Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 143-150

NICOLAE SOARE (*)

Sur quelques f-connexions linéaires (**)

Introduction

Dans cette note on étudie les connexions linéaires compatibles avec les structures déterminées par les champs tensoriels f du type (1, 1), ayant la propriété $f^m \pm f^p = 0$, où m et p sont des nombres naturels convenables. Les cas $f^3 + f^1 = 0$ a été étudié par R. Miron et G. Atanasiu en [3].

En utilisant des opérateurs d'Obata associés aux structures f considerées, on détérmine toutes les f-connexions linéaires et les groupes des transformations de ces connexions.

Par les f-connexions on etudie aussi l'intégrabilité des f-structures.

1 - Préliminaires

Soit M une variété différentiable n dimensionnelle, $\mathcal{C}(M)$ le module affine des connexions linéaires sur M, $\mathcal{T}_s^r(M)$ le module des tenseurs du type (r, s); pour $\mathcal{T}_0^1(M)$ et $\mathcal{T}_1^0(M)$ on utilise les notations $\mathcal{X}(M)$ et $\mathcal{X}^*(M)$ respectivement. Tous les objets géométriques sont de classe C^∞.

Déf. 1.1. On appelle *$f(m, p)$-structure* ou *$f(m, -p)$-structure* sur M, un champ de tenseurs $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$, de rang $n-k$, $k \geq 0$ dans chaque point $q \in M$, ayant la propriété

$$f^m + f^p = 0 \qquad \text{ou} \qquad f^m - f^p = 0$$

réspectivement.

(*) Indirizzo: Facultatea de Matematica, Str. Academiei n. 14, R-Bucuresti.

(**) Ricevuto: 26-IV-1988.

Si l'on suppose que M est une $f(5,\ 1)$-variété, donc qu'il existe $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$ t.q. $f^5+f=0$, alors, en notant $h=-f^4$, $v=1+f^4$, on a [2]

$$fh=hf=f \qquad f^4h=-h \qquad fv=vf=0\,.$$

Déf. 1.2. On appelle *opérateurs d'Obata* de $f(5,\ 1)$ les applications $A^{(5,\ 1)}$, $A^{(5,\ 1)*}: \mathcal{T}_1^1(M) \to \mathcal{T}_1^1(M)$ données par

$$A^{(5,\ 1)}(w)=\tfrac{1}{2}(w-vw-wv+3vwv-f^2wf^2) \qquad A^{(5,\ 1)*}(w)=w-A^{(5,\ 1)}(w)\,.$$

Proposition 1.1. *$A^{(5,\ 1)}$ et $A^{(5,\ 1)*}$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\mathcal{T}_1^1(M)$.*

Dém. Par simple calcul, on obtient le résultat.

Si M est une $f(4,\ 2)$-variété, donc qu'il existe $f\in\mathcal{T}_1^1(M)$ t.q. $f^4+f^2=0$, alors, en notant $h=-f^2$, $v=1+f^2$ on a [1]

$$fh=hf=-f^3 \qquad f^2h=hf^2=-h \qquad fv=vf=f^3+f \qquad f^2v=vf^2=0.$$

Si M est une $f(4,\ -2)$-variété, donc qu'il existe $f\in\mathcal{T}_1^1(M)$ t.q. $f^4-f^2=0$, alors, en notant $h=f^2$, $v=1-f^2$ on a [1]

$$fh=hf=f^3 \qquad f^2h=hf^2=h \qquad fv=vf=f-f^3 \qquad f^2v=vf^2=0.$$

Déf. 1.3. On appelle *opérateurs d'Obata* de $f(4,\ 2)$ ou de $f(4,\ -2)$, les applications $A^{(4,\ \pm2)}$, $A^{(4,\ \pm2)*}$: $\mathcal{T}_1^1(M)\to\mathcal{T}_1^1(M)$ données par

$$A^{(4,\ \pm2)}(w)=\tfrac{1}{2}(w-vw-wv+3vwv-f^3wf^3) \qquad A^{(4,\ \pm2)*}(w)=w-A^{(4,\ \pm2)}(w).$$

Proposition 1.2. *$A^{(4,\ \pm2)}$ et $A^{(4,\ \pm2)*}$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\mathcal{T}_1^1(M)$.*

La démonstration est immédiate.

