Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 25-37

CORRADO SCARAVELLI (*)

Contrattività comune e teoremi di punto unito (**)

1 - Introduzione

Nell'affrontare teoremi di punto unito comune a due applicazioni f_1 ed f_2 di uno spazio metrico (o metrico generalizzato) completo in sè, una delle domande che ci si possono fare è quali e quante distanze del tipo

$$(1)\quad d(f_r(x_s),\ f_h(x_k)) \qquad r=1,\ 2;\quad s=3-r,\ 2;\quad h=1,\ r\wedge s;\quad k=1,\ r\wedge(3-h)$$

«sia conveniente» porre a primo membro, e quali e quante del tipo

$$(2)\qquad d(x_1,\ x_2),\ d(x_i,\ f_j(x_h)) \qquad i,\ j,\ h=1,\ 2$$

«sia conveniente» porre a secondo membro, della cosiddetta ipotesi di contrattività comune (per ipotesi di questo genere cfr., ad es., (2) e (9) di $[1]_2$, o (2) e (12) di $[1]_3$; oppure, per gli spazi metrici, il Teorema 1 di [4] e il Teorema 1 di [2]).

È noto, infatti (relativamente agli spazi metrici), che se a primo membro si lascia la sola distanza $d(f_1(x_1),\ f_2(x_2))$, si ottengono risultati interessanti, purché si pongano a secondo membro soltanto cinque, opportune, delle nove distanze (2); distanze che, per di più, o sono legate a coppie (una o due) in convenienti combinazioni lineari, o sono dotate di opportuni coefficienti numerici (cfr., ad es., il Teorema 1 di [4] assieme all'equivalenza fra (10) e (10)′ di $[1]_1$ per $\tau=1$, e il

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, via dell'Università 12, I-43100 Parma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei fondi 40% e 60%, per la ricerca, del M.P.I. Ricevuto: 1-X-1987.

Teorema 1 di [2]). E si badi che così facendo il quesito posto di Lj. B. Ćirić in [2] trova risposta negativa (come dimostra l'esempio 5 di [3]) (1).

Per cercare di migliorare in qualche modo i risultati noti, è sembrato interessante ed utile, in [1], seguire questa via: lasciare a primo membro il minor numero possibile delle sei distanze (1) (questo numero, per quanto osservato prima, sarà maggiore od uguale a due); e porre a secondo membro il maggior numero, delle nove distanze (2), compatibile con la scelta fatta per il primo membro (tale numero si vorrà che sia, in ogni caso, almeno sei).

Si è pertanto iniziata questa indagine (cfr. sempre [1]) *in spazi metrici generalizzati* $(E,\ d)$, chiamati H-spazi, nei quali l'applicazione $d\colon E\times E\to\Re^+$ verifica le seguenti proprietà

(a) $d(x_1,\ x_2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ per ogni $x_1,\ x_2\in E$

(b) $d(x_1,\ x_2)=d(x_2,\ x_1)$ per ogni $x_1,\ x_2\in E$

(c) esistono: un sottoinsieme A di $\Re^+$ contenente un intervallo $0\,\rule{0pt}{1ex}\!\!\sqsupset a$ $(a>0)$, una costante reale $\tau\geq 1$, e una funzione $\varphi\colon A\to\Re^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x_1,\ x_2,\ x_3\in E$, $d(x_1,\ x_2)\in A\Rightarrow d(x_1,\ x_3)\leq\varphi[d(x_1,\ x_2)]+\tau d(x_2,\ x_3)$ (proprietà triangolare generalizzata: p.t.g.) (2).

