Riv. Mat. Univ. Parma (4) 13 (1987), 379-384

EPIFANIO G. VIRGA (*)

Un'osservazione sui vincoli anolonomi non perfetti (**)

Introduzione

Nella Meccanica classica dei sistemi di punti materiali ha un ruolo rilevante l'ipotesi che i vincoli siano *perfetti*: cioè, tali da suscitare reazioni la cui potenza complessiva è nulla in ogni atto di moto virtuale. In questa ipotesi si deducono le equazioni pure di moto per i sistemi a vincoli olonomi (equazioni di Lagrange), e per i sistemi a vincoli anolonomi che dipendono linearmente dalle pseudovelocità (equazioni di Appell).

Se i vincoli anolonomi non sono lineari, l'ipotesi che siano perfetti non è, in generale, sufficiente a ricavare le equazioni pure di moto. In questa Nota si mostra come, per una classe particolare di vincoli anolonomi, una diversa ipotesi sulla potenza virtuale delle reazioni consenta di pervenire a equazioni pure che hanno la stessa forma delle equazioni di Appell. Un esempio illustra un'applicazione delle nuove equazioni.

1 – Consideriamo un sistema composto da N punti materiali, le cui masse indichiamo con μ_i $(i=1, \ldots, N)$. Denotiamo con $\boldsymbol{x}_i$ il posto occupato dal punto i-esimo nello spazio euclideo tridimensionale e con $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ la sua velocità. Supponiamo che il sistema sia soggetto a vincoli esprimibili nella forma seguente

(1) $\quad \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}_i(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ $\qquad$ (2) $\quad \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{v}_i(\nu_1, \ldots, \nu_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$

(*) Indirizzo: Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Pisa, Via Diotisalvi 2, I-56100 Pisa.
(**) Ricevuto: 7-IX-1987.

con $\boldsymbol{p}_i$ e $\boldsymbol{v}_i$ funzioni di classe C^1. Le funzioni $\boldsymbol{p}_i$ siano inoltre tali che la matrice $3N \times m$: $\boldsymbol{p}_{i\alpha} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}_i}{\partial \nu_\alpha}$ sia di rango m. I parametri ν_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ sono le usuali coordinate lagrangiane; η_β $(\beta = 1, \ldots, n)$ sono parametri accessori, le *pseudovelocità*. Rinunciamo a considerare funzioni $\boldsymbol{p}_i$ e $\boldsymbol{v}_i$ dipendenti esplicitamente dal tempo t solo per semplificare l'esposizione: i risultati che otterremo valgono anche per vincoli variabili nel tempo.

I vincoli (1) e (2) suscitano sul punto i-esimo la reazione $\boldsymbol{r}_i$. Nella terminologia del trattato di Levi-Civita e Amaldi [4] (v. p. 378) $\boldsymbol{r}_i$ è detta, più appropriatamente, *forza servomotrice*. Come le reazioni vincolari nella dinamica dei sistemi a vincoli olonomi, anche le forze $\boldsymbol{r}_i$ sono incognite; la loro eliminazione dalle equazioni di moto è, però, più ardua in questo contesto. In opportune ipotesi sulla natura delle forze servomotrici, si perviene ad equazioni pure del moto nei casi:

(i) che le funzioni $\boldsymbol{v}_i$ dipendano linearmente dalle η_β; (ii) che le $\boldsymbol{x}_i$ non siano vincolate, e le $\boldsymbol{v}_i$ dipendano soltanto dalle η_β.

Il primo caso è stato trattato nel 1899 da Appell [1]. Supponiamo che

$$\boldsymbol{v}_i(\nu_1, \ldots, \nu_m, \eta_1, \ldots, \eta_m) = \boldsymbol{a}_{i\beta}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\, \eta_\beta \tag{3}$$

con $\boldsymbol{a}_{i\beta}$ funzioni di classe C^1, e che le forze $\boldsymbol{r}_i$ *abbiano potenza nulla in ogni atto di moto virtuale*

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{a}_{i\beta}\, \hat{\eta}_\beta = 0 \qquad \text{per ogni } \hat{\eta}_\beta\,. \tag{4}$$

