente» in $t = 0$, non essendo

(7) Esse sussistono se le multifunzioni sono a valori compatti.

(8) Con il simbolo $\|\cdot\|_2$ indichiamo la norma euclidea.

$(\text{s.c.s.})_t$ in tale punto. Osserviamo, infatti, che l'aperto $A=\{(x, y)\in \mathrm{R}^2: x>0; y<1/x\}$ contiene l'insieme $F(0)$, ma per ogni $t\in]0, 1]$ si ha che $F(t)\not\subset A$.

D'altra parte, è immediato riconoscere che F è «continua metricamente» in $t=0$.

Esempio 3.3. Posto $T=(\{0\}\cup\{1/n\}_{n\in\mathrm{N}}, \mathcal{T})$, ove $\mathcal{T}$ denota la topologia indotta da quella usuale di R e $X=(\mathrm{R}, \|\cdot\|_2)$, sia $F:T\to\mathcal{K}(X)$ la multifunzione definita ponendo

$$F(t)=\begin{cases}\mathrm{R} & t=0\\ [-n, n] & t=1/n.\end{cases}\tag{3.5}$$

Anche qui si vede subito che la multifunzione F è «continua topologicamente» in $t=0$, mentre non è «continua metricamente» in questo punto.

Nel caso di multifunzioni F definite in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{C}(E)$ (cfr. (2.2)), ove E è uno spazio topologico regolare (cfr. [13], Definizione 14.1), è noto (cfr. [7], Proposizione VI.1.10) che

$$F\ (\text{s.c.s.})_t \text{ in } t_0\in T\Rightarrow F\ (\text{s.c.s.})_w \text{ in } t_0.\tag{3.6}$$

Nella proposizione che segue proveremo che la «semicontinuità superiore debole» è implicata anche dalla «semicontinuità superiore metrica».

Proposizione 3.1. *Siano T uno spazio topologico, (X, d) uno spazio metrico e $F:T\to\mathcal{C}(X)$ una multifunzione. In queste condizioni, risulta*

$$F\ (\text{s.c.s.})_m \textit{ in } t_0\in T\Rightarrow F\ (\text{s.c.s.})_w \textit{ in } t_0.\tag{3.7}$$

Possiamo supporre $F(t_0)\subsetneq X$, poiché, in caso contrario, la tesi è soddisfatta per definizione. Fissato allora $y\notin F(t_0)$, sia

$$\alpha=\delta(y, F(t_0))>0.\tag{3.8}$$

Per ipotesi, esiste un intorno $W(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà

$$F(t)\subset B(F(t_0), \alpha/2)\qquad \forall t\in W(t_0).\tag{3.9}$$

Posto $A = B(y, \alpha/4)$, dall'essere

$$A \cap F(t) = \emptyset \qquad \forall t \in W(t_0) \tag{3.10}$$

segue la $(\text{s.c.s.})_w$ di F in t_0.

Concludiamo questo paragrafo facendo osservare che la Proposizione 3.1 non è invertibile (9), come proveremo con il seguente

Esempio 3.4. Posto $T = (\{0\} \cup \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{T})$ ove $\mathcal{T}$ indica la topologia indotta da quella usuale di $\mathbb{R}$ e $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$, sia $F : T \to \mathcal{B}(X)$ la multifunzione così definita

$$F(t) = \begin{cases} [0,\ 1] & t = 0 \\ [n,\ n+1] & t = 1/n. \end{cases} \tag{3.11}$$

È subito visto che F è «semicontinua superiormente debolmente» nel punto $t = 0$, mentre non è «semicontinua superiormente metricamente» in questo punto.

4 – In questo paragrafo stabiliremo alcune relazioni fra le proprietà di una multifunzione F e le proprietà della multifunzione ∂F richiamate in 2.

Teorema 4.1. *Sia $F : T \to \mathcal{B}(Y)$ una multifunzione definita nello spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{B}(Y)$* (cfr. (2.5)) *ove $(Y, \|\cdot\|)$ è uno spazio lineare normato. In queste condizioni, sussistono le seguenti implicazioni*

(A) $\partial F\ (\text{s.c.i.})_m$ *in* $t_0 \in T \Rightarrow F\ (\text{s.c.i.})_m$ *in* t_0

(B) $\partial F\ (\text{s.c.s.})_m$ *in* $t_0 \in T \Rightarrow F\ (\text{s.c.s.})_m$ *in* t_0.

Ci limitiamo a provare (A); la (B) si ottiene in modo analogo.