Si sono ottenuti vari risultati (3), fra i quali uno, particolarmente interessante, è dato dal Teorema 6 di $[1]_2$, dove a primo membro della cosiddetta *ipotesi di contrattività comune*, oltre alla solita distanza $d(f_1(x_1),\ f_2(x_2))$ c'è soltanto la distanza $d(f_1(x_1),\ f_1(x_2))$; e a secondo membro ci sono tutte e nove le distanze (2) (*non combinate fra loro*), ognuna delle quali ha al più un coefficiente $1/\tau$

---

(1) Il quesito posto da Ćirić alla fine del lavoro [2] è il seguente: se $(F,\ T)$ sono due applicazioni di uno spazio metrico M completo in sè soddisfacenti la condizione

$$(*)\qquad d(Fx,\ Ty)\leq q\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Fx),\ d(y,\ Ty),\ d(x,\ Ty),\ d(y,\ Fx)\}$$

per qualche $q<1$, F e T hanno un punto unito comune?

(2) È evidente che gli spazi metrici sono H-spazi particolari con $A\equiv\Re^+$, $\tau=1$, φ funzione identica. Inoltre in questi H-spazi (che sono spazi di Hausdorff) si possono introdurre e trattare come negli ordinari spazi metrici le nozioni topologiche e di completezza. Segnaliamo però che l'applicazione d in generale non è continua (cfr., ad es., $[1]_2$).

(3) Tali risultati (cfr. $[1]_4$) negli H-spazi sono pienamente validi con una certa ipotesi aggiuntiva; ma rimangono validi anche senza tale ipotesi aggiuntiva, purché sia $\tau=1$.

[che negli spazi metrici diventa 1: cfr. l'annotazione (2)]. Questo Teorema, può, fra l'altro, servire per dare una risposta affermativa alla domanda posta da Ćirić in [2], purché alla (*) dell'annotazione (1) si aggiunga l'ipotesi $d(Fx, Fy) \leqslant q \max\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Fx)\}$ (cfr. $[1]_2$, n. 4).

Altri risultati, quali i quattro dati dai Teoremi 1, 2, 3 e 4 di $[1]_3$ (4), possono sembrare meno soddisfacenti del precedente. Ma va precisato che a primo membro dell'*ipotesi di contrattività comune* si è lasciata la distanza $d(f_1(x_1), f_1(x_2))$, e sostituita la solita $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$ con la $d(f_1(x_2), f_2(x_2))$; tale scelta ha pertanto indotto a mettere nel secondo membro solamente sette (o sei) delle nove distanze (2), che, pur *non* essendo *combinate fra loro*, presentano qualche coefficiente dipendente da τ e dalla funzione $\psi\colon E \times E \to 0 \,\llcorner\!\urcorner\, 1$ così definita (cfr., ad es., (1) di $[1]_3$)

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{d(x_1, x_2)}{\varphi[d(x_1, x_2)]} & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \in A \setminus \{0\} \\ 1 & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \notin A \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{3}$$

Poiché però negli spazi metrici tali coefficienti sono uguali o ad 1 o ad 1/2, anche in questo caso i risultati si possono ritenere apprezzabili.

In questo lavoro, proseguendo (sempre negli H-spazi) quell'indagine, ho voluto mantenere a primo membro della *ipotesi di contrattività comune* le due distanze $d(f_1(x_1), f_1(x_2))$, $d(f_1(x_2), f_2(x_2))$ di $[1]_3$ ed imporre a secondo membro la presenza di tutte e nove le distanze (2).

Per fare questo ho però dovuto legare le otto distanze $d(x_i, f_j(x_h))$ $(i, j, h = 1, 2)$ a due a due in opportune combinazioni, con l'utilizzo della funzione ψ data da (3). Ho cioè preso in esame le due seguenti *ipotesi di contrattività comune*:

$$d(f_1(x_r), f_r(x_2)) \leqslant \alpha \max\{d(x_1, x_2), \lambda_{ij}(x_1, x_2)\, d(x_i, f_1(x_j)) \\ + \mu_{ij}(x_1, x_2)\, d(x_i, f_2(x_j)) : i, j = 1, 2\} \tag{4}$$

$$r = 1, 2 \qquad 0 \leqslant \alpha < 1 \qquad \lambda_{ij} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \tau + 1} \qquad \mu_{ij} = \frac{\psi(x_i, f_1(x_j))}{\tau^2 + \tau + 1} \qquad i, j = 1, 2,$$