Sia $\boldsymbol{f}_i$ la forza attiva agente sulla particella i-esima. Le equazioni di moto del sistema sono

$$\mu_{(i)}\, \ddot{\boldsymbol{x}}_{(i)} = \boldsymbol{f}_{(i)} + \boldsymbol{r}_{(i)} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{5}$$

dove l'indice tra parentesi, anche se ripetuto, non implica somma. Nell'ipotesi che valga (4), dalle equazioni (5) si deducono (v. p. es. [5], pp. 147-149) le *equazioni di Appell*

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\eta}_\beta} = \psi_\beta\,. \tag{6}$$

$\mathcal{S}$, *l'energia delle accelerazioni* (o *funzione di Appell*), è definita da

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mu_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i . \tag{7}$$

È facile riconoscere che $\mathcal{S}$ è una funzione di ν_α, η_β ed $\dot{\eta}_\beta$, quadratica in queste ultime variabili. ψ_β, le *componenti generalizzate delle forze attive*, sono le quantità

$$\psi_\beta = \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{a}_{i\beta} . \tag{8}$$

Per la (3) e la (8), la potenza delle forze attive si esprime

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = \psi_\beta \eta_\beta . \tag{9}$$

Le equazioni di Appell e le condizioni di compatibilità tra i vincoli (1) e (2) costituiscono un sistema di $m+n$ equazioni differenziali del primo ordine che, nelle consuete ipotesi di regolarità, determinano le funzioni $t \mapsto \nu_\alpha(t)$ e $t \mapsto \eta_\beta(t)$, una volta assegnati i valori iniziali $\nu_\alpha(0)$ e $\nu_\beta(0)$ (v. ancora [5], loc. cit.).

Nel caso (ii) il sistema non è soggetto al vincolo (1) ed il vincolo (2) assume la forma particolare

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{b}_i(\eta_1, \ldots, \eta_n) \tag{10}$$

con $\boldsymbol{b}_i$ funzioni arbitrarie di classe C^1. Per effetto delle (10) l'accelerazione del punto i-esimo è

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{b}_{i\beta} \dot{\eta}_\beta \tag{11}$$

dove si è posto $\boldsymbol{b}_{i\beta} = \dfrac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial \eta_\beta}$.

Dalle (11) segue che

$$\boldsymbol{b}_{i\beta} = \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{x}}_i}{\partial \dot{\eta}_\beta} . \tag{12}$$

Deduciamo da (5) le equazioni pure di moto del sistema, nell'ipotesi che le forze servomotrici $\boldsymbol{r}_i$, anziché verificare (4), *abbiano potenza del secondo ordine* *uguale a zero in ogni atto di moto virtuale*

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{b}_{i\beta}\, \hat{\eta}_\beta = 0 \qquad \text{per ogni } \hat{\eta}_\beta\,. \tag{13}$$

Se poniamo

$$\chi_\beta = \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{b}_{i\beta} \tag{14}$$

la potenza del secondo ordine delle forze attive si scrive

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \chi_\beta\, \dot{\eta}_\beta\,. \tag{15}$$

Da (5), applicando (13), ricaviamo

$$(\mu_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{b}_{i\beta} - \chi_\beta)\, \hat{\eta}_\beta = 0 \qquad \text{per ogni } \hat{\eta}_\beta\,. \tag{16}$$

Tenuto conto della definizione di S (v. eq. (7)) e della (12), la (16), per l'arbitrarietà delle $\hat{\eta}_\beta$, dà le equazioni

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\eta}_\beta} = \chi_\beta\,. \tag{17}$$

Si noti che le equazioni (17) differiscono dalle equazioni di Appell (6) per il diverso significato meccanico delle grandezze al secondo membro (cfr. le eq. (9) e (15)).