Poiché ∂F è $(\text{s.c.i.})_m$ in t_0, in corrispondenza di un fissato $\varepsilon > 0$, esiste un

---

(9) Nel caso in cui (X, d) è uno spazio metrico compatto le tre definizioni di «semicontinuità superiore», qui riportate, sono equivalenti.

intorno $U(t_0)$ del punto t_0 in modo che si abbia

$$\partial F(t_0) \subset B(\partial F(t), \varepsilon) \qquad \forall t \in U(t_0) \tag{4.1}$$

da cui, passando agli involucri convessi

$$\operatorname{co} \partial F(t_0) \subset \operatorname{co} B(\partial F(t), \varepsilon) \qquad \forall t \in U(t_0). \tag{4.1$'$}$$

Risultando peraltro (cfr. [5], Lemma 2.6)

$$\operatorname{co} B(\partial F(t), \varepsilon) = B(\operatorname{co} \partial F(t), \varepsilon) \tag{4.2}$$

e tenendo presente (cfr. [8], Lemma 1) che

$$\operatorname{co} \partial F(t) = F(t) \tag{4.3}$$

la (4.1)$'$ può scriversi per l'appunto

$$F(t_0) \subset B(F(t), \varepsilon) \qquad \forall t \in U(t_0). \tag{4.1$''$}$$

M. D. P. Monteiro Marques aveva provato risultati analoghi ai nostri (cfr. [8], Teorema 2, (a), (b)), ma relativamente alla semicontinuità inferiore e superiore in senso topologico; precisiamo inoltre che la relazione (b), analoga alla nostra (B), è conseguita in uno spazio normato $(Y, \|\cdot\|)$ di dimensione finita, mentre la relazione (a) per M. D. P. Monteiro Marques sussiste in un generico spazio normato $(Y, \|\cdot\|)$.

Andiamo ora a provare che l'implicazione (a) continua a sussistere in spazi lineari «seminormati». Si ha infatti il

Teorema 4.2. *Sia $F: T \to \mathcal{B}(L)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e $(L, \mathcal{P})$ uno spazio lineare seminormato. In queste condizioni, risulta*

$$\partial F \text{ (s.c.i.)}_t \textit{ in } t_0 \in T \Rightarrow F \text{ (s.c.i.)}_t \textit{ in } t_0. \tag{4.4}$$

Consideriamo un aperto A in $(L, \mathcal{P})$ tale che $A \cap F(t_0) \neq \emptyset$.
È possibile allora determinare un punto $x_0 \in F(t_0)$, un numero reale $r > 0$ e un

numero finito di seminorme $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ in modo che l'intorno del punto x_0

$$U(x_0, r, p_1, \dots, p_n) = \{x \in L: p_i(x - x_0) < r, \ i = 1, \dots, n\} \tag{4.5}$$

sia contenuto in A.

Se $x_0 \in \partial F(t_0)$ la tesi segue immediatamente. Sia allora $x_0 \in \mathring{F}(t_0)$. Poiché $F(t_0)$ è un insieme chiuso, limitato e convesso in $(L, \mathcal{P})$, risulta (cfr. [8], Lemma 1) ([10])

$$\operatorname{co} \partial F(t_0) = F(t_0) \tag{4.6}$$

ed esistono pertanto due punti $x_1, x_2 \in \partial F(t_0)$ e un numero $\bar{\lambda}$, $0 < \bar{\lambda} < 1$, in modo che sia

$$x_0 = \bar{\lambda} x_1 + (1 - \bar{\lambda}) x_2 . \tag{4.7}$$

Fissati quindi gli intorni $U_1 = U_1(x_1, r, p_1, \dots, p_n)$ e $U_2 = U_2(x_2, r, p_1, \dots, p_n)$, poiché ∂F è (s.c.i.)$_t$ in t_0, esistono rispettivamente due intorni $V_1(t_0)$ e $V_2(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà

$$\partial F(t) \cap U_i \neq \emptyset \qquad \forall t \in V_i(t_0) \qquad i = 1, 2. \tag{4.8}$$

Posto ora

$$V(t_0) = V_1(t_0) \cap V_2(t_0) \tag{4.9}$$

per ogni $t \in V(t_0)$ è possibile determinare (cfr. (4.8)) due punti y_1 e y_2 in modo che risulti

$$y_i \in \partial F(t) \cap U_i \qquad i = 1, 2. \tag{4.10}$$

In corrispondenza di questi punti e del fissato $\bar{\lambda} \in]0, 1[$, resta così individuato

([10]) In realtà M. D. P. Monteiro Marques consegue la (4.6) nel contesto «più particolare» di spazi normati, ma si vede subito, con una dimostrazione simile a quella adottata da M. D. P. Monteiro Marques, che la (4.6) continua a sussistere anche in «spazi lineari seminormati».

il punto

$$y = \bar{\lambda} y_1 + (1 - \bar{\lambda}) y_2 \qquad y \in F(t). \tag{4.11}$$

Da (4.7), (4.11) e (4.10) segue

$$p_j(y - x_0) \leq \bar{\lambda} p_j(y_1 - x_1) + (1 - \bar{\lambda}) p_j(y_2 - x_2) < r \qquad j = 1, \dots, n \tag{4.12}$$

da cui risulta $F(t) \cap U(x_0, r, p_1, \dots, p_n) \neq \emptyset$ $\forall t \in V(t_0)$ e pertanto la multifunzione F è $(\text{s.c.i.})_t$ nel punto t_0.

