

S. FANELLI e A. GHIRALDINI (*)

Sui grafi planari massimali hamiltoniani (**)

1 - Introduzione

Le analisi sull'esistenza e sulla connettività di grafi planari semplici massimali (g.p.s.m.) sono state oggetto di ripetute indagini in letteratura. Per un classico risultato di Whitney [11] l'esistenza di un circuito hamiltoniano è sicuramente garantita in g.p.s.m. 4-connessi; la ricerca di circuiti hamiltoniani, com'è noto, riveste un'enorme importanza nella teoria dei grafi ed è stata affrontata prevalentemente in letteratura in chiave «duale», ossia nel caso dei grafi cubici (v. [1], [8], [10]).

Si indichino con $F_{n,k}$ le classi di g.p.s.m. aventi k vertici di grado 5 ed $n - k$ vertici di grado maggiore di 5 e con $H_{n,k',k''}$ le classi di g.p.s.m. aventi k'' vertici di grado 4, k' vertici di grado 5 ed $n - (k' + k'')$ vertici di grado maggiore di 5.

È ben noto dalla formula di Eulero [7] e per un classico risultato di Grünbaum [5] che risulta $12 \leq k < n - 1$.

Etorneau ha in [2] provato la 5-connessità delle classi $F_{n,12}$. Hakimi e Schmeichel in [6] hanno generalizzato il predetto risultato, determinando condizioni sufficienti per la 4 o per la 5-connessità di sottoinsiemi di classi $H_{n,k',k''}$.

Fanelli in [3]₁ ha ulteriormente affinato i risultati di Hakimi e Schmeichel nel caso delle $F_{n,k}$, fornendo opportune condizioni sulla struttura dei vertici all'interno di circuiti di articolazione di lunghezza 4 o 5.

Nel presente lavoro si sono approfonditi i teoremi di Hakimi e Schmeichel nel caso delle classi $H_{n,k',k''}$ con riferimento, naturalmente, alla sola connettività 4.

(*) Indirizzo degli AA.: S. FANELLI, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma «Tor Vergata», I-00173 Roma; A. GHIRALDINI, Università dell'Aquila, I-67100 L'Aquila.

(**) Ricevuto: 22-VI-1987.

Tale indagine originale ha richiesto la preventiva dimostrazione dell'esistenza dei grafi nelle predette classi e quindi un'analisi spinta, effettuata sfruttando, oltre a tecniche «standard» di tipo geometrico, alcuni risultati numerici dedotti con mezzi informatici sviluppati in [3]₂ ed in [4]. L'esistenza e la connettività 4 di grafi nelle classi $H_{n,k',k''}$ garantisce l'hamiltonianeità dei grafi suddetti e consente l'estensione dei risultati noti in letteratura. In questo lavoro si sono caratterizzati i g.p.s.m. hamiltoniani nelle classi $H_{n,k',k''}$ di grado massimo 8.

2 - Alcuni risultati preliminari sui grafi planari massimali hamiltoniani

In questo lavoro faremo uso di varie definizioni e concetti standard della teoria classica (v. [7], [9]) che, per brevità, ometteremo di richiamare.

Si indichi con $d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, \dots, d_p^{k_p}$ la sequenza dei gradi dei vertici di un grafo non orientato semplice, G_n ad n vertici, avente k_1 vertici di grado d_1 , k_2 vertici di grado d_2 , ..., k_p , vertici di grado d_p , con $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ e $d_1 > d_2 > \dots > d_p$.

Def. 2.1. Una sequenza $s = d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, \dots, d_p^{k_p}$ è detta *euleriana massimale* (s.e.m.) se risulta

$$\sum_{j=1}^p d_j k_j = 6n - 12 .$$

Def. 2.2. Un grafo G_n dicesi *massimale* se la sequenza dei gradi dei vertici di G_n è una s.e.m.

Sia X l'insieme dei vertici che induce un circuito di articolazione in G_n . Si indichi con:

$I(X)$ ($E(X)$) il sottografo G_n costituito dai vertici di G_n contenuti nell'interno (nell'esterno) del circuito;

$\omega_i(k)$ ($\omega_e(k)$) il numero dei vertici di grado k contenuti in $I(X)$ (in $E(X)$);

$d_i(x_j)$ ($d_e(x_j)$) il numero dei vertici contenuti in $I(X)$ (in $E(X)$) adiacenti ad $x_j \in X$;

C3 un circuito di articolazione di lunghezza 3 e C4 un circuito di articolazione di lunghezza 4.