---

(4) E tralascio, ad esempio, il Teorema 4 di $[1]_2$ che pure ha un suo interesse in quanto presenta, anche se con diverse considerazioni, tre delle sei distanze (1) a primo membro e le nove distanze (2) a secondo membro.

$$(4)' \qquad d(f_1(x_r),\ f_r(x_2)) \leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ x_2),\ \bar\lambda_{ij}(x_1,\ x_2)\, d(x_i,\ f_1(x_j))$$

$$+\bar\mu_{ij}(x_1,\ x_2)\, d(x_i,\ f_2(x_j)) : i,\ j=1,\ 2\}$$

$$r=1,\ 2 \qquad 0\leqslant\alpha<1 \qquad \bar\lambda_{11}=\lambda_{11} \qquad \bar\lambda_{12}=\lambda_{12} \qquad \bar\lambda_{21}=\lambda_{21} \qquad \bar\lambda_{22}=\lambda_{22}\psi(x_1\ f_1(x_2))$$

$$\bar\mu_{11}=\mu_{11} \qquad \bar\mu_{12}=\mu_{12} \qquad \bar\mu_{21}=\mu_{21} \qquad \bar\mu_{22}=\mu_{22}\psi(x_1,\ f_1(x_2))\,,$$

ottenendo con la prima un Lemma di convergenza (v. 2) e con la seconda un Teorema di punto unito (v. 3). Concludo poi con alcune osservazioni (v. 4).

2 - Un Lemma di convergenza

Si ha subito il seguente

Lemma. *Sia E completo; siano f_1, f_2: $E\to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli x_1, $x_2\in E$, valga la* (4) *e si abbia*

$$(5) \qquad d(x_1,\ f_1(x_2))\in A$$

$$(6) \qquad \sup\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) : i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}<+\infty \text{ (}^5\text{)}.$$

Allora per ogni $u_0\in E$ le successioni

$$(7) \qquad u_n=f_1(u_{n-1}) \qquad v_n=f_2(u_{n-1}) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

convergono (*in E*) *allo stesso limite.*

Dim. Farò la dimostrazione passando attraverso quattro successive affermazioni.

Prima affermazione. *Qualunque siano n, $p\in\mathfrak{N}$ si ha*

$$(8) \qquad \max\{d(u_{n+h-1},\ u_{n+i}),\ d(u_{n+i},\ v_{n+1}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\}$$

$$\leqslant\alpha\max\{d(u_{n+h-2},\ u_{n+i-1}),\ d(u_{n+i-1},\ v_{n+i-1}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p+1\}\,.$$

---

(5) Col simbolo f_1^i si intende f_1 composto i volte con se stesso (convenendo che sia $f_1^0(y)=y$).

Infatti se applichiamo la (4) al primo membro di (8) si ha [scrivendo, per brevità, rispettivamente λ e μ al posto di $\tau^2/(\tau^2+\tau+1)$ e $1/(\tau^2+\tau+1)$]

$$\max\{d(u_{n+h-1},\ u_{n+i}),\ d(u_{n+i},\ v_{n+i}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(u_{n+h-2},\ u_{n+i-1}),\quad \lambda d(u_{n+h-2},\ u_{n+h-1}) + \mu\psi(u_{n+h-2},\ u_{n+h-1})\, d(u_{n+h-2},$$

$$v_{n+h-1}),\quad \lambda d(u_{n+h-2},\ u_{n+i}) + \mu\psi(u_{n+h-2},\ u_{n+i})\, d(u_{n+h-2},\ v_{n+i}),\quad \lambda d(u_{n+i-1},$$

$$u_{n+h-1}) + \mu\psi(u_{n+i-1},\ u_{n+h-1})\, d(u_{n+i-1},\ v_{n+h-1}),\quad \lambda d(u_{n+i-1},\ u_{n+i}) + \mu\psi(u_{n+i-1},$$