Il Teorema 4.4, che proveremo più avanti, ci consente di affermare che la proposizione (b) che, come abbiamo detto, M. P. D. Monteiro Marques ha conseguito in spazi normati di dimensione finita, continua a sussistere in spazi di Hilbert (di dimensione infinita). Premettiamo il

Lemma 4.3. *Siano $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert, C un sottoinsieme chiuso e convesso di $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ e $y \notin C$. Posto $\bar{x} \in C$, con $\delta(y, C) = \|y - \bar{x}\|$* (11) *e $z = \bar{x} + \alpha(y - \bar{x})$ con $\alpha \geq 1$, risulta*

$$\|y - x\| \leq \|z - x\| \qquad \forall x \in C. \tag{4.13}$$

Non è restrittivo porre $\bar{x} \equiv 0$. Cominciamo con l'osservare (cfr. [11], p. 107) che, per ogni $x \in C$, risulta

$$\|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 \geq -2(\alpha - 1)\langle y, x \rangle. \tag{4.14}$$

Fissato arbitrariamente $\gamma \in]0, 1]$, sia $w = \gamma x$. È subito visto che $w \in C$. Poiché peraltro è $\delta(y, C) = \|y\|$, risulta

$$\gamma \|x\|^2 \geq 2\langle y, x \rangle \tag{4.15}$$ e pertanto $$\langle y, x \rangle \leq 0 \tag{4.16}$$

da cui, tenendo presente (4.14) segue per l'appunto (4.13).

Teorema 4.4. *Sia $F : T \to \mathcal{B}(H)$ una multifunzione, ove T è uno spazio*

---

(11) Questo punto $\bar{x}$ esiste (cfr. [3], Teorema V.2).

topologico e $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *uno spazio di Hilbert. In queste condizioni, risulta*

$$\partial F \text{ (s.c.s.)}_t \; in \; t_0 \in T \Rightarrow F \text{ (s.c.s.)}_t \; in \; t_0 . \tag{4.17}$$

Sia A un aperto in $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ con la proprietà

$$F(t_0) \subset A . \tag{4.18}$$

Per ogni $x \in F(t_0)$ è possibile determinare un numero $\varepsilon_x > 0$ in modo che la boccia $B(x, \varepsilon_x)$ sia contenuta in A. Sia A' l'aperto

$$A' = \bigcup_{x \in F(t_0)} B(x, \varepsilon_x) \subset A . \tag{4.19}$$

Poiché l'insieme $F(t_0)$ è chiuso, risulta $\partial F(t_0) \subset A'$: esiste quindi un intorno $V(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà

$$\partial F(t) \subset A' \qquad \forall t \in V(t_0) . \tag{4.20}$$

Per conseguire la tesi è sufficiente allora provare che

$$F(t) \subset A' \qquad \forall t \in V(t_0) . \tag{4.21}$$

Supponiamo, per assurdo, che la (4.21) n o n sussista: esistono cioè un punto $\bar{t} \in V(t_0)$ e un punto $y \in \mathring{F}(\bar{t})$ (cfr. (4.20)) in modo che (cfr. 4.19))

$$\|y - x\| \geq \varepsilon_x \qquad \forall x \in F(t_0) . \tag{4.22}$$

Poiché $y \notin F(t_0)$ e $F(t_0)$ è un insieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert, esiste un unico punto $\bar{x} \in F(t_0)$ tale che (cfr. [3], Teorema V.2)

$$\delta(y, F(t_0)) = \|y - \bar{x}\| . \tag{4.23}$$

Sia $N = \{z \in H\colon z = \bar{x} + t(y - \bar{x}),\; t \in \mathbb{R}_0^+\}$ la semiretta di origine $\bar{x}$ e contenente il punto y. È subito visto che è possibile determinare un numero $\alpha^* > 1$ in modo che risulti

$$z^* = \bar{x} + \alpha^*(y - \bar{x}) \in \partial F(\bar{t}) \cap N \tag{4.24}$$

e quindi per la (4.20) esiste un punto $x^* \in F(t_0)$ con la proprietà

$$z^* \in B(x^*, \ \varepsilon_{x^*}) . \tag{4.25}$$

Poiché peraltro per il Lemma 4.3 risulta

$$\|y - x^*\| \leqslant \|z^* - x^*\| \tag{4.26}$$

da (4.26) segue la disuguaglianza

$$\|y - x^*\| < \varepsilon_{x^*} \tag{4.27}$$

che è assurda poiché contraddice la (4.22).