Ovviamente, tutti i risultati che verranno provati per $I(X)$, $\omega_i(k)$, $d_i(x_j)$ possono essere applicati ad $E(X)$, $\omega_e(k)$, $d_e(x_j)$, considerando i vertici di G_n non contenuti in $X \cup I(X)$.

Def. 2.3. Un grafo G_n dicesi *hamiltoniano* se contiene un circuito hamiltoniano.

È ben noto il seguente

Teorema 2.1 (v. [11]). Se $G_n \in H_{n,k,k'}$ risulta 4-connesso allora è hamiltoniano.

Hakimi e Schmeichel in [6], hanno provato un teorema che fornisce tramite i gradi dei vertici una condizione sufficiente affinché un g.p.s.m. G_n sia 4 o 5-connesso. Tale risultato può essere così enunciato:

Teorema 2.2 (v. [6], pag. 308). Sia G_n un g.p.s.m. con sequenza dei gradi $d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, \dots, d_p^{k_p}$ con $d_p \geq 4$. Se una delle seguenti condizioni è soddisfatta

$$(a) \quad d_p = 4 \quad d_{p-1} = 5 \quad 7/3 k_p + k_{p-1} < 14$$

$$(b) \quad d_p = 4 \quad d_{p-1} = 6 \quad 7/3 k_p < 14$$

$$(c) \quad d_p = 5 \quad k_p < 14$$

allora G_n è hamiltoniano.

Il Teorema 2.2 ha richiesto la preventiva dimostrazione dei seguenti Lemmi.

Lemma 2.1 (v. [6], Lemma 2). Sia $G_n \in F_{n,k}$. Se G_n contiene un C4 indotto dall'insieme dei vertici $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, allora $\omega_i(5) \geq 7$.

Lemma 2.2 (v. [6] Lemma 1). Sia $G_n \in H_{n,k',k''}$. Se G_n contiene un C3 indotto dall'insieme dei vertici $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, risulta:

$$(i) \quad \omega_i(4) = 0 \rightarrow \omega_i(5) \geq 7$$

$$(ii) \quad \omega_i(4) = 1 \rightarrow \omega_i(5) \geq 5$$

$$(iii) \quad \omega_i(4) = 2 \rightarrow \omega_i(5) \geq 3.$$

Lemma 2.3. Siano soddisfatte le ipotesi assunte nel Lemma 2.2. Si supponga

inoltre che in G_n non esista un C3 indotto da un insieme di vertici $X' \subset X \cup I(X)$.
Si ha allora

$$d_i(x_j) \geq 2 \quad (j = 1, 2, 3) \quad \exists j: d_i(x_j) \geq 3 .$$

Fanelli in [3]₁, approfondendo nel caso dei $G_n \in F_{n,k}$ i risultati del Teorema 2.2, è pervenuto al seguente

Teorema 2.3 (v. [3]₁, Corollario 3.1). Sia $G_n \in F_{n,k}$, con $14 \leq k \leq 18$. Si considerino le seguenti ipotesi:

$$(a) \quad k = 14 \quad 16 \leq n \leq 32 \quad n \neq 17$$

$$(b) \quad k = 15 \quad 19 \leq n \leq 28$$

$$(c) \quad k = 16 \quad 18 \leq n \leq 24$$

$$(d) \quad k = 17 \quad 21 \leq n \leq 22$$

$$(e) \quad k = 18 \quad n = 20.$$

Se una qualunque delle condizioni (a) ... (e) è verificata, allora G_n è hamiltoniano.

Il Teorema 2.3 ha richiesto la preventiva dimostrazione di due Lemmi che, al pari dei già enunciati Lemmi 2.1, 2.2, 2.3, svolgeranno un ruolo essenziale nelle dimostrazioni del presente lavoro e che quindi debbono essere richiamati.