$$u_{n+i})\, d(u_{n+i-1},\ v_{n+i}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\};$$

di qui, per la p.t.g. di (c) [6], per la definizione di ψ, e con banali maggiorazioni [7], si ottiene

$$\max\{d(u_{n+h-1},\ u_{n+i}),\ d(u_{n+i},\ v_{n+i}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(u_{n+h-2},\ u_{n+i-1}),\ d(u_{n+h-2},\ u_{n+h-1}),\ d(u_{n+h-1},\ v_{n+h-1}),\ d(u_{n+h-2},\ u_{n+i}),$$

$$d(u_{n+i},\ v_{n+i}),\ d(u_{n+i-1},\ u_{n+h-1}),\ d(u_{n+i-1},\ u_{n+i}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\}$$

da cui, eliminando (a secondo membro) i termini ripetuti, proprio la (8) per $n,\ p\in\mathfrak{N}$.

Seconda affermazione. *Qualunque siano $n\in\mathfrak{N}\cup\{0\}$ e $p\in\mathfrak{N}$ si ha*

$$\max\{d(u_{n+h-1},\ u_{n+i}),\ d(u_{n+i},\ v_{n+i}) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p\} \tag{9}$$

$$\leqslant \alpha^n \max\{d(u_{h-1},\ u_i),\ d(u_i,\ v_i) : 1\leqslant h,\ i\leqslant p+n\}.$$

Infatti fissati $n,\ p\in\mathfrak{N}$, scriviamo la (8) successivamente per le coppie di interi positivi $n,\ p$; $n-1,\ p+1$; $n-2,\ p+2$; ...; $1,\ p+n-1$; da queste n disuguaglian-

---

(6) Applicabile in quanto vale la (5).

(7) Si sfrutta qui sia il fatto che $\psi\leqslant 1$, sia la relazione

$$\tau^2 a + \tau b + c \leqslant (\tau^2+\tau+1)\max\{a,\ b,\ c\}\qquad (a,\ b,\ c\in\mathfrak{R}^+).$$

ze, e tenendo conto che la (9) è banalmente vera per $n=0$ (qualunque sia $p \in \mathfrak{N}$), si ha subito la (9) per $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p \in \mathfrak{N}$.

Terza affermazione. *Qualunque sia* $s \in \mathfrak{N}$ *si ha*

$$\max\{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i): 1 \leqslant h, i \leqslant s\} = \max\{d(u_0, u_i): 1 \leqslant i \leqslant s\}. \tag{10}$$

Infatti, per $s \geqslant 2$, scritto il primo membro della (10) nella forma

$$\max\{d(u_0, u_i): 1 \leqslant i \leqslant s\} \vee \max\{d(u_i, v_i): 1 \leqslant i \leqslant s\}$$

$$\vee \max\{d(u_{h-1}, u_1), d(u_1, v_1): 2 \leqslant h \leqslant s\}$$

$$\vee \max\{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i): 2 \leqslant h, i \leqslant s\}$$

osserviamo che

(a) $\max\{d(u_i, v_i): 1 \leqslant i \leqslant s\}$ viene maggiorato da $\alpha \max\{d(u_{i-1}, u_i): 1 \leqslant i \leqslant s\}$, come si dimostra subito per la (4), la p.t.g. di (c), la definizione di ψ, e con banali maggiorazioni (8); e, infine, eliminando, dal secondo membro della disuguaglianza cui così si perviene, i termini che non possono essere massimo (9);

