Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 257-273

ADELINA TARSI SANTOLINI (*)

Regolarità Lipschitziana nelle variabili spaziali per la soluzione di una disequazione variazionale quasi-lineare di tipo parabolico (**)

Introduzione

Nel presente lavoro consideriamo una disequazione quasi-lineare di tipo parabolico, con condizioni del tipo di Signorini e con ostacolo $\psi(x, t)$ appartenente a $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$; dimostreremo l'esistenza di una soluzione $u(x, t)$ appartenente anch'essa a $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$.

Precisamente, sia Ω un aperto limitato di frontiera regolare Γ ed indichiamo con Q_T e Σ_T rispettivamente gli insiemi

$$Q_T = \Omega \times 0 \vdash\!\dashv T \qquad \Sigma_T = \Gamma \times 0 \vdash\!\dashv T \,.$$

Assegnate poi le funzioni $a_{ij}(x, t) \in \mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$, simmetriche e soddisfacenti alla condizione

$$\text{(1)} \qquad \sum_{1}^{N}{}_{ij}\, a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu |\xi|^2 \qquad \nu > 0 \text{ q.o. in } Q_T$$

introduciamo l'operatore $A(t)$: $H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$

$$\text{(2)} \qquad \langle A(t)u, v\rangle = \int_\Omega \sum_{1}^{N}{}_{ij}\, a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega)\,.$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica del Politecnico, Piazza L. da Vinci 32, I-20133 Milano.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 26-I-1987.

Sia infine assegnata la funzione $H(x, t, u, p)$, definita in $Q_T \times R \times R^N$, misurabile in (x, t) $\forall (u, p)$ e continua in (u, p) per quasi tutti gli $(x, t) \in Q_T$ soddisfacente all'ipotesi

(3) $$|H(x, t, u, p)| \leqslant K(1 + |p|^{2-\alpha}) \quad \alpha > 0 \quad \forall |u| < C$$

dove le costanti K ed α possono eventualmente dipendere da C.

Possiamo allora considerare la disequazione variazionale

(4) $$\int_{t_1}^{t_2} \langle A(t) u, v - u \rangle \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \{v_t + H(x, t, u, \nabla u)\} (v - u) \, dx \, dt$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega \{[v(x, t_2) - u(x, t_2]^2 - [v(x, t_1) - u(x, t_1)]^2\} \, dx$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad u \in K^\psi \qquad \forall v \in K^\psi \cap W_2^{1,1}(Q_T)$$

dove $u_0(x) \in H^{1,\infty}(\Omega)$ e K^ψ è il convesso $K^\psi = \{v \in \mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega)) \cap \mathscr{L}^\infty(Q_T)$; $v \leqslant \psi$ q.o. in $Q_T\}$ e $\psi(x, t)$ è una funzione appartenente allo spazio $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$.

Un problema simile al nostro è stato studiato da M. Biroli e U. Mosco nel caso ellittico (cfr. [2]); a tale lavoro, ed ai lavori di J. Frehse (cfr. [3]) e di B. Hanouzet e J. L. Joly (cfr. [5]), faremo riferimento, per quanto riguarda la linea del procedimento e le notazioni.

1 – Indichiamo rispettivamente con V e V_0 gli spazi

$$V = W_2^{1,1}(Q_T) \cap \mathscr{L}^\infty(Q_T) \qquad V_0 = \mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H_0^1(\Omega)) \cap V$$

e siano rispettivamente V^* e V_0^* i loro duali d'ordine, V_+^* e $(V_0)_+^*$ l'insieme dei vettori non negativi in V^* e V_0^* e sia infine $\rho: V' \to V_0'$ la trasposta dell'iniezione di V_0 in V.

Posto $$\theta^+ = \{f \in (V_0)_+^*;\ \exists F \in V_+^* \text{ tale che } \rho F = f\} ,$$

possiamo definire (cfr. [5]) $\forall f^* \in \theta^+$ una estensione minimale positiva e continua πf^+, nel modo seguente

$$\langle \pi f^+, v \rangle_{V',V} = \sup_{\substack{u \in V_0 \\ 0 \leq u \leq v}} \langle f^+, u \rangle_{V_0', V_0} \qquad \forall v \in V \quad v \geqslant 0 .$$

Posto infine $\theta=\theta-\theta^-$ e $\forall f\in\theta$, $\pi f=\pi f^+-\pi f^-$, indichiamo con $\pi\theta$ il sottospazio di V_0^* così costruito.

