Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 373-378

ADELE TORTORICI MACALUSO (*)

Generalizzazione di alcune disuguaglianze per la funzione gamma (**)

Introduzione

In letteratura si ha una ricca raccolta di risultati sulla funzione euleriana gamma. In questo lavoro si riprende lo studio del rapporto

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b)$$

per x reale positivo e vengono date delle limitazioni per difetto e per eccesso.

Gautschi nel 1959 [3] ha dimostrato che

$$(x+1)^{\mu-1} < \Gamma(x+\mu)/\Gamma(x+1) < x^{\mu-1}$$

dove x è intero positivo e $0 < \mu < 1$.

Nel caso di $\mu = 1/2$ Watson [6] ha fornito la limitazione

$$\Gamma(x+1/2)/\Gamma(x+1) > (x-1+4/\pi)^{-1/2}$$

con x reale, $x > 1$.

Recentemente in [4] viene ripreso tale studio sotto le ipotesi $a > 0$ $b = 1$ x reale non negativo.

In questa nota il rapporto in esame viene trattato nel caso a, b reali positivi.

Le limitazioni ottenute generalizzano casi particolari già noti.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Elettrica, V.le delle Scienze, I-90128 Palermo.

(**) Ricevuto: 19-VI-1987.

1 - Posizione del problema

Sia

$$f(x,\ a,\ b,\ c) = (x+c)^{(b-a)}\,\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) \tag{1}$$

con x variabile reale non negativa, a, b, c parametri reali a, $b > 0$. Nel seguito, in modo opportuno, verrà fissato c in funzione di a e di b.

Dallo sviluppo asintotico del rapporto $\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b)$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} x^{b-a}\,\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) = 1$$

e risulta immediatamente per ogni c

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\ a,\ b,\ c) = 1\,. \tag{2}$$

Dimostrerò che la funzione (1), a seconda della scelta dei parametri a, b, c è definitivamente maggiore o minore di 1. Precisamente, sussisteranno le seguenti diseguaglianze

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) > (x+c)^{(a-b)} \qquad x > x^0 \tag{3}$$

oppure

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) < (x+c)^{(a-b)} \qquad x > x^0 \tag{4}$$

per opportuni valori della costante c.

2 - Prime disuguaglianze

Considero la funzione

$$g(x) = f(x+1,\ a,\ b,\ c)/f(x,\ a,\ b,\ c) \tag{5}$$

ove a, b sono numeri positivi fissati, c è reale.

Sia $b > a$. Questa ipotesi non è restrittiva in quanto scambiando a con b il rapporto $\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b)$ si muta nel reciproco.

La funzione $g(x)$, per la (2), al divergere di x, tende ad 1. Applicando la nota relazione funzionale $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ la (5) può esprimersi come segue

$$g(x) = [(x+c+1)/(x+c)]^{b-a}(x+a)/(x+b) .$$

Risulta

$$g'(x) = (b-a)[1/(x+b)^2 - (x+a)/((x+b) \cdot (x+c)(x+c+1))][(x+c+1)/(x+c)]^{b-a} . \tag{6}$$

Per $x \geq 0$ ed $x > -c$, il segno della (6) è quello della seguente espressione

$$h(x,\ a,\ b,\ c) = c^2 + c - ab + (2c+1-a-b)x . \tag{7}$$

Se si pone $c' = (a+b-1)/2$, si ha che $h(x,\ a,\ b,\ c') = [(b-a)^2 - 1]/4$ è positiva se $(b-a) > 1$, negativa se $0 < (b-a) < 1$.

La funzione $g(x)$, considerata per $c = c'$ ed $x > x^0$ $[x^0 = \max(-c,\ 0)]$ risulta allora crescente se $(b-a) > 1$, decrescente se $0 < (b-a) < 1$.

Dall'essere $g(x)$ convergente ad 1 per x divergente, si ha per $x > x^0$

$$f(x+1,\ a,\ b,\ c')/f(x,\ a,\ b,\ c') < 1 \quad \text{se } b-a > 1 \tag{8}$$

$$f(x+1,\ a,\ b,\ c')/f(x,\ a,\ b,\ c') > 1 \quad \text{se } 0 < b-a < 1 . \tag{9}$$

Dalla (8) segue per $x > x^0$

$$f(x,\ a,\ b,\ c') > 1 \quad \text{se } b-a > 1 . \tag{10}$$

Infatti se, per assurdo, esistesse un $x' > x^0$ tale che

$$f(x',\ a,\ b,\ c') \leq 1$$

dalla (8) si avrebbe

$$\ldots < f(x'+2,\ a,\ b,\ c') < f(x'+1,\ a,\ b,\ c') < f(x',\ a,\ b,\ c') \leq 1$$

in contrasto con la relazione di limite (2).