(b) $\max\{d(u_{h-1}, u_1), d(u_1, v_1): 2 \leqslant h \leqslant s\}$ viene dapprima maggiorato da [cambiando h in $(h+1)$, applicando la (4) e scrivendo, sempre per brevità, λ e μ invece di $\tau^2/(\tau^2+\tau+1)$ e $1/(\tau^2+\tau+1)$]

$$\alpha \max\{d(u_{h-1}, u_0), \lambda d(u_{h-1}, u_h) + \mu\psi(u_{h-1}, u_h)\, d(u_{h-1}, v_h),$$

$$\lambda d(u_{h-1}, u_1) + \mu\psi(u_{h-1}, u_1)\, d(u_{h-1}, v_1), \lambda d(u_0, u_h)$$

$$+ \mu\psi(u_0, u_h)\, d(u_0, v_h), \lambda d(u_0, u_1) + \mu\psi(u_0, u_1)\, d(u_0, v_1): 1 \leqslant h \leqslant s-1\}$$

od anche, per la p.t.g. di (c), la definizione di ψ e banali disuguaglianze (cfr. l'annotazione (7)), da $\alpha \max\{d(u_{h-1}, u_0), d(u_{h-1}, u_h), d(u_h, v_h), d(u_{h-1}, u_1),$

(8) Cfr. l'annotazione (7).

(9) I termini che non possono essere massimo, qui come più avanti (e come del resto già altre volte in [1]), sono termini del secondo membro (dove compare α, che è <1) presenti anche al primo membro.

$d(u_1, v_1)$, $d(u_0, u_h)$, $d(u_0, u_1)$: $1 \leqslant h \leqslant s-1\}$, ed infine, eliminando i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo([10]), da

$$\alpha \max \{d(u_{h-1}, u_h), d(u_h, v_h) \colon 1 \leqslant h \leqslant s-1\} \vee \alpha \max \{d(u_0, u_h) \colon 1 \leqslant h \leqslant s-1\} ;$$

(c) $\max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 2 \leqslant h, i \leqslant s\}$ viene maggiorato da $\alpha \max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 1 \leqslant h, i \leqslant s\}$, come si deduce immediatamente da (9), dopo aver cambiato $(h-1)$ in h e i in $(i+1)$.

Pertanto, tenuto conto di (a), (b) e (c) avremo, per $s \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} &\max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 1 \leqslant h, i \leqslant s\} \\ &\leqslant \max \{d(u_0, u_i) \colon 1 \leqslant i \leqslant s\} \vee \alpha \max \{d(u_{i-1}, u_i) \colon 1 \leqslant i \leqslant s\} \\ &\vee \alpha \max \{d(u_{h-1}, u_h), d(u_h, v_h) \colon 1 \leqslant h \leqslant s-1\} \\ &\vee \alpha \max \{d(u_0, u_h) \colon 1 \leqslant h \leqslant s-1\} \\ &\vee \alpha \max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 1 \leqslant h, i \leqslant s\} \end{aligned}$$

da cui (ancora con la solita eliminazione a secondo membro dei termini che non possono essere massimo)

$$\max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 1 \leqslant h, i \leqslant s\} \leqslant \max \{d(u_0, u_i) \colon 1 \leqslant i \leqslant s\} ;$$

ma banalmente si ha anche

$$\max \{d(u_0, u_i) \colon 1 \leqslant i \leqslant s\} \leqslant \max \{d(u_{h-1}, u_i), d(u_i, v_i) \colon 1 \leqslant h, i \leqslant s\} ;$$

quindi abbiamo la (10) per $s \geqslant 2$. Per $s = 1$, la (10) [che diventa $\max \{d(u_0, u_1), d(u_1, v_1)\} = d(u_0, u_1)$] si ottiene subito osservando che, con gli stessi passaggi indicati in (a), $d(u_1, v_1)$ viene maggiorata da $\alpha d(u_0, u_1)$ con $\alpha < 1$.

In definitiva la (10) è dimostrata qualunque sia $s \in \mathfrak{N}$.

Quarta affermazione. *Esiste un* $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ *tale che, qualunque siano*

([10]) Cfr. l'annotazione ([9]).