Si possono dimostrare, seguendo ragionamenti del tutto analoghi a quelli seguiti in [2] e [5], che sono verificate le seguenti Proprietà:

(1) $V_0^*-\theta\neq\emptyset$.

(2) ρ è un omeomorfismo di Riesz di V^* in θ e $\rho F^+=(\rho F)^+$ $\forall F\in V^*$, $\rho V^*=\theta$.

(3) π è un omeomorfismo di Riesz in V^* e $\rho\pi\theta=\theta$.

(4) θ è una striscia in V^*, cioè (a) $\forall f\in\theta$, $G\in V^*$ con $|G|\leqslant|\pi f|\Rightarrow G\in\pi\theta$; (b) $\pi\theta$ contiene l'estremo superiore di ogni suo sottoinsieme limitato in V^*.

(5) $V^*=\pi\theta\oplus t_{\gamma_0}(H^{1/2,0}(\Sigma)\cap\mathscr{L}^\infty(\Sigma))^*$, dove t_{γ_0} è il trasposto dell'operatore di traccia γ_0.

Introduciamo ora l'operatore $\mathscr{L}(t):H^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$, formalmente scritto nel modo seguente

$$\mathscr{L}(t)=\sum_{1}^{M}{}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Evidentemente $\mathscr{L}(t)$ coincide con la restrizione di $A(t)$ allo spazio $H_0^1(\Omega)$. Possiamo allora definire gli operatori E e $\tilde{E}$

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned}\langle Eu,\ v\rangle_{V'V}&=\int_0^T\langle A(t)u,\ v\rangle\,dt+\int_0^T\int_\Omega u_t v\,dx\,dt\\ \langle\tilde{E}u,\ v\rangle_{V_0',V_0}&=-\int_0^T\langle\mathscr{L}(t)u,\ v\rangle\,dt+\int_0^T\int_\Omega u_t v\,dx\,dt\,.\end{aligned}$$

Evidentemente $\tilde{E}$ coincide con la restrizione di E allo spazio V_0.

Dimostreremo ora il seguente

Lemma 1. *Sia* $u\in V$, $Eu\in V^*$; *allora esiste una ed una sola* $\phi_u\in(H^{1/2,0}(\Sigma))\cap\mathscr{L}^\infty(\Sigma)))^*$ *tale che si abbia*

$$\text{(7)}\qquad Eu=\tilde{E}u+t_{\gamma_0}\phi_u\,.$$

Se poi $\tilde{E}u\in\mathscr{L}^2(Q_T)$, *allora*

$$\text{(8)}\qquad \phi_u=\gamma_a u$$

dove $\gamma_a u$ è la consueta derivata conormale di u, definita nel modo seguente

$$\gamma_a u = \sum_{1}^{M}{}_{ij}\, a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{\Sigma} \cos(\nu x_j) = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,.$$

Dim. Poiché risulta $\rho E u = \tilde{E} u$, $\pi \tilde{E} u \in \pi\theta$, si ottiene $Eu = \pi\tilde{E}u + (Eu - \pi\tilde{E}u)$, dove $Eu - \pi\tilde{E}u$ è l'insieme degli elementi di V^* che si annullano in V_0 e pertanto appartengono a $(\pi\theta)^{\perp}$. Dalla Proprietà 5 si ricava allora

$$Eu - \pi\tilde{E}u = t_{\gamma_0}\phi_u \qquad \text{con} \qquad \phi_u \in (H^{1/2,\,0}(\Sigma) \cap \mathscr{L}^{\infty}(\Sigma))^*\,.$$

Di qui segue

$$\langle Eu,\ v\rangle = \langle \pi\tilde{E}u,\ v\rangle + \langle \phi_u,\ \gamma_0 v\rangle\ ; \tag{9}$$

se poi $\tilde{E}u \in \mathscr{L}^2(Q_T)$, risulta

$$\langle \pi\tilde{E}u,\ v\rangle_{V',V} = \int_0^T \int_{\Omega} \{u_t - \sum_{1}^{M}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_j})\}\, v\, dx\, dt$$

di qui e dalle (9), segue la (8).

