Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 395-400

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Su una generalizzazione dei grafi T e sulla regolarità quasi-forte (**)

1 - Introduzione

In due miei recenti lavori $[1]_{1,2}$ mi sono occupato dei grafi $T(m)$ e $L(m)$ [2]; qui introduco dei grafi che naturalmente li generalizzano, studiandone alcune proprietà.

In 2 ci occuperemo dei grafi T generalizzati e in 3 dei grafi L generalizzati; in 4 poi segnaleremo alcuni problemi aperti relativi agli argomenti trattati.

2 - Grafi T generalizzati

È noto [2] che $T(m)$, $m \geqslant 4$, è fortemente regolare di parametri $n = m(m-1)/2$, $a = 2(m-2)$, $c = m-2$, $d = 4$ (cioè è di ordine n, è regolare di grado a ed il numero dei vertici adiacenti a due dati vertici è uguale a c se i vertici sono adiacenti, d in caso contrario).

Introduciamo, allora, la regolarità quasi-forte: un grafo G è *quasi-fortemente regolare* di parametri n, a e c se G è di ordine n, è regolare di grado a ed è costante (uguale a c) il numero dei vertici adiacenti a due dati vertici, se questi sono adiacenti.

Diciamo, poi, generalizzando secondo una direzione a mio parere abbastanza significativa, $T(k, h, m)$ (o, talvolta, genericamente, grafo T *generalizzato*,

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli», Facoltà di Ingegneria, Via Claudio 21, I-80125 Napoli.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 7-X-1987.

includendo questa generalizzazione e altre possibili, delle quali, però, qui, non faremo alcun cenno) un grafo avente per vertici i k-sottoinsiemi di un m-insieme S (detto di partenza), due vertici essendo adiacenti sse la cardinalità della loro intersezione è uguale a h $(0 \leq h < k < m,\ m \geq 2k)$ (1).

Risulta, ovviamente

$$T(m) = T(2,\ 1,\ m). \tag{1}$$

Un grafo $T(k,\ h,\ m)$ non è, in generale, fortemente regolare; si ha, invece, il seguente

Teorema 1. *I grafi $T(k,\ h,\ m)$ sono quasi-fortemente regolari di parametri n, a e c dati dalle formule*

$$n = \binom{m}{k} \qquad a = \binom{k}{h}\binom{m-k}{k-h} \tag{2}$$

$$c = \sum_{t=0}^{h} \binom{h}{t}\binom{k-h}{h-t}^2 \binom{m-2k+h}{k-2h+t} \tag{3}$$

con la convenzione che $\binom{r}{s} = 0$ *se* $s > r$ *oppure* $s < 0$.

Difatti, un vertice w è adiacente ad un vertice v se ha per elementi h elementi di v e $k-h$ elementi di $S-v$; la (2) segue, allora, osservando che o variando la scelta degli h elementi di v o quella dei $k-h$ elementi di $S-v$, si hanno vertici w distinti, e tenuto conto che è $|v| = k$ e $|S-v| = m-k$.

Siano, poi, v e v' due vertici adiacenti e sia $X = \{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_h\}$ l'insieme dei loro elementi comuni; un vertice w è adiacente ad entrambi se contiene i seguenti insiemi (disgiunti): (1) un t-sottoinsieme di X $(t = 0,\ 1,\ \dots,\ h)$; (2) un $(h-t)$-sottoinsieme di $v - X$; (3) un $(h-t)$-sottoinsieme di $v' - X$; (4) un $(k-(2h-t))$-sottoinsieme di $S - v \cup v'$; naturalmente, t deve essere tale che i suddetti sottoinsiemi esistano e cioè che non si abbia $h - t > |v - X| = |v' - X|$ oppure $k - 2h + t > |S - v \cup v'|$.

---

(1) L'ultima limitazione è introdotta solo per escludere casi banali ed è analoga all'altra $m \geq 4$; essa sarà tacitamente supposta in seguito, quando non esplicitamente richiamata.

Da ciò segue la (3), la convenzione giustificandosi per la possibilità di esistenza dei suddetti sottoinsiemi.

Dato, ora, un grafo $T(k, h, m)$, $m \geqslant 2k$, siano v e v' due suoi vertici; indicato con $c(M)$ il complementare, rispetto a S, di un sottoinsieme M di S si ha (de Morgan)

$$|v \cap v'| = t \Leftrightarrow |c(v) \cap c(v')| = m - 2k + t$$

essendo $|v \cup v'| = 2k - t$, per ogni t tale che $0 \leqslant t < k$. Da ciò segue che due vertici sono o non sono adiacenti in $T(k, h, m)$ sse i loro complementari sono o non sono adiacenti in $T(m-k, m-2k+h, m)$.

Si ha, perciò, il seguente

Teorema 2. *I grafi $T(k, h, m)$ e $T(m-k, m-2k+h, m)$ $(m \geqslant 2k)$ sono isomorfi.*

Il seguente teorema fornisce una decomposizione delle clique in grafi quasi-fortemente regolari.

Teorema 3. *Ogni clique $K_{\binom{m}{k}}$ è decomponibile in k grafi $T(k, i, m)$ con $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.*

Difatti, indicati, come è d'uso, con $V(G)$ e $S(G)$ gli insiemi dei vertici e degli spigoli, rispettivamente, d'un grafo G, si ha

$$S(T(k, i, m)) \cap S(T(k, j, m)) = \emptyset$$

per $i \neq j$, mentre è ovvio che è

$$V(T(k, i, m)) = V(T(k, j, m))$$

per ogni i e j.