Vogliamo però osservare che n o n sussiste alcuna relazione fra la «semicontinuità superiore debole» di una multifunzione F e la «semicontinuità superiore debole» di ∂F, come risulta dagli Esempi che riportiamo.

Esempio 4.1. Posto $T = (\{0\} \cup \{1/n\}_{n \in \mathrm{N}}, \ \mathcal{T})$, ove $\mathcal{T}$ indica la topologia indotta da quella usuale di $\mathbb{R}$ e $X = (\mathbb{R}, \ \|\cdot\|_2)$, andiamo a considerare la multifunzione $F: T \to \mathcal{B}(X)$ così definita

$$F(t) = \begin{cases} [0, \ 1] & t = 0 \\ [-n, \ 0] & t = 1/n \quad n \text{ dispari} \\ [1, \ n] & t = 1/n \quad n \text{ pari.} \end{cases} \tag{4.28}$$

È subito visto che F n o n è $(\text{s.c.s.})_{\mathrm{w}}$ nel punto $t = 0$, pur essendo la multifunzione ∂F $(\text{s.c.s.})_{\mathrm{w}}$ in tale punto.

Esempio 4.2. Essendo $T = (\mathbb{R}, \ \|\cdot\|_2)$ e $X = (\mathbb{R}, \ \|\cdot\|_2)$, sia $F: T \to \mathcal{B}(X)$ la multifunzione definita ponendo

$$F(t) = \begin{cases} [0, \ 2] & t = 0 \\ [0, \ 1] & t \in \mathbb{R} - \{0\} . \end{cases} \tag{4.29}$$

È immediato constatare che F è $(\text{s.c.s.})_{\mathrm{w}}$ nel punto $t = 0$, mentre ∂F n o n è $(\text{s.c.s.})_{\mathrm{w}}$ in questo punto.

Andiamo ora a confrontare la «continuità topologica» di F e la «continuità topologica» di ∂F [12][13].

Già nel caso in cui i valori della multifunzione sono sottoinsiemi di uno spazio di Hilbert n o n sussiste, come risulta dall'Esempio 4.3, la seguente implicazione

(c) F continua topologicamente in $t_0 \in T \Rightarrow \partial F$ (s.c.s.)$_t$ in t_0

mentre, come proveremo nel Teorema 4.5, la semicontinuità inferiore topologica di ∂F è condizione necessaria per la continuità topologica di F nel caso in cui F sia una multifunzione a valori in uno spazio lineare «seminormato».

Esempio 4.3. Posto $T = (\{0\} \cup \{1/n\}_{n \in \mathrm{N}}, \mathcal{T})$, ove $\mathcal{T}$ denota la topologia indotta da quella usuale di R e $H = (l_2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ [14], sia $F: T \to \mathcal{B}(H)$ la multifunzione così definita:

$$F(t) = \begin{cases} \overline{B(0,\ 1)} & t = 0 \\ \overline{B(0,\ 1)} \cap A_n & t = 1/n \end{cases} \tag{4.30}$$

ove

$$A_n = \{(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2 \colon \alpha_k = 0 \ \ \forall k > n\}\,. \tag{4.31}$$

Come è stato detto, i valori della multifunzione F appartengono alla famiglia $\mathcal{B}(H)$ (cfr. (2.5)); infatti si prova senza difficoltà che $F(t)$ $t \in T$, è un insieme «limitato» e «convesso». Basta, quindi, provare che $F(t)$ è chiuso e per questo è sufficiente che sia chiuso l'insieme A_n, $n \in \mathrm{N}$.

Fissato $n \in \mathrm{N}$, sia $(a_j)_j$, $a_j = (\alpha_{j,k})_{k=1}^{\infty} \in A_n$, una successione convergente ad $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ in $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$. Risulta allora

$$\lim_{j \to +\infty} |\alpha_{j,k} - \alpha_k| = 0 \qquad \forall k \in \mathrm{N}\,. \tag{4.32}$$

---

(12) In [8] è stato provato per multifunzioni F definite in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{B}(Y)$, ove $(Y, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, che la «continuità metrica» di F è condizione necessaria e sufficiente per la «continuità metrica» di ∂F.

(13) Ricordiamo che se $(Y, \|\cdot\|)$ è, in particolare, uno spazio di Hilbert sussiste (cfr. [8], Teorema 2 e qui Teorema 4.4) la seguente implicazione ∂F continua topologicamente in $t_0 \in T \Rightarrow F$ continua topologicamente in t_0.