$n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p \in \mathfrak{N}$, si ha

$$d(u_n,\ u_{n+p}) \vee d(u_{n+1},\ v_{n+1}) \leqslant \alpha^n \gamma\,. \tag{11}$$

Infatti da (9) e (10) si ricava

$$\max\{d(u_{n+h-1},\ u_{n+i}),\ d(u_{n+i},\ v_{n+i}) \colon 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}$$

$$\leqslant \alpha^n \sup\{d(u_0,\ u_i) \colon i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}\,;$$

da questa, posto $\gamma = \sup\{d(u_0,\ u_i) \colon i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$ [che appartiene ad $\mathfrak{N}^+$ per la (6)], si ottiene la (11) per $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p \in \mathfrak{N}$.

Ora da questa quarta affermazione si ha subito sia che la successione u_n ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$) è di Cauchy, e quindi che, per l'ipotesi di completezza, essa converge ad un $u_* \in E$; sia che $\lim\limits_{n \to +\infty} d(u_{n+1},\ v_{n+1}) = 0$. Poiché da un certo indice n in poi, per la p.t.g. di (c) (11) è $d(u_*,\ v_{n+1}) \leqslant \varphi[d(u_*,\ u_{n+1})] + \tau d(u_{n+1},\ v_{n+1})$, avremo che anche v_n converge ad u_*.

Il Lemma è così dimostrato.

3 - Un teorema di punto unito

Ora è facile arrivare al seguente

Teorema. *Sia E completo; siano $f_1,\ f_2 \colon E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1,\ x_2 \in E$, valgano* (4)′, (5), (6). *Allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.*

Dim. Essendo $\psi(x_1,\ f_1(x_2)) \leqslant 1$, (4)′ implica (4); fissato quindi $u_0 \in E$, le successioni (7) di punti di E, per il Lemma precedente, convergono (in E) allo stesso limite che abbiamo già chiamato u_*.

Applicando successivamente la (4)′, la p.t.g. di (c) (12), la definizione di ψ e le

---

(11) Applicabile in quanto da un certo indice n in poi è $d(u_*,\ u_{n+1}) < a$, e quindi $d(u_*,\ u_{n+1}) \in A$.

(12) Cfr. l'annotazione (6).

disuguaglianze di cui all'annotazione (7),

$$\max\{d(u_{n+1}, f_1(u_*)),\ d(f_1(u_*), f_2(u_*))\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(u_n, u_*),\ d(u_n, u_{n+1}),\ d(u_{n+1}, v_{n+1}),\ d(u_n, f_1(u_*)),\ d(f_1(u_*), f_2(u_*)),$$

$$d(u_*, u_{n+1}),\ (\tau^3 d(u_n, u_*) + d(u_n, f_1(u_*)) + \tau d(u_n, u_*))\}$$

da cui

$$(\lim_{n\to+\infty}{}'' \, d(u_{n+1}, f_1(u_*))) \vee d(f_1(u_*), f_2(u_*))$$

$$\leqslant \alpha (\lim_{n\to+\infty}{}'' \, d(u_n, f_1(u_*))) \vee \alpha d(f_1(u_*), f_2(u_*))$$

e quindi, essendo $\alpha < 1$,

$$(\lim_{n\to+\infty}{}'' \, d(u_{n+1}, f_1(u_*))) \vee d(f_1(u_*), f_2(u_*)) = 0 \qquad \text{cioè}$$

(12) $$\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+1}, f_1(u_*)) = 0 \qquad d(f_1(u_*), f_2(u_*)) = 0\,;$$

ma da un certo indice n in poi, per la p.t.g. di (c) (13), si ha

$$0 \leqslant d(u_*, f_1(u_*)) \leqslant \varphi(d(u_*, u_{n+1})) + \tau d(u_{n+1}, f_1(u_*))$$

che con una passaggio al limite (per $n \to +\infty$), dà subito $u_* = f_1(u_*)$: dunque u_* è punto unito per f_1.