Lemma 2.4 (v. [3]₁, Lemma 3.1). Sia $G_n \in F_{n,k}$. Se G_n contiene un C3 indotto dall'insieme dei vertici $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, risulta

$$\sum_{j=1}^3 d_i(x_j) = \omega_i(5) - \sum_{h=7}^{d_1} (h-6) \omega_i(h)$$

dove d_1 indica il grado massimo dei vertici di $I(X)$.

Lemma 2.5 (v. [3]₁, Lemma 3.3). Si suppongano verificate le ipotesi del Lemma 2.4.

Si assuma inoltre che in G_n non esista un C3 indotto da un $X' \subset X \cup I(X)$.
Risulta allora

$$(i) \quad \omega_i(5) = 7 \rightarrow \omega_i(6) \geq 8 \quad \omega_i(h) = 0 \quad \forall h \geq 7$$

$$(ii) \quad \omega_i(5) = 8 \rightarrow \omega_i(6) \geq 3 \quad \omega_i(7) \leq 1 \quad \omega_i(h) = 0 \quad \forall h \geq 8.$$

3 - Hamiltonianeità nelle classi $H_{n,k',k''}$

Per estendere nel caso dei $G_n \in H_{n,k',k''}$ i risultati del Teorema 2.2, dimostriamo due Lemmi, che consentono di determinare il minimo numero di vertici presenti nell'interno (o equivalentemente nell'esterno) di un C3 contenuto in un G_n non soddisfacente le ipotesi (a) o (b) di cui al Teorema 2.2.

Nell'ambito dei $G_n \in H_{n,k',k''}$, così come nel caso dei $G_n \in F_{n,k}$, un ruolo fondamentale è svolto dai vertici di grado 6.

Lemma 3.1. *Sia $G_n \in H_{n,k',k''}$ avente connettività 3. Sia $C3 \subset G_n$. Risulta allora*

- (i) $\omega_i(4) = 3 \rightarrow \exists G_n: \quad \forall k \geq 5 \quad \omega_i(k) = 0$
 (ii) $\omega_i(4) = 2 \rightarrow \exists G_n: \quad \forall k \geq 6 \quad \omega_i(5) = 3 \wedge \omega_i(k) = 0$

Dim. Nelle Fig. 1 e 2 sono rappresentate rispettivamente le due strutture di cui in (i) ed in (ii) all'interno del C3 in G_n .

Lemma 3.2. *Sia $G_n \in H_{n,k',k''}$ avente connettività 3. Sia $C3 \subset G_n$ indotto da un insieme $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Si supponga inoltre che non esista un C3' indotto da un $X' \subset X \cup I(X)$. Risulta allora*

- (i) $\omega_i(4) = 1 \quad \omega_i(5) = 6 \rightarrow \exists G_n: \quad \omega_i(k) = 0 \quad \forall k \geq 6$
 (ii) $\omega_i(4) = 1 \quad \omega_i(5) = 5 \rightarrow \omega_i(6) \geq 3 \quad \omega_i(k) = 0 \quad \forall k \geq 7$

Dim. Nel caso (i), la Fig. 3 illustra la struttura all'interno del C3 in G_n di cui alla tesi.

Nel caso (ii), sia $G_{n'}$ il g.p.s.m. indotto da $X \cup I(X)$.

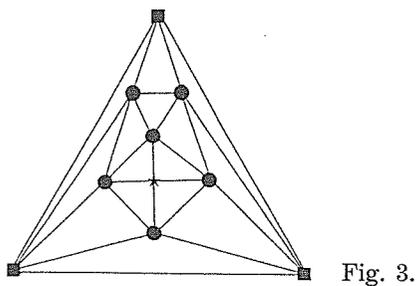
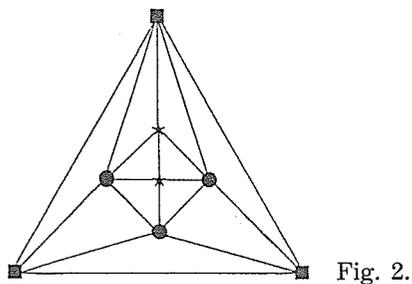
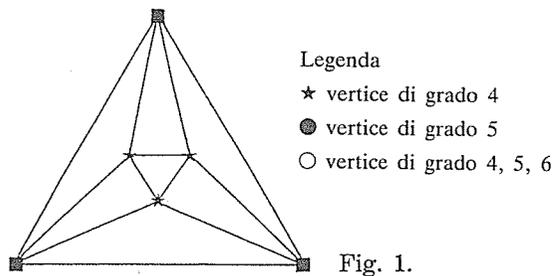
Si indichi con $(d_1, d_2, \dots, d_{n'})$ la sequenza dei gradi dei vertici di $G_{n'}$.