(14) Come è noto, $(l_2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ indica lo spazio di Hilbert $l_2 = \{(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \colon \alpha_k \in \mathrm{R}, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < +\infty\}$ con il seguente prodotto interno $\langle (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}, (\beta_k)_{k=1}^{\infty} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$.

Poiché se $k > n$ risulta $\alpha_{j,k} = 0$, da (4.32) segue

$$\alpha_k = 0 \qquad \forall k > n \tag{4.33}$$

e pertanto A_n è chiuso.

Proviamo ora che la multifunzione F è «continua topologicamente» in $t = 0$.

Poiché $F(1/n) \subset F(0)$ $\forall n \in \mathrm{N}$, la multifunzione F è (s.c.s.)$_t$ in $t = 0$; per provare la (s.c.i.)$_t$ in $t = 0$, fissiamo intanto un aperto A in $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tale che $A \cap F(0) \neq \emptyset$. È possibile allora determinare un punto $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in F(0)$ e un numero $\varepsilon > 0$ in modo che

$$B(x, \varepsilon) \subset A. \tag{4.34}$$

In corrispondenza di $\varepsilon^2/4$, esiste un numero $\bar{n} \in \mathrm{N}$ con la proprietà

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad n > \bar{n}. \tag{4.35}$$

Scelto, quindi, $U(0) = \{0\} \cup \{1/n\}_{n > \bar{n}}$ come intorno del punto $t = 0$, andiamo a provare che

$$A \cap F(t) \neq \emptyset \qquad \forall t \in U(0). \tag{4.36}$$

Infatti, fissato $t = 1/n$, $n > \bar{n}$, sia $b_n = (\beta_{n,k})_{k=1}^{\infty}$, ove

$$\beta_{n,k} = \xi_k \qquad k = 1, \ldots, n \qquad\qquad \beta_{n,k} = 0 \qquad k > n. \tag{4.37}$$

Poiché

$$\|b_n\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2\Big)^{1/2} \leq \|x\| \leq 1 \tag{4.38}$$

è subito visto (cfr. (4.31) e (4.37)) che $b_n \in F(t)$. D'altra parte, per essere (cfr. (4.35) e (4.34))

$$\|b_n - x\| = \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{n,k} - \xi_k)^2\Big]^{1/2} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^2\Big)^{1/2} < \varepsilon \tag{4.39}$$

risulta pure $b_n \in A$ e, quindi, F è (s.c.i.)$_t$ in t_0.

Ora andiamo a «caratterizzare» la multifunzione ∂F per poi provare che essa n o n è $(\text{s.c.s.})_t$ in t_0.

Poiché è ovvio (cfr. (4.30)) che $\partial F(0) = \partial B(0, 1)$, basta ora valutare i valori che ∂F assume per $t = 1/n$, $n \in \mathrm{N}$. Proveremo che $\partial F(1/n) = F(1/n)$: è sufficiente per questo provare che, fissato $c = (\gamma_k)_{k=1}^{\infty} \in F(1/n)$ e un numero $\eta > 0$, è possibile determinare un punto $y \in B(c, \eta)$ tale che

$$(4.40) \qquad y \notin F(1/n).$$

Sia $y = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ove

$$(4.41) \qquad \lambda_k = \gamma_k \quad k = 1, \ldots, n \qquad \lambda_{n+1} = \eta/2 \quad \lambda_k = 0 \quad k > n+1.$$

Poiché $\lambda_{n+1} \neq 0$, si ha intanto che $y \notin F(1/n)$. D'altra parte, risulta

$$(4.42) \qquad \|y - c\| = [\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \gamma_k)^2]^{1/2} < \eta$$

e quindi $y \in B(c, \eta)$.

Caratterizzata ∂F siamo, infine, in grado di provare che essa n o n è $(\text{s.c.s.})_t$; anzi proveremo addirittura (cfr. (3.1)) che ∂F n o n è neppure $(\text{s.c.s.})_m$ in $t = 0$.

Infatti, indicata con z la «successione identicamente nulla», risulta $z \in \partial F(1/n)$ $n \in \mathrm{N}$, e inoltre

$$(4.43) \qquad \delta(z, \partial F(0)) = 1.$$

Scelto allora $\bar{\varepsilon} = 1/4$, da (4.43) segue per l'appunto

$$(4.44) \qquad \partial F(1/n) \not\subset B(\partial F(0), \bar{\varepsilon}) \qquad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Teorema 4.5. *Sia $F: T \to \mathcal{B}(L)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e $(L, \mathcal{P})$ uno spazio lineare seminormato. In queste condizioni, risulta*

$$(4.45) \qquad F \text{ continua topologicamente in } t_0 \in T \Rightarrow \partial F \ (\text{s.c.i.})_t \text{ in } t_0.$$

Consideriamo un aperto A in $(L, \mathcal{P})$ tale che $\partial F(t_0) \cap A \neq \emptyset$: è possibile, quindi, determinare un punto $\bar{x} \in \partial F(t_0)$, un numero $\eta > 0$ e una classe finita di seminorme $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ in modo che l'intorno del punto $\bar{x}$

$$V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) = \{x \in L: \ p_i \ (x - \bar{x}) < \eta, \ i = 1, \dots, n\} \tag{4.46}$$

sia contenuto in A.