Dalla seconda delle (12) si deduce allora che u_* è punto unito anche per f_2; pertanto u_* è punto unito comune ad f_1 ed f_2.

Se ora f_1 avesse un altro punto unito $z \in E$, si avrebbe (per la (4)$'$, la p.t.g. di (c) (14), la definizione di ψ e le disuguaglianze di cui alla annotazione (7))

$$\max\{d(z, u_*),\ d(z, f_2(z))\} = \max\{d(f_1(z), f_1(u_*)),\ d(f_1(z), f_2(z))\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(z, u_*),\ d(z, f_2(z))\}$$

pertanto dovrebbe essere $z = u_*$.

---

(13) Si confronti l'annotazione (11).

(14) Applicabile in quanto vale la (5).

Se poi f_2 avesse un altro punto unito $y \in E$, si avrebbe (per la (4)′ con $x_1 = x_2 = y$)

$$d(f_1(y),\ y) = d(f_1(y),\ f_2(y)) \leqslant \alpha d(f_1(y),\ y)$$

cioè y sarebbe unito anche per f_1; e allora dovrebbe essere $u_* = y$.

Quindi il punto unito u_* comune ad f_1 ed f_2 è unico, coincidente con l'unico punto unito che ognuna delle due funzioni ha.

4 - Osservazioni varie

4.1 - La (6), che, come si è visto, è servita per stabilire che la successione u_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ è di Cauchy, non appare deducibile dall'ipotesi di contrattività (4) (come si potrebbe vedere con considerazioni analoghe a quelle svolte in [1]$_4$). *Se però poniamo* $\tau = 1$ *tale* (6) *si deduce proprio dalla* (4). Infatti per la p.t.g. di (c) (con $\tau = 1$) [15], qualunque sia $n \in \mathfrak{N}$, si ha

$$\max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i = 1,\ 2,\ \dots,\ n\} \tag{13}$$

$$\leqslant \varphi(d(x_1,\ f_1(x_1))) + \max\{d(f_1(x_1),\ f_1^i(x_1) \colon i = 1,\ 2, \dots,\ n\}.$$

Ma per la (4) ancora, per la p.t.g. di (c), e per le relazioni di cui all'annotazione [7] si ha

$$\max\{d(f_1(x_1),\ f_1^i(x_1)),\ d(f_1^i(x_1),\ f_2(f_1^{i-1}(x_1))) \colon i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ f_1^{i-1}(x_1)),\ d(x_1,\ f_1(x_1)),\ d(f_1(x_1),\ f_2(x_1)),\ d(x_1,\ f_1^i(x_1)),\ d(f_1^i(x_1),$$

$$f_2(f_1^{i-1}(x_1)),\ d(f_1(x_1),\ f_1^{i-1}(x_1)),\ d(f_1^{i-1}(x_1),\ f_1^i(x_1)) \colon i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

od anche, eliminando i termini ripetuti e quelli che non possono essere

---

[15] Applicabile, qui come più sotto, per la (5).

massimo ([16]),

$$\max\{d(f_1(x_1),\ f_1^i(x_1)),\ d(f_1^i(x_1),\ f_2(f_1^{i-1}(x_1))) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)),\ d(f_1^{i-1}(x_1),\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

e quindi, essendo

$$\max\{d(f_1^{i-1}(x_1),\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\} \leqslant \max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$ ([17])

$$\max\{d(f_1(x_1),\ f_1^i(x_1)),\ d(f_1^i(x_1),\ f_2(f_1^{i-1}(x_1))) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

da cui anche

$$\max\{d(f_1(x_1),\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\} \tag{14}$$

$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}.$$

Dalla (13) e dalla (14) si ottiene infine

$$\max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

$$\leqslant \varphi(d(x_1,\ f_1(x_1))) + \alpha \max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$$

e quindi

$$\max\{d(x_1,\ f_1^i(x_1)) \colon i=1,\ 2,\ \dots,\ n\} \leqslant \frac{\varphi(d(x_1,\ f_1(x_1)))}{1-\alpha}$$

da cui, data l'arbitrarietà di $n \in \mathfrak{N}$, proprio la (6).