Dimostriamo dapprima che

$$(3.2.1) \quad \omega_i(k) = 0 \quad \forall k \geq 7 .$$

Essendo $G_{n'}$ un g.p.s.m. risulta

$$(3.2.2) \quad \sum_{s=1}^{n'} d_s = 6n' - 12 .$$



Per le ipotesi assunte la (3.2.2) si può riscrivere come

$$(3.2.3) \quad \sum_{s=1}^{n'-3} d_s + \sum_{j=1}^3 \{d_i(x_j) + 2\} = 6n' - 12.$$

In virtù del Lemma 2.3 si ha

$$(3.2.4) \quad 6n' - 12 \geq 13 + \sum_{s=1}^{n'-3} d_s$$

e quindi, se si assumesse per assurdo l'esistenza di almeno un vertice di grado

non inferiore a 7 in $I(X)$, la (3.2.4) condurrebbe alla disequazione

$$(3.2.5) \quad 6n' - 12 \geq 13 + 25 + 4 + 7 + 6(n' - 10) = 6n' - 11 .$$

Proviamo ora che

$$(3.2.6) \quad \sum_{j=1}^3 d_i(x_j) = 7 .$$

In virtù di quanto provato nella (3.2.1), in $I(X)$ son presenti $n' - 9$ vertici di grado 6, 5 vertici di grado 5 ed 1 vertice di grado 4. Si ha dunque

$$(3.2.7) \quad \sum_{s=1}^{n'-3} d_s = 6(n' - 9) + 29 = 6n' - 25 .$$

Pertanto, se non fosse soddisfatta la (3.2.6), risulterebbe dalla (3.2.3) e per il Lemma 2.3

$$(3.2.8) \quad \sum_{s=1}^{n'-3} d_s = 6n' - 18 - \sum_{j=1}^3 d_i(x_j) < 6n' - 25 .$$

Dimostriamo infine

$$(3.2.9) \quad \omega_i(6) \geq 3 .$$

In base alle già provate (3.2.1) e (3.2.6) si ha (v. Fig. 4)

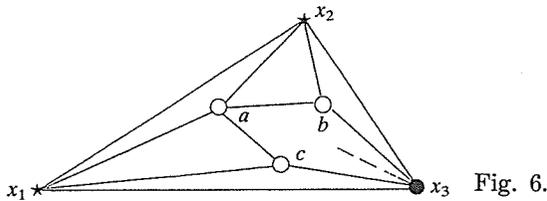
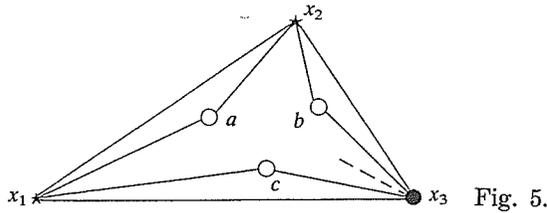
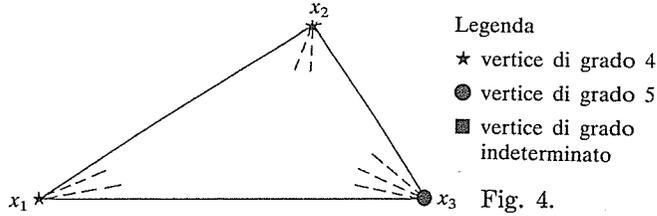
$$G_{n'} \equiv 6^{n'-9} 5^6 4^3 \quad n' \geq 9 .$$

Per provare la (3.2.9) basterà verificare che per $n' = 9, 10, 11$ non esistono grafi $G_{n'}$ aventi la configurazione indicata.

Nell'interno del C3 indotto da $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ debbono esistere tre vertici a, b, c *distinti* come in Fig. 5.