Poiché $\bar{x} \in \partial F(t_0)$, esiste un punto $\bar{y}$ con le proprietà

$$\bar{y} \in V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) \quad \text{e} \quad \bar{y} \notin F(t_0) \tag{4.47}$$

ed è allora possibile, per ogni fissato $x \in F(t_0)$, andare a considerare un intorno U_x del punto x non contenente il punto $\bar{y}$.

Detto G l'aperto

$$G = \bigcup_{x \in F(t_0)} U_x \supset F(t_0) \tag{4.48}$$

dall'ipotesi fatta segue che esiste un intorno $W(t_0)$ del punto t_0 in modo che

$$F(t) \subset G \qquad \forall t \in W(t_0). \tag{4.49}$$

Tenendo presente (cfr. (4.46)) che $F(t_0) \cap V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) \neq \emptyset$, è possibile determinare un intorno $U(t_0)$ del punto t_0 per cui risulta

$$F(t) \cap V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) \neq \emptyset \qquad \forall t \in U(t_0) \tag{4.50}$$

e quindi, posto $J(t_0) = W(t_0) \cap U(t_0)$, per conseguire la tesi basta provare che

$$\partial F(t) \cap V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) \neq \emptyset \qquad \forall t \in J(t_0). \tag{4.51}$$

Se la (4.51) non sussistesse esisterebbe un punto $t^* \in J(t_0)$ tale che

$$\partial F(t^*) \cap V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) = \emptyset \tag{4.52}$$

e allora, tenendo presenti (4.50), (4.52), sarebbe possibile determinare un punto $\bar{z} \in \mathring{F}(t^*) \cap V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n)$ e quindi

$$V(\bar{x}, \ \eta, \ p_1, \dots, p_n) \subset F(t^*). \tag{4.53}$$

Tenendo presenti (4.47) e (4.49) risulterebbe $\bar{y} \in G$: esisterebbe, in tal caso (cfr. (4.48)) un intorno U_x, $x \in F(t_0)$, contenente il punto $\bar{y}$, e ciò, da quanto precede, è assurdo.

In quel che segue, dopo aver conseguito il Lemma 4.6 e il Lemma 4.7 saremo in grado di formulare alcune proposizioni che estendono risultati da noi qui conseguiti e altri di M. D. P. Monteiro Marques (cfr. [8], Corollario).

Lemma 4.6. *Sia $F: T \to \mathcal{P}(E)$ (cfr. (2.1)) una multifunzione, ove T ed E sono spazi topologici. Indicata con $\bar{F}$ la multifunzione definita $\bar{F}(t) = \overline{F(t)}$, $t \in T$, risulta*

$$(4.54) \qquad F \text{ (s.c.i.)}_t \text{ in } t_0 \in T \Leftrightarrow \bar{F} \text{ (s.c.i.)}_t \text{ in } t_0 .$$

Omettiamo la dimostrazione che si ottiene senza difficoltà tenendo conto della definizione di (s.c.i.)$_t$.

Lemma 4.7. *Siano $F: T \to \mathcal{P}(M)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e M è uno spazio topologico T_4 (15), e $\bar{F}$ la multifunzione $\bar{F}: t \mapsto \overline{F(t)}$, $t \in T$. In tali condizioni risulta*

$$(4.55) \qquad F \text{ (s.c.s.)}_t \text{ in } t_0 \in T \Rightarrow \bar{F} \text{ (s.c.s.)}_t \text{ in } t_0 .$$

Sia A un aperto dello spazio topologico M tale che $\bar{F}(t_0) \subset A$; è allora possibile determinare due aperti C e D con le proprietà

$$(4.56) \qquad C \cap D = \emptyset \qquad \bar{F}(t_0) \subset C \qquad A^c \subset D \text{ (16)} .$$

Per ipotesi esiste quindi (cfr. (4.56)) un intorno $V(t_0)$ del punto t_0 in modo che si abbia

$$(4.57) \qquad F(t) \subset C \qquad \forall t \in V(t_0) .$$

Poiché peraltro $\bar{C} \cap D = \emptyset$ (cfr. (4.56)), dalla (4.57) discende

$$(4.58) \qquad \bar{F}(t) \cap D = \emptyset \qquad \forall t \in V(t_0)$$

(15) Cfr. [13], Definizione 15.1.
(16) A^c rappresenta il complementare dell'insieme A in M.

e quindi (cfr. (4.56)) $\bar{F}(t) \subset A \quad \forall t \in V(t_0)$, c.v.d.