Il est utile de rappeler par la suite une proposition générale bien connue.

Soit V un éspace vectoriel, A un projecteur de V, A^* le projecteur supplémentaire. On a

Proposition 1.3. *L'équation $A(u) = a$, $a \in V$, a des solutions dans V, si et seulment si $a \in \operatorname{Ker} A^*$ et la solution générale est donnée par $u = a + A^*(\omega)$, où ω est un vecteur arbitraire de V.*

2 - $f(m, p)$-connexions linéaires

Dans ce qui suit $\overset{\circ}{\nabla} \in \mathcal{C}(M)$ sera une connexion linéaire quelconque, fixée sur M. Tout champ de tenseurs $u \in \mathcal{T}^1_1(M)$ peut être considéré comme un champ de 1-formes $\mathcal{X}(M)$-valuées. Si $\nabla \in \mathcal{C}(M)$ on notera par D la connexion associée

$$\mathrm{D}_X u = \nabla_X u - u\nabla_X \qquad X \in \mathcal{X}(M). \tag{2.1}$$

Déf. 2.1. Une connexion ∇ sur M s'appelle *$f(m, p)$-connexion* ou *connexion compatible avec la structure f*, si $\mathrm{D}f = 0$

$$\nabla f - f\nabla = 0. \tag{2.2}$$

Il est bien évident que pour toute f-connexion ∇ on a

$$\mathrm{D}_X h = \nabla_X h - h\nabla_X = 0 \qquad \mathrm{D}_X v = \nabla_X v - v\nabla_X = 0$$

$$\mathrm{D}_X f^s = \nabla_X f^s - f^s\nabla_X = 0 \qquad X \in \mathcal{X}(M) \qquad s \text{ est un nombre naturel.}$$

On observe que D *réalise la commutation avec les opérateurs $A^{(5,\,1)}$, $A^{(5,\,1)*}$, $A^{(4,\,-2)}$ et $A^{(4,\,-2)*}$.*

On prendra

$$\nabla_X = \overset{\circ}{\nabla}_X + B_X \tag{2.3}$$

$X \in \mathcal{X}(M)$, $B \in \mathcal{T}^1_2(M)$, $B_X(Y) = B(X, Y)$ et on détermine le champ B à la condition que ∇ satisfasse à (2.2). On trouve que

$$B_X f - f B_X = -\overset{\circ}{\mathrm{D}}_X f. \tag{2.4}$$

Si f est une $f(5, 1)$-structure, alors on observe aisément que l'équation (2.4) est équivalente à

$$A^{(5,\,1)*}(B_X) = \tfrac{1}{2}[(\overset{\circ}{\mathrm{D}}_X h)\, v - 2v\, \overset{\circ}{\mathrm{D}}_X h - f^2\, \overset{\circ}{\mathrm{D}}_X f^2]. \tag{2.5}$$

Si f est une $f(4, -2)$-structure, alors l'équation (2.4) est équivalent à

$$A^{(4,-2)*}(B_X) = \tfrac{1}{2}[(\mathring{\mathrm{D}}_X h) - 2v\,\mathring{\mathrm{D}}_X h - f^3\,\mathring{\mathrm{D}}_X f^3]. \tag{2.6}$$