Possiamo ora dimostrare il seguente

Lemma 2. *Supponiamo che l'ostacolo $\psi(x,\ t)$ appartenga allo spazio $W^{2,1}_{\infty}(Q_T)$ e che soddisfi alla seguente ipotesi*

$$\exists v_0 \in H^1(0 \vdash\!\dashv T,\ (H^1(\Omega))') \qquad v_0 \in K^{\psi}\,,$$

allora ogni soluzione $u(x,\ t)$ della disequazione (4) verifica le disuguaglianze

$$-\tilde{K} \leq 0 \wedge (\tilde{E}\psi + H(\cdot,\ \cdot,\ \psi,\ \nabla\psi)) \leq \tilde{E}u + H(\cdot,\ \cdot,\ u,\ \nabla u) \leq 0 \tag{10}$$

$$0 \wedge \gamma_a\psi \leq \gamma_a u \leq 0 \qquad \text{in} \qquad (H^{1/2,\,0}(\Sigma) \cap \mathscr{L}^{\infty}(\Sigma))^*\,. \tag{11}$$

Dim. Con gli stessi ragionamenti seguiti in [7], si può dimostrare che

$u(x, t)$ soddisfa la disuguaglianza

$$-\tilde{K} \leq 0 \wedge (E\psi + H(\cdot, \cdot, \psi, \nabla\psi)) \leq Eu + H(\cdot, \cdot, u, \nabla u) \leq O .$$

Poiché $\tilde{E}u \in \mathscr{L}^2(Q_T)$, scomponendo quest'ultima disuguaglianza in $\pi\theta$ e $(\pi\theta)^\perp$, usando il Lemma 1, otteniamo la (10) e la (11).

2 – Supponiamo dapprima che $H(x, t, u, p)$ soddisfi alla seguente condizione

$$|H(x, t, u, p) - H(x, t, v, q)| \leq K_C\{|u-v| + |p-q|\} \qquad \forall\, |u|, |v|, |p|, |q| \leq C . \tag{12}$$

$\forall m$, definiamo poi le funzioni regolarizzate [1]

$$a_{ij}^m(x, t) = \int_{t-1/m}^{t+1/m} \int_{x_1-1/m}^{x_1+1/m} \dots \int_{x_N-1/m}^{x_N+1/m} a_{ij}(\xi, \tau)\, \alpha_m(t-\tau)\, \alpha_m(x_1-\xi_1)\, \alpha_m(x_N-\xi_N)\, d\xi\, d\tau$$

$$H_m(x, t, u, p) = \int_{t-1/m}^{t+1/m} \int_{x_1-1/m}^{x_1+1/m} \dots \int_{x_N-1/m}^{x_N+1/m} H(\xi, \tau, u, p)\alpha_m(t-\tau)\alpha_m(x_1-\xi_1)\alpha_m(x_N-\xi_N)\, d\xi\, d\tau$$

$$\psi_m(x, t) = \int_{t-1/m}^{t+1/m} \int_{x_1-1/m}^{x_1+1/m} \dots \int_{x_N-1/m}^{x_N+1/m} \psi(\xi, \tau)\, \alpha_m(t-\tau)\, \alpha_m(x_1-\xi_1) \dots \alpha_m(x_N-\xi_N)\, d\xi\, d\tau$$

$$u_{0m}(x) = \int_{x_1-1/m}^{x_1+1/m} \dots \int_{x_N-1/m}^{x_N+1/m} u_0(\xi)\, \alpha_m(x_1-\xi_1) \dots \alpha_m(x_N-\xi_N)\, d\xi\ ;$$

tali funzioni soddisfano, $\forall m$, alle condizioni:

$$\sum_{ij=1}^{N} a_{ij}^m \xi_i \xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \qquad \nu > 0 . \tag{13}$$

$$|a_{ij}^m(x, t)| \leq \Lambda \qquad |\nabla a_{ij}^m(x, t)| \leq \Lambda . \tag{14}$$

---

[1] Le funzioni regolarizzanti $\alpha_m(x, t)$ sono definite nel modo consueto $\alpha_m(t) = m\alpha(mt)$, dove $\alpha(t) \in C^\infty(R)$, $\alpha(-t) = \alpha(t)$, $\operatorname{supp} \alpha(t) \subseteq -1 \vdash\!\dashv 1$, $\int_{-1}^{1} \alpha(t)\, dt = 1$. Inoltre le funzioni $a_{ij}(x, t)$ sono prolungate al di fuori di Q_T ponendo $a_{ij}(x, t) = \nu\delta_{ij}$.