Infine, due vertici di uno qualunque dei grafi $T(k, i, m)$ sono collegati da uno spigolo in uno (ed in uno solo) dei suddetti grafi. Il teorema segue.

3 - Grafi L generalizzati

È noto [2] che $L(m)$, $m > 1$, è fortemente regolare di parametri $n = m^k$, $a = 2(m-1)$, $c = m-2$, $d = 2$.

Diciamo, ora, generalizzando, grafo $L(k, h, m)$ o, generalmente, grafo L *generalizzato*, un grafo avente per vertici gli elementi di S^k (S insieme di partenza di cardinalità m, $m > 1$) e per spigoli quelle che uniscono vertici aventi h coordinate (si intende, dello stesso ordine) uguali.

Si ha, subito

$$L(2,\ 1,\ m) = L(m)\,. \tag{4}$$

Dimostriamo, ora, il seguente

Teorema 4. *I grafi $L(k, h, m)$ sono quasi-fortemente regolari di parametri n, a e c dati dalle formule*

$$n = m^k \qquad a = \binom{k}{h}(m-1)^{k-h}$$

$$c = \sum_{t=0}^{h} \binom{h}{t}\binom{k-h}{h-t}\binom{k-2h+t}{h-t}(m-1)^{h-t}(m-2)^{k-3h+2t} \tag{5}$$

con la convenzione che $\binom{r}{s} = 0$ se $s > r$ oppure $r < 0$.

Difatti, la prima delle (5) è ovvia; la seconda segue dall'osservare che un vertice w è adiacente ad un vertice v se ogni coordinata di w che non sia uguale alla coordinata di v dello stesso ordine appartiene all'insieme, di cardinalità $m-1$, che si ottiene da S togliendo la suddetta coordinata di v.

Se, poi, i due vertici v e v' sono adiacenti, siano $i_1, i_2, \ldots, i_h$ gli ordini delle loro coordinate uguali e $j_1, j_2, \ldots, j_{k-h}$ quelli delle loro coordinate distinte; un vertice w è adiacente ad entrambi i vertici v e v' se:

(i) t delle coordinate di ordine i, $0 \leqslant t \leqslant h$, sono uguali alle corrispondenti coordinate (uguali) di v e di v', mentre ognuna delle rimanenti $h-t$ coordinate di ordine i_s appartiene all'insieme, di cardinalità $m-1$, che si ottiene da S togliendo la corrispondente coordinata di v.

(ii) $h-t$ delle $k-h$ coordinate di orrdine j_s sono uguali alle corrispondenti coordinate di v e altre $h-t$ (di ordine j_s diverso da quello delle precedenti) sono uguali a $h-t$ delle corrispondenti $k-2h+t$ coordinate rimaste di v', mentre ognuna delle rimanenti $k-3h+2t$ coordinate di ordine j_s appartiene all'insieme, di cardinalità $m-2$, che si ottiene da S togliendo le due corrispondenti coordinate (distinte) dello stesso ordine, rispettivamente di v e di v'.

Dalle considerazioni precedenti segue la terza delle (5), insieme con la convenzione sui coefficienti binomiali; il teorema segue.

Il seguente teorema, la cui dimostrazione si ottiene come quella del Teorema 3 fornisce una nuova decomposizione delle clique in grafi quasi-fortemente regolari.

Teorema 5. *Ogni clique* K_{m^k} *è decomponibile in* k *grafi* $L(k, i, m)$, *con* $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

4 - Problemi aperti

Per chiudere, segnaliamo i seguenti problemi aperti che mi propongo di affrontare in lavori successivi:

(a_1) studiare il gruppo degli automorfismi dei grafi T e L generalizzati, analogamente a quanto è stato fatto in $[1]_2$ per i grafi T e L;

(a_2) trovare i numeri cromatici (semplici e generalizzati [3], [4]) dei grafi T e L generalizzati, analogamente a quanto è stato fatto in [1] per i grafi T e L;

(a_3) studiare le differenze tra le due decomposizioni di una stessa clique, di cui ai Teoremi 3 e 5, quando esse siano possibili e significative (per esempio, nel caso della clique $K_{36} = K_{\binom{9}{2}} = K_{6^2}$;

(a_4) stabilire se esistono decomposizioni di clique in grafi quasi fortemente regolari diverse da quelle trovate;

(a_5) caratterizzare, se esistono (come è probabile), grafi fortemente regolari o quasi fortemente regolari, di ordini opportuni, distinti dai grafi T e L semplici o generalizzati degli stessi ordini.

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI: $[\bullet]_1$ *Grafi T e L e loro valori cromatici*, Boll. Un. Mat. Ital. Alg. e Geom. (VI) IV-D (1985), 137-143; $[\bullet]_2$ *Sul gruppo degli automorfismi dei grafi T e L*, Dip. Mat. e Appl. «R. Caccioppoli», n. 13 (in corso di stampa).

[2] P. J. CAMERON and J. V. LINT, *Graphs, codes and designs*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 43, Cambridge Un. Press, 1980.

[3] F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley Pubbl. Comp., Reading, Mass., 1972.

[4] F. SPERANZA, *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** (1975), 53-62.

Summary

We introduce and study T and L generalized graphs and quasi-strongly regular graphs; after we find out two decompositions of a clique in quasi-strongly regular graphs.

***