Si l'on applique la Proposition 1.3 on constate que (2.5) et (2.6) présentent des solutions et les solutions générales sont respectivement

$$B_X^{(5,1)} = \tfrac{1}{2}[(\mathring{\mathrm{D}}_X h)\,v - 2v\,\mathring{\mathrm{D}}_X h - f^2\,\mathring{\mathrm{D}}_X f^2] + A^{(5,1)}(W_X) \tag{2.7}$$

$$B_X^{(4,\pm 2)} = \tfrac{1}{2}[(\mathring{\mathrm{D}}_X h)\,v - 2v\,\mathring{\mathrm{D}}_X h - f^3\,\mathring{\mathrm{D}}_X f^3] + A^{(4,\pm 2)}(W_X) \tag{2.8}$$

où $W \in \mathcal{T}_2^1(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Par conséquent, on trouve

Théorème 2.1. *Il existe des $f(5, 1)$-connexions; l'une d'entre elles est donnée par*

$$\nabla_X^{(5,1)} = \mathring{\nabla}_X + \tfrac{1}{2}[(\mathring{\mathrm{D}}_X h)\,v - 2v\,\mathring{\mathrm{D}}_X h - f^2\,\mathring{\mathrm{D}}_X f^2] \tag{2.9}$$

où $\mathring{\nabla}$ est une connexion linéaire fixée sur M et $\mathring{\mathrm{D}}$ est sa connexion associée. Toutes les $f(5, 1)$-connexions sont données par

$$\bar{\nabla}_X^{(5,1)} = \nabla_X^{(5,1)} + A^{(5,1)}(W_X) \qquad W \in \mathcal{T}_2^1(M) \tag{2.10}$$

où $\nabla_X^{(5,1)}$ a l'expression (2.9).

Théorème 2.2. *Il existe des $f(4, \pm 2)$-connexions; l'une d'entre elle est donnée par*

$$\nabla_X^{(4,\pm 2)} = \mathring{\nabla}_X + \tfrac{1}{2}[(\mathring{\mathrm{D}}_X h)\,v - 2v\,\mathring{\mathrm{D}}_X h - f^3\,\mathring{\mathrm{D}}_X f^3] \tag{2.11}$$

où $\mathring{\nabla}$ est une connexion linéaire fixée sur M et $\mathring{\mathrm{D}}$ est sa connexion associée. Toutes les $f(4, \pm 2)$-connexions sont données par

$$\bar{\nabla}_X^{(4,\pm 2)} = \nabla_X^{(4,\pm 2)} + A^{(4,\pm 2)}(W_X) \qquad W \in \mathcal{T}_2^1(M) \tag{2.12}$$

où $\nabla_X^{(4,\pm 2)}$ a l'expression (2.11).

Soient

$$(2.13)\qquad p^{(5,\,1)}: \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M) \qquad p^{(5,\,1)}(\nabla^{(5,\,1)}) = \bar{\nabla}^{(5,\,1)}$$

$$(2.14)\qquad p^{(4,\,\pm 2)}: \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M) \qquad p^{(4,\,\pm 2)}(\nabla^{(4,\,\pm 2)}) = \bar{\nabla}^{(4,\,\pm 2)}.$$

On remarque que (2.13) peut être considérée comme une transformation de $f(5,\ 1)$-connexions et on a

Théorème 2.3. *L'ensemble des transformation de $f(5,\ 1)$-connexions et le produit des applications est un groupe abélien noté par $G^{(5,\,1)}$, isomorphe avec le groupe aditif des champs $W \in \mathcal{T}_2^1(M)$ qui ont la propriété $W_X \in \operatorname{Ker} A^{(5,\,1)*}$ pour chaque $X \in \mathcal{X}(M)$.*

Un résultat similaire a lieu pour les transformations des $f(4,\ \pm 2)$-connexions.

3 - L'intégrabiité des $f(m,\ p)$-structures

La structure $f(m,\ p)$ s'appelle *intégrable* si dans chaque point sur M il existe une carte admissible où $f(m,\ p)$ ait des coefficients constants dans des repères naturels.