$$(15)\qquad |H_m(x, t, u, p)| \le K(1+|p|^{2-\alpha}) \qquad \alpha>0 \qquad |u|\le C\,.$$

$$(16)\qquad |H_m(x, t, u, p)-H_m(x, t, v, q)| \le K_c\{|u-v|+|p-q|\}\,.$$
$$\forall |u|,\ |v|,\ |p|,\ |q| \le C\,.$$

$$(17)\qquad |\psi_m(x, t)| + |\nabla\psi_m(x, t)| + |u_{0m}(x, t)| \le M\,.$$

Poniamo infine $\forall m$

$$\tau_m(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{se } |\sigma|\le m \\ m & \text{se } \sigma > m \\ -m & \text{se } \sigma < -m \end{cases}$$

$$\omega_m(p) = \{\tau_m(p_i)\} \qquad \forall p\in R^N \qquad \tilde H_m(x, t, u, p) = H_m(x, t, \tau_m(u), \omega_m(p))\,.$$

Sotto tali ipotesi, le disequazioni

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \langle A_m(t)u_m, v-u_m\rangle\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \{\frac{\partial u_m}{\partial t} + \tilde H_m(x, t, u_m, Du_m)(v-u_m)\}\, dx\, dt \geqslant 0 \\ &u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \qquad u_m \in K^{\psi_m} \qquad \forall v\in K^{\psi_m} \end{aligned}$$

ammettono una soluzione $u_m(x, t)$ appartenente a $C^1(Q_T)$ e dotata di derivate seconde rispetto a x_i, x_j, appartenenti a $\mathscr{L}^2(Q_T)$ (cfr. [10]).

Dimostreremo ora il seguente

Lemma 3. *Supponendo verificate le ipotesi* (13)...(17) *e supponendo inoltre che esista una funzione $\Phi(x, t)$ continua con tutte le derivate prime e con le derivate seconde rispetto a x_i, x_j soddisfacente alla condizione*

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\Phi_t - \sum_{1}^{N}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x, t)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) + H(x, t, \Phi, D\Phi) \leqslant \sigma < 0 \\ &\Phi(x, 0) \leqslant u_0(x) + \sigma \qquad \Phi(x, t) \leqslant \psi(x, t) + \sigma \end{aligned}$$

le soluzioni $u_m(x, t)$ sono equilimitate in $\mathscr{L}^\infty(Q_T)\cap \mathscr{L}^2(0\vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))$.

Dim. Effettuando nella (18) il cambiamento di incognita $u_m(x, t) = e^{\lambda_m t}\tilde{u}_m(x, t)$ e scegliendo $v = u_m + (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ e^{-\lambda_m t}$, dove $\tilde{\Phi} = e^{-\lambda_m t}\Phi$, si ottiene

$$(20) \qquad \langle \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial t} + A_m \tilde{u}_m + \lambda_m \tilde{u}_m + e^{-\lambda_m t}\tilde{H}_m(x, t, e^{\lambda_m t}\tilde{u}_m, e^{\lambda_m t} D\tilde{u}_m), (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ \rangle \geqslant 0 .$$

Per la (12), e quindi per la (16), si può scegliere opportunamente la costante $\lambda_m > 0$ in modo tale che l'operatore

$$B_m = A_m + \lambda_m + e^{-\lambda_m t}\tilde{H}_m$$

sia uniformemente monotono, cioè

$$\langle e_m v_1 - B_m v_2, (v_1 - v_2) \rangle \geqslant \delta \| v_1 - v_2 \|^2_{\mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))} \qquad \delta > 0 ;$$

inoltre, almeno per m abbastanza grande, dalla prima delle (19) si deduce

$$\langle \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + B_m \tilde{\Phi}, (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ \rangle \leqslant 0 .$$

Dalla (20) si ricava allora

$$\langle \frac{\partial(\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)}{\partial t}, (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ \rangle + \langle (B_m \tilde{\Phi} - B_m \tilde{u}_m), (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ \rangle$$
$$\leq \langle \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + B_m \tilde{\Phi}, (\tilde{\Phi} - u_m)_+ \rangle \leqslant 0$$

da cui segue (poiché, almeno per m abbastanza grande $u_{om}(x) \geqslant \Phi(x, 0)$)

$$\| (\tilde{\Phi} - \tilde{u}_m)_+ \|_{\mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))} \leq 0$$

cioè $\tilde{u}_m(x, t) \geqslant \tilde{\Phi}(x, t)$ e quindi $u_m(x, t) \geqslant \Phi(x, t)$.