I vertici x_1 e x_2 risultano così saturi; è possibile quindi tracciare gli archi (a, b) e (a, c) , formando il circuito quadrangolare (a, b, x_3, c) come in Fig. 6. Tale circuito deve essere un C4.

Infatti, se esistesse la corda interna (b, c) , $\{b, c, x_3\}$ risulterebbe essere un C3 contenuto in $\{x_1, x_2, x_3\}$ contro l'ipotesi. Ad analoga conclusione si perviene nel caso di esistenza della corda (a, x_3) . Dunque $\{a, b, x_3, c\}$ è un C4.



Si indichi d'ora in poi con $\rho(v)$ il grado del vertice v . Si ha $\rho(a), \rho(b), \rho(c) \geq 5$.

Se si assumesse infatti $\rho(a) = 4$, dovrebbe esistere l'arco (b, c) e quindi $\{b, c, x_3\}$ risulterebbe un C3 contenuto in $\{x_1, x_2, x_3\}$. D'altra parte, se si assumesse $\rho(b)$ o $\rho(c) = 4$, nel C4 $\{a, b, x_3, c\}$ sarebbero contenuti vertici di grado 5 in numero inferiore a 7 contro il Lemma 2.1.

Si supponga ora per assurdo: $n' = 9, 10, 11$. Esaminiamo i tre casi separatamente.

Caso $n' = 9$. $G_9 \equiv 5^6 4^3 \rightarrow \rho(a) = \rho(b) = \rho(c) = 5$.

All'interno del C4 $\{a, b, x_3, c\}$ sarebbero contenuti 2 vertici di grado 5 ed un vertice di grado 4; unendo esternamente al C4 due vertici non consecutivi del circuito stesso si otterrebbe un C3 contenente 1 vertice di grado 4 e 3 vertici di grado 5 in contrasto con il Lemma 2.2 (ii).

Caso $n' = 10$. $G_{10} \equiv 6^1 5^6 4^3 \rightarrow$ al più un vertice fra a, b, c di grado 6.

All'interno del C4 $\{a, b, x_3, c\}$ sarebbero contenuti un vertice di grado 4 ed al più 3 vertici di grado 5; unendo esternamente al C4 due qualsiasi vertici non consecutivi del circuito stesso, si costruirebbe un C3 contenente una configurazione ancora incompatibile con il Lemma 2.2 (ii).

Caso $n' = 11$. $G_{11} \equiv 6^2 5^6 4^3 \rightarrow$ al più due vertici fra a, b, c di grado 6.

All'interno del C4 sarebbero contenuti 1 vertice di grado 4 ed al più 4 vertici di grado 5. Se al più 1 fra i vertici a, b, c ha grado 6, si ricade nei casi precedenti; se, invece, esattamente 2 fra i vertici a, b, c avessero grado 6, unendo esternamente al C4 due vertici non consecutivi ed adiacenti ad un vertice di grado 6, si otterrebbe ancora una volta una configurazione incompatibile con il Lemma 2.2 (ii). Dunque, la (3.2.9) risulta provata.

Prima di dimostrare il Teorema di hamiltonianeità, che costituisce il risultato fondamentale del presente lavoro, enunciamo il seguente teorema di esistenza provato in [3]₂ e [4].

Teorema 3.1. Le seguenti classi di grafi $G_n \in H_{n, k', k''}$ sono non vuote:

- | | |
|---|---|
| (a) $6^{n-7} 5^2 4^5, n \geq 7, n \neq 8;$ | (b) $7^1 6^{n-9} 5^3 4^5, n = 10;$ |
| (c) $6^{n-8} 5^4 4^4, n \geq 8;$ | (d) $7^1 6^{n-10} 5^5 4^4, 11 \leq n \leq 14;$ |
| (e) $8^1 6^{n-11} 5^6 4^4, n = 12;$ | (f) $7^2 6^{n-12} 5^6 4^4, n = 12;$ |
| (g) $6^{n-9} 5^6 4^3, n \geq 9;$ | (h) $7^1 6^{n-11} 5^7 4^3, 12 \leq n \leq 20;$ |
| (i) $8^1 6^{n-12} 5^8 4^3, 14 \leq n \leq 16;$ | (l) $7^2 6^{n-13} 5^8 4^3, 13 \leq n \leq 16;$ |
| (m) $8^1 7^1 6^{n-14} 5^9 4^3, n = 14;$ | (n) $6^{n-10} 5^8 4^2, n \geq 10;$ |
| (o) $7^1 6^{n-12} 5^9 4^2, 13 \leq n \leq 25;$ | (p) $8^1 6^{n-13} 5^{10} 4^2, 15 \leq n \leq 20;$ |
| (q) $7^2 6^{n-14} 5^{10} 4^2, 14 \leq n \leq 20;$ | (r) $8^1 7^1 6^{n-15} 5^{11} 4^2, 15 \leq n \leq 18;$ |
| (s) $6^{n-11} 5^{10} 4^1, n \geq 13;$ | (t) $7^2 6^{n-15} 5^{12} 4^1, 16 \leq n \leq 26;$ |
| (u) $7^3 6^{n-17} 5^{13} 4^1, 17 \leq n \leq 22.$ | |

Inoltre si congettura la planarità delle seguenti s.e.m.

$$7^1 6^{n-12} 5^9 4^2 \quad n \geq 26 \qquad 7^1 6^{n-13} 5^{11} 4^1 \quad n \geq 15$$

e la non planarità delle seguenti s.e.m.

$$8^1 6^{n-12} 5^8 4^3 \quad n = 13 \qquad 8^1 6^{n-13} 5^{10} 4^2 \quad n = 14$$

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema 3.2. *Sia $G_n \in H_{n,k',k''}$. Se G_n appartiene ad una qualunque delle classi (a), ..., (u) di cui al Teorema 3.1, allora G_n è hamiltoniano.*

Dim. In virtù del Teorema 3.1 $\exists G_n \in H_{n,k',k''}$ per ciascuna delle classi indicate nell'enunciato.

Se $G_n \in (a)$, (c), (g), (n), (o), (s) la tesi deriva immediatamente dal Teorema 2.2.

Nelle rimanenti classi i relativi G_n non soddisfano le condizioni sufficienti espresse nella tesi del Teorema 2.2; per provare che tali G_n hanno connettività 4 e quindi per il Teorema 2.1 risultano hamiltoniani, si supponga per assurdo l'esistenza di un C3 in essi.

Applicando i Lemmi 2.1, 2.2, 2.5, 3.1, 3.2, le possibili configurazioni assunte dai vertici del G_n all'interno ed all'esterno del C3 possono essere esaustivamente elencate dalle seguenti 17 condizioni (dove non specificato risulta $\omega_i(\cdot)$ e/o $\omega_e(\cdot) \geq 0$):

- | | | | | | | |
|------|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| (1) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 7$ | $\omega_i(6) \geq 8$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 5$ | $\omega_e(6) \geq 3$ |
| (2) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 8$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 5$ | $\omega_e(6) \geq 3$ |
| (3) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 7$ | $\omega_i(6) \geq 8$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 6$ | |
| (4) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 8$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 6$ | |
| (5) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 5$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 5$ | $\omega_e(6) \geq 3$ |
| (6) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 5$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 6$ | |
| (7) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 6$ | $\omega_e(4) = 1$ | $\omega_e(5) = 6$ | | |
| (8) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 7$ | $\omega_i(6) \geq 8$ | $\omega_e(4) = 2$ | $\omega_e(5) \geq 3$ | |
| (9) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 8$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 2$ | $\omega_e(5) \geq 3$ | |
| (10) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 5$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 2$ | $\omega_e(5) \geq 3$ | |
| (11) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 6$ | $\omega_e(4) = 2$ | $\omega_e(5) \geq 3$ | | |
| (12) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 7$ | $\omega_i(6) \geq 8$ | $\omega_e(4) = 3$ | | |
| (13) | $\omega_i(4) = 0$ | $\omega_i(5) = 8$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 3$ | | |
| (14) | $\omega_i(4) = 2$ | $\omega_i(5) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 2$ | $\omega_e(5) \geq 3$ | | |
| (15) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 5$ | $\omega_i(6) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 3$ | | |
| (16) | $\omega_i(4) = 1$ | $\omega_i(5) = 6$ | $\omega_e(4) = 3$ | | | |
| (17) | $\omega_i(4) = 2$ | $\omega_i(5) \geq 3$ | $\omega_e(4) = 3$ | | | |