([16]) Cfr. l'annotazione ([9]).

([17]) Questa disuguaglianza deriva subito da (10), per la (7), e ponendo $u_0 = x_1$.

Pertanto, negli H-spazi, quando è $\tau = 1$, va tolta l'ipotesi (6) *dagli enunciati del Lemma e del Teorema.*

4.2 - Negli spazi metrici, poi, (dove è $\tau = 1$ e φ è la funzione identica), la (5) è banalmente verificata, la ψ è identica a 1, e la (4), coincidente con la (4)$'$, diventa

$$(4)'' \qquad d(f_1(x_r),\ f_r(x_2)) \leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ x_2),\ \frac{1}{3}d(x_i,\ f_1(x_j)) + \frac{1}{3}d(x_i,\ f_2(x_j)) : i,\ j = 1,\ 2\} \qquad (r = 1,\ 2 \quad 0 \leqslant \alpha < 1)$$

cosicché gli enunciati del Lemma e del Teorema, *negli spazi metrici*, diventano semplicemente

Lemma. *Sia E completo; siano f_1, f_2: $E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli x_1, $x_2 \in E$, valga la* (4)$''$. *Allora per ogni $u_0 \in E$ le successioni*

$$u_n = f_1(u_{n-1}) \qquad v_n = f_2(u_{n-1}) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

convergono in E allo stesso limite.

Teorema. *Sia E completo; siano f_1, f_2: $E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli x_1, $x_2 \in E$, valga la* (4)$''$. *Allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.*

E, in questa formulazione, dovrebbero rappresentare una novità anche negli spazi metrici.

4.3 - A questo punto ci si può chiedere se quello che qui si è trovato è un «buon risultato». La risposta è affermativa alla luce delle considerazioni fatte nell'Introduzione. Non c'è dubbio infatti che lo scopo di lasciare a secondo membro dell'ipotesi di contrattività comune il maggior numero delle nove distanze (2) è stato raggiunto: ci sono, addirittura, tutte e nove! I legami che poi compaiono in (4) e (4)$'$ non possono, probabilmente, essere resi più deboli, data la scelta fatta per il primo membro (e già più volte sottolineata).

Bibliografia

[1] P. Azzimondi e C. Scaravelli: $[\bullet]_1$ *Teoremi di punto unito per applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **15** (1983), 39-49; $[\bullet]_2$ *Sul punto unito comune a due applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 161-176; $[\bullet]_3$ *Teoremi di punto unito comune*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 111-121; $[\bullet]_4$ *Successioni di Cauchy e teoremi di punto unito negli H-spazi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 229-240

[2] Lj. B. Ćirić, *On common fixed points in uniform spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) (38) 24 (1978), 39-43.

[3] K. P. R. Sastry and S. V. R. Naidu, *Fixed point theorems for generalized contraction mappings*, Yokohama Math. J. 28 (1980), 15-29.

[4] C. S. Wong, *Fixed point theorems for generalized non-expansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 265-276.

Summary

A new common fixed point theorem for two mappings in H-spaces (which are particular generalized metric spaces) is given: the theorem is chiefly based on the following common contractivity hypothesis

$$d(f_1(x_r),\ f_r(x_2)) \leqslant \alpha \max\{d(x_1,\ x_2),\ \bar{\lambda}_{ij}(x_1,\ x_2)\, d(x_i,\ f_1(x_j)) + \bar{\mu}_{ij}(x_1,\ x_2)\, d(x_i,\ f_2(x_j)):\ i,\ j=1,\ 2\} \qquad (r=1,\ 2 \quad 0 \leqslant \alpha < 1)$$

where $\bar{\lambda}_{ij}$ and $\bar{\mu}_{ij}$ are suitable coefficients (equal to 1/3 in metric spaces).

* * *