On sait que la $f(5,\ 1)$-structure est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis $N^{(5,\,1)} \in \mathcal{T}_2^1(M)$, donné par

$$(3.1)\qquad N^{(5,\,1)}(X,\ Y) = [fX,\ fY] - f[fX,\ Y] - f[X,\ fY] + f^2[X,\ Y]$$

est zéro [2], et que la $f(4,\ \pm 2)$-structure est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis $N^{(4,\,\pm 2)} \in \mathcal{T}_2^1(M)$, donné par

$$(3.2)\qquad N^{(4,\,\pm 2)}(X,\ Y) = [fX,\ fY] - f[fX,\ Y] - f[X,\ fY] + f^2[X,\ Y]$$

est zéro [1]. Les théorèmes qui suivent ont lieu.

Théorème 3.1. *Les tenseurs d'intégrabilité de la structure $f(5,\ 1)$ et de la* *structure* $f(4, \pm 2)$, *s'expriment sous la forme*

$$N^{(5, 1)}(X, Y) \tag{3.3}$$

$$= -f^2 T^{(5, 1)}(X, Y) - T^{(5, 1)}(fX, fY) + fT^{(5, 1)}(fX, Y) + fT^{(5, 1(}(X, fY)$$

$$N^{(4, \pm 2)}(X, Y) \tag{3.4}$$

$$= -f^2 T^{(4, \pm 2)}(X, Y) - T^{(4, \pm 2)}(fX, fY) + fT^{(4, \pm 2)}(fX, Y) + fT^{(4, \pm 2)}(X, fY)$$

où $T^{(5, 1)}$ *est la torsion d'une* $f(5, 1)$*-connexion quelconque et* $T^{(4, \pm 2)}$ *est la torsion d'une* $f(4, \pm 2)$*-connexion quelconque, respectivement.*

Théorème 3.2. *Les tenseurs* $N^{(5, 1)}$, $N^{(4, \pm 2)}$ *d'intégrabilité des structures* $f(5, 1)$, $f(4, \pm 2)$ *sont invariants par transformation des groupes* $G^{(5, 1)}$, $G^{(4, \pm 2)}$, *respectivement.*

Dém. Par simple calcul, on obtient

$$\bar{N}^{(5, 1)}(X, Y)$$

$$= -f^2 \bar{T}^{(5, 1)}(X, Y) - \bar{T}^{(5, 1)}(fX, fY) + f\bar{T}^{(5, 1)}(fX, Y) + f\bar{T}^{(5, 1)}(X, fY)$$

$$= -f^2(\bar{\nabla}_X^{(5, 1)} Y - \bar{\nabla}_Y^{(5, 1)} X - [X, Y]) - \ldots = N^{(5, 1)}(X, Y).$$

Théorème 3.3. *S'il existe une* $f(4, 2)$*-connexion semi-symétrique (en particulier symétrique), alors la structure* $f(4, 2)$ *est integrable.*

Dém. En tenant compte de

$$T^{(4, 2)}(X, Y) = \sigma(X) Y - \sigma(Y) X \qquad \sigma \in \mathfrak{X}^*(M) \qquad \text{on obtient}$$

$$hT^{(4, 2)}(X, Y) = \sigma(X) hY - \sigma(Y) hX$$

$$-T^{(4, 2)}(fX, fY) = -\sigma(fX) fY + \sigma(fY) fX$$

$$fT^{(4, 2)}(fX, Y) = f\sigma(fX) Y + \sigma(Y) hX$$

$$fT^{(4, 2)}(X, fY) = -\sigma(X) hY - \sigma(fY) fX.$$

En substituant ces égalités dans (3.4), on obtient

$$N^{(4,2)}(X, Y)=0 \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Des résultats similaires ont lieu pour les $f(4, -2)$-structures et pour les $f(5, 1)$-structures.