Facciamo, però, osservare che non sussiste l'implicazione inversa

$$\bar{F}\ (\text{s.c.s.})_t \text{ in } t_0 \in \mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{F}\ (\text{s.c.s.})_t \text{ in } t_0. \tag{4.59}$$

Ciò risulta dal seguente

Esempio 4.4. Posto $T = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ e $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$, sia $F: T \to \mathcal{C}(X)$ la multifunzione così definita

$$F(t) = \begin{cases}]0,\ 1[& t = 0 \\ [0,\ 1] & t \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{cases} \tag{4.60}$$

La multifunzione F non è $(\text{s.c.s.})_t$ in $t = 0$: infatti, l'aperto $A =]0, 1[$ contiene l'insieme $F(0)$, ma, per ogni $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, risulta $F(t) \not\subset A$.

È immediato peraltro riconoscere che $\bar{F}$ è addirittura «continua topologicamente» in $t = 0$.

Osserviamo, inoltre, che se F è una multifunzione definita in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{C}(L)$ (cfr. (2.4)) ove $(L, \mathcal{P})$ è uno spazio lineare seminormato risulta (cfr. [10], p. 90)

$$\partial F = \partial \bar{F}. \tag{4.61}$$

Siamo, ora, in grado di formulare le seguenti proposizioni.

Corollario 4.8 (cfr. qui il Teorema 4.2 e il Lemma 4.6). *Sia $F: T \to \mathcal{C}(L)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e $(L, \mathcal{P})$ uno spazio lineare seminormato. In queste condizioni, risulta*

$$\partial F\ (\text{s.c.i.})_t \textit{ in } t_0 \in T \Rightarrow F\ (\text{s.c.i.})_t \textit{ in } t_0. \tag{4.62}$$

Corollario 4.9 (cfr. qui il Teorema 4.5 e i Lemmi 4.6 e 4.7). *Sia $F: T \to \mathcal{C}(L)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e $(L, \mathcal{P})$ uno* *spazio lineare seminormato normale* [17]. *In queste condizioni, risulta*

(4.63) F *continua topologicamente in* $t_0 \in T \Rightarrow \partial F$ $(\text{s.c.i.})_t$ *in* t_0.

Osservazione 4.1. Vogliamo osservare esplicitamente che il nostro Teorema 4.4 e la proposizione (b) (cfr. [8], Teorema 2) non sussistono, in generale, per multifunzioni a valori non chiusi: ciò si vede subito esaminando ancora l'Esempio 4.4.

Tenendo, infine, presenti le implicazioni (5.3) e (5.4) di [4], la (4.61) e il Teorema 4.1 di qui, e il Corollario di [8], discende senza difficoltà il seguente

Corollario 4.10. *Se* $F: T \to \mathcal{C}(Y)$ *è una multifunzione, ove* T *è uno spazio topologico e* $(Y, \|\cdot\|)$ *è uno spazio lineare normato, risulta*

(4.64) ∂F $(\text{s.c.i.})_m$ *in* $t_0 \in T \Rightarrow F$ $(\text{s.c.i.})_m$ *in* t_0

(4.65) ∂F $(\text{s.c.s.})_m$ *in* $t_0 \in T \Rightarrow F$ $(\text{s.c.s.})_m$ *in* t_0

(4.66) ∂F *continua metricamente in* $t_0 \in \Leftrightarrow F$ *continua metricamente in* t_0.

5 – M. Valadier in [12] ha provato, per una multifunzione F definita in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia dei sottoinsiemi chiusi, convessi e con interno non vuoto di uno spazio di Banach, la seguente implicazione

(5.1) F *ha la proprietà (P) in* $t_0 \in T \Rightarrow F$ *è* $(\text{s.c.i.})_t$ *in* t_0

e per una multifunzione F, definita sempre in uno spazio topologico T e a valori nella famiglia $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ (cfr. (2.3)), la seguente implicazione

(5.2) F *è* $(\text{s.c.i.})_t$ *in* $t_0 \in T \Rightarrow F$ *ha la proprietà* (P_0) *in* t_0.