Analogamente si dimostra che dalla (9) per $x > x^0$

$$f(x,\ a,\ b,\ c') < 1 \quad \text{se } 0 < b - a < 1 . \tag{11}$$

Restano dunque provate per $c' = (a + b - 1)/2$ le seguenti disuguaglianze

$$\Gamma(x + a)/\Gamma(x + b) > [x + (a + b - 1)/2]^{a-b} \quad \text{per } x > 0 \quad \text{se } b - a > 1 \tag{12}$$

$$\Gamma(x + a)/\Gamma(x + b) < [x + (a + b - 1)/2]^{a-b} \quad \text{per } x > 1/2 \quad \text{se } 0 < b - a < 1 . \tag{13}$$

La (12) e (13) generalizzano i risultati forniti in [4] per $b = 1$ che qui di seguito si riportano

$$\Gamma(x + a)/\Gamma(x + 1) < (x + a/2)^{a-1} \quad \text{per } x > 0 \quad \text{se } 0 < a < 1 \text{ ovvero } a > 2 \tag{14}$$

$$\Gamma(x + a)/\Gamma(x + 1) > (x + a/2)^{a-1} \quad \text{per } x > 0 \quad \text{se } 1 < a < 2 . \tag{15}$$

3 - Successive limitazioni

Riprendiamo la funzione $h(x,\ a,\ b,\ c)$ espressa dalla (7) che per $c \neq c' = (a + b - 1)/2$, $k = c^2 + c - ab$ assume la forma

$$h(x,\ a,\ b,\ c) = k + 2(c - c')x . \tag{7$'$}$$

Posto $$\bar{x} = -\,k/2(c - c')$$

si ha che, per $x > \bar{x}$, la funzione $h(x,\ a,\ b,\ c)$ è positiva se $c > c'$, negativa se $c < c'$.

Per quanto osservato in precedenza, si deduce che per $x > x^0$, $[x^0 = \max(\bar{x}, -c,\ 0)]$, la funzione $g(x)$ è crescente se $c > c'$, decrescente se $c < c'$.

Allora, procedendo in modo perfettamente analogo al caso precedente si ottengono per $x > x^0$

$$f(x,\ a,\ b,\ c) > 1 \quad \text{se } c > c' \qquad\qquad f(x,\ a,\ b,\ c) < 1 \quad \text{se } c < c' .$$

Ne segue che, fissati i parametri a, b, c, per $b > a > 0$, sussistono le seguenti generali limitazioni per $x > x^0$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) > (x+c)^{a-b} \quad \text{se } c > c' \tag{16}$$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) < (x+c)^{a-b} \quad \text{se } c < c' . \tag{17}$$

4 - Limitazioni ottenute per particolari valori di c

Per $a = \mu < 1$, $b = 1$, $c = b$, dalla (16) si ha la limitazione per difetto dovuta a Gautschi; se $c = 0$, dalla (17) invece si ottiene la limitazione per eccesso.

Per $a = 1/2$, $b = 1$, $c = -1 + 4/\pi$, dalla (16) si ha la limitazione di Watson.

Se si pone $c = a$ dalla (16) e dalla (17) si ottengono rispettivamente le seguenti limitazioni per $x > 0$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) > (x+a)^{a-b} \quad \text{se } 0 < b-a < 1 \tag{18}$$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) < (x+a)^{a-b} \quad \text{se } b-a > 1 \quad . \tag{19}$$

Se si pone $c = b - 1$, dalla (16) e dalla (17) si ottengono rispettivamente

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) > (x+b-1)^{a-b} \quad \text{per } x > 0 \quad \text{se } b-a > 1 \tag{20}$$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) < (x+b-1)^{a-b} \tag{21}$$

per $x > 1 - b$ se $b < 1$ e $0 < b - a < 1$, per $x > 0$ se $b > 1$ e $0 < b - a < 1$.

Nella (7)′ risulta $k = 0$ per $c = [-1 \pm (1+4ab)^{1/2}]/2$.

Trascurando il valore negativo di c che non offre particolare interesse, dalla (16) e (17) risulta per $x > 0$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) > \{x + [-1 + (1+4ab)^{1/2}]/2\}^{a-b} \quad \text{se } 0 < b-a < 1 \tag{22}$$

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) < \{x + [-1 + (1+4ab)^{1/2}]/2\}^{a-b} \quad \text{se } b-a > 1 . \tag{23}$$

Si osserva, che la (13) e la (22) sono più restrittive rispettivamente della (21) e della (18), risulta pertanto

$$\{x + [-1 + (1 + 4ab)^{1/2}]/2\}^{a-b} < \Gamma(x + a)/\Gamma(x + b) < [x + (a + b - 1)/2]^{a-b} \tag{24}$$

per $x > 1/2$ se $0 < b - a < 1$.

Analogamente la (12) e la (23) sono più restrittive rispettivamente della (20) e della (19), risulta

$$[x + (a + b - 1)/2]^{a-b} < \Gamma(x + a)/\Gamma(x + b) < \{x + [-1 + (1 + 4ab)^{1/2}]/2\}^{a-b} \tag{25}$$

per $x > 0$ se $b - a > 1$.

Bibliografia

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (Editors), *Handbook of Mathematical Functions*, Appl. Math. Series **55**, National Bureau of Standards, Washington, D.C. (1964).

[2] L. Gatteschi, *Funzioni speciali*, UTET, Torino, 1973.

[3] W. Gautschi, *Some elementary inequalities relating to the gamma and incomplete gamma function*, J. Math. Phys. 38 (1959), 77-81.

[4] A. Laforgia, *Further inequalities for the gamma function*, Math. Comp. **42** (1984), 597-600

[5] F. W. G. Olver, *Asymptotic and special functions*, Academic Press, New York and London, 1974.

[6] G. N. Watson, *A note on gamma function*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **11** (1958), 7-9.

Summary

We present some asymptotic inequalities for the function $\Gamma(x + a)/\Gamma(x + b)$, with the usual notation for the gamma function, where a and b are real positive indipendent parameters. Some examples are also given which improve well-known inequalities.

***