Inoltre, in virtù dei Lemmi 2.3 e 2.4 e quindi delle relative relazioni sui $d_i(x_j)$, $d_e(x_j)$, fra i $d_i(x_j)$ e $\omega_i(5)$ e fra i $d_e(x_j)$ e $\omega_e(5)$, si può facilmente verificare come le 17 configurazioni elencate implicano valori di n tutti diversi da quelli ipotizzati nelle classi (b), (d), (e), (f), (h), (i), (l), (m), (p), (q), (r), (t), (u).

A titolo di esempio, proviamo la tesi per le classi (b), (d) ed (e).

Per il Lemma 3.1, l'unica configurazione possibile presente all'interno ed all'esterno del C3 di un G_n del tipo $7^1 6^{n-9} 5^3 4^5$ dovrebbe verificare la condizione (17) da cui $n \geq 11$, contro l'ipotesi assunta. Da ciò segue la tesi nel caso della classe (b).

Per i Lemmi 3.1 e 3.2, l'unica configurazione possibile in un G_n del tipo $7^1 6^{n-10} 5^5 4^4$ dovrebbe soddisfare la condizione (15), da cui $n \geq 15$ e quindi segue la tesi nel caso della classe (d).

Infine, le possibili configurazioni presenti in un G_n del tipo $8^1 6^{n-11} 5^6 4^4$ dovrebbero soddisfare la condizione (14) e/o la (15), da cui $n \geq 13$, ossia la tesi nel caso (e).

Bibliografia

- [1] D. BARNETTE and G. WEGNER, *Hamiltonian circuits in simple 3-polytopes with up to 26 vertices*, Israel J. Math. **19** (1974), 212-216.
- [2] E. ETORNEAU, *Existence and connectivity of planar graphs having 12 vertices of degree 5 and $n - 12$ vertices of degree 6*, Collect. Math. (10) **II** (1975), 645-655.
- [3] S. FANELLI: [\bullet]₁ *On the connectivity of maximal planar graphs with minimum degree 5*, Ann. Discrete Math. **18** (1983), 343-354; [\bullet]₂ *Un algoritmo per la caratterizzazione di partizioni grafiche massimali*, Calcolo **23** (1986), 305-326.
- [4] A. GHIRALDINI, *Sull'esistenza e sulla connettività di grafi planari massimali di grado minimo 4 e 5*, Tesi di Laurea, Università dell'Aquila a.a. 1983-84.
- [5] B. GRÜNBAUM, *Convex polytopes*, Wiley, New York, 1967.
- [6] S. L. HAKIMI and E. F. SCHMEICHEL, *On the connectivity of maximal planar graphs*, J. Graph. Theory **2** (1978), 307-314.
- [7] F. HARARY, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1969.
- [8] H. OKAMURA, *Every simple 3-polytope of order 32 or less is hamiltonian*, J. Graph Theory **6** (1982), 185-196.
- [9] O. ORE, *The four color problem*, Academic Press, 1967.
- [10] P. J. OWENS, *Non-hamiltonian simple 3-polytopes whose faces are all 5-gons or 7-gons*, Discrete Math. **36** (1981), 227-230.
- [11] H. WHITNEY, *A theorem on graphs*, Annals of Math. **32** (1931), 378-390.
- [12] C. ZAFFIRI, *Su un approccio informatico-costruttivo per la determinazione della non planarità di partizioni grafiche massimali di ordine minore di 13*, Tesi di Laurea, Università dell'Aquila a.a. 1983-84.

Abstract

Let $H_{n,k',k''}$ be the classes of maximal planar graphs G_n on n vertices (without loops or multiple edges) having k'' vertices of degree 4, k' vertices of degree 5 and $n - (k' + k'')$ vertices of degree more than 5.

In this work the Authors determine strong sufficient conditions for a graph $G_n \in H_{n,k',k''}$ with maximum degree 8 to be hamiltonian. These conditions are based upon an extensive study on the structure of vertices of degree 4, 5 and 6 in the classes $H_{n,k',k''}$ having connectivity 3.