2 – Mostriamo ora una semplice applicazione delle equazioni (17). Consideriamo nel campo di gravità il moto di un punto materiale di massa μ, soggetto al vincolo

$$\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = v^2 \tag{18}$$

con v una costante positiva assegnata. In un riferimento cartesiano ortogonale di versori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, la (18) ha la seguente rappresentazione parametrica

$$\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}_1 = v \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}_2 = v \sin\vartheta \sin\varphi \qquad \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = v \cos\vartheta \tag{19}$$

dove $\vartheta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$. Le (19) sono della forma (10), con $m = 2$, $\eta_1 = \vartheta$, $\eta_2 = \varphi$. Un semplice calcolo conduce a

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mu v^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) . \tag{20}$$

Da $(19)_3$ segue che la potenza del secondo ordine della forza attiva $\boldsymbol{f} = -\mu g \boldsymbol{e}_3$ è $\boldsymbol{f} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} = \mu g v \sin\vartheta\dot{\vartheta}$, così che, per (15), si ha $\chi_1 = \mu g v \sin\vartheta$ e $\chi_2 = 0$. Le equazioni (17) si scrivono

$$\dot{\vartheta} = \frac{g}{v} \sin\vartheta \qquad \sin^2\vartheta\dot{\varphi} = 0 . \tag{21}$$

Se per $t = 0$ poniamo $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ ed escludiamo i casi banali $\vartheta_0 = 0$ e $\vartheta_0 = \pi$, l'integrale di (21) è

$$\vartheta(t) = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2} e^{gt/v}) \qquad \varphi(t) \equiv \varphi_0 . \tag{22}$$

Assegnata la posizione iniziale del punto, da (22) e (19) si ricava la traiettoria. Per $(22)_2$, essa è piana; ha un asintoto verticale quando $t \to +\infty$, perché $\lim_{t\to+\infty} \vartheta(t) = \pi$.

Indicata con $\boldsymbol{r}$ la forza servomotrice agente sul punto, è semplice verificare che $\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \not\equiv 0$. Dunque il vincolo (18) non è perfetto, perché, in particolare, la potenza di $\boldsymbol{r}$ non è nulla nell'atto di moto effettivo.

3 – Tra i casi (i) e (ii) si colloca quello studiato recentemente da Benenti [2] (v. anche [3], Oss. (g)). Il sistema che egli considera è soggetto al vincolo (1); le coordinate e le velocità lagrangiane sono ulteriormente vincolate dalle equazioni

$$\lambda_j(\nu_1, \ldots, \nu_m, \dot{\nu}_1, \ldots, \dot{\nu}_m) = 0 \qquad j = 1, \ldots, p \tag{23}$$

con λ_j funzioni di classe C^1, omogenee di grado qualunque nelle variabili $\dot{\nu}_\alpha$ e tali che la matrice: $\lambda_{j\alpha} = \dfrac{\partial \lambda_j}{\partial \dot{\nu}_\alpha}$ abbia rango m. Benenti prova che le equazioni di moto

(5) hanno soluzione, nell'ipotesi che la potenza delle forze servomotrici $\boldsymbol{r}_i$ sia nulla nell'atto di moto effettivo del sistema, anziché in ogni atto di moto virtuale. Perciò egli chiama questi vincoli *perfettibili*, anziché perfetti. Si noti che il vincolo (18) dell'esempio precedente non è né perfetto né perfettibile.

L'Autore è grato a G. Capriz e a S. Benenti per alcune utili conversazioni sull'argomento di questa Nota.

Bibliografia

[1] P. APPELL, *Sur une forme nouvelle des équations de la dynamique*, C. R. Acad. Sci. Paris **121** (1899), 459-460.

[2] S. BENENTI, *Comunicazione privata*, settembre 1986.

[3] S. BENENTI e G. PIDELLO, *Sulla formulazione hamiltoniana della meccanica dei sistemi con vincoli non olonomi*, Atti Accad. Sc. Torino, Suppl. **120** (1986), 45-51.

[4] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale* (II), Zanichelli, Bologna, 1974 (ristampa anastatica).

[5] Ju. I. NEIMARK and N. A. FUFAEV, *Dynamics of nonholonomic systems*, American Mathematical Society, Providence, 1972.

Summary

This paper is concerned with systems of mass-points subject to anholonomic constraints whose reactive forces may do work in a virtual displacement. For a special class of such constraints, the differential equations which determine the motion of the system, independently of the reactive forces, are deduced.

***