Proposition 3.4. *Si* $N^{(5,1)}=0$ *alors*:

$$vT^{(5,1)}(fX, fY)=0 \qquad hT^{(5,1)}(fX, fY)=T^{(5,1)}(fX, fY) \tag{3.5}$$

$$hT^{(5,1)}(X, vY)=-f^3 T^{(5,1)}(fX, vY) \tag{3.6}$$

$$vT^{(5,1)}(X, Y)+T^{(5,1)}(vX, vY)=vT^{(5,1)}(X, vY)+vT(vX, Y). \tag{3.7}$$

Proposition 3.5. *Si* $N^{(4,2)}=0$ *alors*:

$$vT^{(4,2)}(fX, fY)=0 \qquad hT^{(4,2)}(fX, fY)=T^{(4,2)}(fX, fY) \tag{3.8}$$

$$hT^{(4,2)}(X, vY)=-fT^{(4,2)}(fX, vY) \tag{3.9}$$

$$vT^{(4,2)}(X, Y)+T^{(4,2)}(vX, vY)=vT^{(4,2)}(X, vY)+vT^{(4,2)}(vX, Y). \tag{3.10}$$

Il nous intéresse la réciproque du Théorème 3.3. A cette fin il faut remarquer qu'on a

Théorème 3.6. *Si la $f(5, 1)$-structure est intégrable, alors il existe une $f(5, 1)$-connexion $\nabla^{(5,1)}$ dont la torsion $T^{(5,1)}$ possède la propriété $T^{(5,1)}(X, Y)=0$ pour chaque $X, Y \in \operatorname{Im} h$.*

Dém. Soit $\nabla^{(5,1)}$ une $f(5, 1)$-connexion ayant la torsion $T^{(5,1)}$ et $W \in \mathcal{T}^1_2(M)$ ayant la propriété

$$W_X Y - f^2 W_X f^2 Y = T^{(5,1)}(X, Y) \qquad X, Y \in \operatorname{Im} h.$$

Alors, la connexion linéaire $\bar{\nabla}^{(5,1)}$ donnée par

$$\bar{\nabla}^{(5,1)}_X = \nabla^{(5,1)}_X - A^{(5,1)}(W_X)$$

est une $f(5, 1)$-connexion et $\bar{\nabla}^{(5,1)}$ a la torsion $\bar{T}^{(5,1)}=0$.

En effet, de (3.8)-(3.10) on a

$$
\begin{aligned}
\bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) &= \bar{\nabla}^{(5,\,1)}_X Y - \bar{\nabla}^{(5,\,1)}_Y X - [X,\ Y] \qquad\qquad X,\ Y \in \operatorname{Im} h \\
&= \bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) - A^{(5,\,1)}(W_X)\,Y + A^{(5,\,1)}(W_Y)W \\
&= \bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) - \tfrac{1}{2}[W_X - W_X v - vW_X + 3vW_X v - f^2 W_X f^2]\,Y \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}[W_Y - W_Y v - vW_Y + 3vW_Y v]\,X \\
&= \bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) - \tfrac{1}{2}[W_X Y - W_Y X - f^2 W_X f^2 Y + f^2 W_Y f^2 X] \\
&= \bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) - \tfrac{1}{2}[\bar{T}^{(5,\,1)}(X,\ Y) - \bar{T}^{(5,\,1)}(Y,\ X)] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Des résultats similaires ont lieu pour les $f(4,\ \pm 2)$-structures.

Références

[1] P. M. Gadea and A. Cordero, *On integrability conditions of a structure f satisfying $f^4 \pm f^2 = 0$*, Tensor, N.S. **28** (1974), 78-82.

[2] F. Gouli and Andreou, *On integrability conditions of a structure f satisfying $f^5 + f = 0$*, Tensor, N.S. **40** (1983), 27-31.

[3] R. Miron et Gh. Atanasiu, *Sur les $(f,\ g)$-connexions linéaires et l'intégrabilité des $(f,\ g)$-structures*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, (78) **30** (1986).

Summary

In this paper f-connections defined on f-manifold are studied and some relations between the integrability of f-structures and f-connections are extablished.

***