Facciamo intanto osservare che, come si vede subito con una dimostrazione simile a quella adottata da M. Valadier, l'implicazione (5.1) continua a sussistere

---

[17] Cfr. [13], Definizione 15.1.

nel contesto più generale di multifunzioni a valori nella famiglia dei sottoinsiemi convessi di uno spazio lineare seminormato, mentre, già nel caso in cui F sia una multifunzione a valori nella famiglia $\mathcal{B}(H)$, ove $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, l'implicazione (5.2) non continua a sussistere: è, infatti, immediato riconoscere che la multifunzione F, definita nell'Esempio 4.3, pur essendo (s.c.i.)$_t$ in $t = 0$, non ha la proprietà (P_0) in tale punto.

Sussiste però il seguente

Teorema 5.1. *Sia $F : T \to \mathcal{B}(Y)$ una multifunzione, ove T è uno spazio topologico e $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio lineare normato, tale che*

(i) F (s.c.i.)$_t$ *in* $t_0 \in T$ (ii) ∂F (s.c.s.)$_t$ *in* $t_0 \in T$.

In queste condizioni F ha la proprietà (P_0) in t_0.

Possiamo supporre (cfr. (P_0)) $\mathring{F}(t_0) \neq \emptyset$. Fissato allora $z_0 \in \mathring{F}(t_0)$, sia $\rho' > 0$ tale che

(5.3) $$\overline{B(z_0, \rho')} \subset F(t_0) .$$

Scelto arbitrariamente $\rho \in]0, \rho'[$, consideriamo l'aperto

(5.4) $$A = Y \setminus \overline{B(z_0, \rho)} .$$

Poiché $\partial F(t_0) \subset A$, è possibile determinare un intorno $U(t_0)$ del punto t_0 in modo che si abbia

(5.5) $$\partial F(t) \subset A \qquad \forall t \in U(t_0)$$

mentre, per l'ipotesi (i), esiste un intorno $V(t_0)$ del punto t_0 con la proprietà

(5.6) $$F(t) \cap B(z_0, \rho) \neq \emptyset .$$

Posto allora $W(t_0) = U(t_0) \cap V(t_0)$, basta provare che

(5.7) $$\overline{B(z_0, \rho)} \subset F(t) \qquad \forall t \in W(t_0) .$$

Fissiamo per questo scopo $t \in W(t_0)$ e $y \in \overline{B(z_0, \rho)}$; tenendo presenti (5.4), (5.5), (5.6), esiste un punto z con la proprietà

$$z \in \mathring{F}(t) \cap B(z_0, \rho). \tag{5.8}$$

Se $y \neq z$, consideriamo la semiretta s di origine z e contenente il punto y. Preso (cfr. (5.8)) $x \in s \cap F(t)$, da (5.4) e (5.5) risulta

$$x \notin \overline{B(z_0, \rho)} \qquad \text{e pertanto} \tag{5.9}$$

$$y \in [z, x] \subset F(t)\,(^{18}). \tag{5.10}$$

Per l'arbitrarietà di y in $\overline{B(z_0, \rho)}$, la (5.7) è dunque provata.

Bibliografia

[1] J. P. AUBIN and A. CELLINA, *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[2] C. BERGE, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Deuxieme Edition, 1334, Dunod, Paris, 1966.

[3] H. BREZIS, *Analisi Funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, S.r.l., 1986.

[4] T. CARDINALI e F. PAPALINI, *Caratterizzazione della semicontinuità inferiore della frontiera di una multifunzione in spazi normati* (in corso di stampa su Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo).

[5] J. L. DAVY, *Properties of solution set of a generalized differential equation*, Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972), 379-398.

[6] C. KURATOWSKI, *Les fonctions semicontinues dans l'espace des ensembles fermés*, Fund. Math. 18 (1932), 148-159.

[7] C. MAYER, *Outils topologiques et métriques de l'Analyse Mathématique*, Collection Analyse Fonctionnelle, Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1969.

[8] M. D. P. MONTEIRO MARQUES, *Sur la frontière d'un convexe mobile*, Seminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, Exposé n° 12.

[9] J. J. MOREAU, *Intersection of moving convex sets in a normed space*, Math. Scand. 36 (1975), 159-173.

([18]) La scrittura $[z, x]$ sta ad indicare il segmento

$$[z, x] = \{w = \lambda z + (1-\lambda)x \colon \lambda \in [0, 1]\}.$$

[10] J. Stoer and C. Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions* (I), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[11] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley and Sons, 1967.

[12] M. Valadier, *Approximation lipschitzienne par l'intérieur d'une multifonction* s.c.i., Seminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, Exposé n° 11, 1987.

[13] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

Abstract

In this note we obtain several relations between a multifunction «F» and the relative border-multifunction «∂F», concerning the lower-semicontinuity («topological» or «metric»), the upper-semicontinuity («topological» or «metric») and the continuity («topological» or «metric»). These results contain or extend various results stated by M. D. P. Monteiro Marques. Moreover, we prove a sufficient condition for the property (P_0) *that extends a proposition of M. Valadier.*

***