Poiché inoltre $\tilde{u}_m(x, t) \leq \tilde{\psi}_m(x, t)$, per la (17) possiamo affermare che le $u_m(x, t)$ sono equilimitate in $\mathscr{L}^\infty(Q_T)$. Di qui, dalla (15) e dalla (18) segue anche che le $u_m(x, t)$ sono equilimitate in $\mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))$.

3 – Supponiamo ora che la frontiera Γ dell'insieme Ω sia così regolare da verificare la seguente condizione

(α) comunque si scelga $x_0 \in \Gamma$, esiste un intorno V dello spazio R^N, tale che

$V \cap \Gamma$ si possa rappresentare, per almeno un indice i, nella forma

$$x_i = h(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$$

con h funzione hölderiana insieme con le sue derivate prime e seconde.

Dato poi un punto $(x_0, t_0) \in Q_T$, consideriamo (cfr. [1]) la funzione di Green $G(x_0, t_0, x, t)$ relativa all'operatore aggiunto di E, soluzione dell'equazione

$$(21) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{G v_t + \sum_{ij}{}_1^N a_{ij}^m \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\} \, dx \, dt = v(x_0, t_0) \qquad \forall v \in C_0^1(Q_T) ;$$

tale funzione, non negativa ed uguale a zero se $t > t_0$, appartiene allo spazio $\mathscr{L}^{q'}(0 \vdash\!\dashv T, H_0^{1,p'}(\Omega))$ con $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$, $N/2p + 1/q < 1/2$, e soddisfa alle limitazioni

$$(22) \qquad \begin{aligned} &G(x_0, t_0, x, t) \leq C|t - t_0|^{-N/2} e^{-\sigma([x-x_0]^2/(t_0-t))} \qquad t < t_0 \\ &\|G(x_0, t_0, x, t)\|_{\mathscr{L}^{q'}(0 \vdash\!\dashv T, H_0^{1,p'}(\Omega))} \leq C \end{aligned}$$

dove C e σ sono costanti che non dipendono da m e da (x_0, t_0) ma solamente da T, Ω, q, p, ν, $\|a_{ij}\|_{\mathscr{L}^\infty(Q_T)}$.

Se poi $(x_0, t_0) \in \Sigma_T$, non è restrittivo supporre che esista un intorno V di (x_0, t_0) tale che $V \cap \Gamma$ appartenga al piano $X_N = 0$. Infatti, per la proprietà (α) della frontiera Γ, basta operare il cambiamento di variabile (cfr. [8])

$$(23) \qquad x'_K = x_K \qquad (K = 1, \ldots, N-1) \qquad x'_N = x_N - h(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$$

dove per semplicità abbiamo supposto $i = N$. L'operatore $A_m(t)$ si trasforma nell'operatore $A_m^*(t)$ i cui coefficienti possono essere facilmente espressi in funzione di a_{ij}^m, h, $\partial h/\partial x_K$.

Prolungando allora per simmetria i coefficienti di $A_m^*(t)$, si può ancora considerare la funzione di Green relativa al punto $(x_0, t_0) \in \Sigma_T$, che soddisfa ancora alle limitazioni (22), dove C e σ non dipendono da m e (x_0, t_0), poiché l'insieme Ω è limitato e Γ può quindi essere ricoperta con un numero finito di tali intorni $V \cap \Gamma$.

Fatte tali premesse, possiamo ora dimostrare il seguente

Lemma 4. *Supponendo valide le ipotesi* (13), ... (17), (19) *e la condizione*

(α), *scelto ad arbitrio un punto* $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_T$ $(t_0 \neq 0)$, *ed indicata con* B_r *la sfera* $|x_i - x_{0_i}| \leq r$, *la soluzione* $u_m(x, t)$ *della disequazione* (18), *soddisfa* $\forall m$ *alla disuguaglianza*

$$\int_{t_0-r^2}^{t_0} \int_{B_r \cap \bar{\Omega}} \nabla^2 u_m \, G \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq \bar{K} \tag{24}$$

dove $\bar{K}$ *è una costante indipendente da* m, r, x_0, t_0.

Dim. Scelto $(x_0, t_0) \in Q_T$, sia $\tau(x, t) = \eta(t)\phi(x)$, con $\eta(t)$ e $\phi(x)$ soddisfacenti alla condizione $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 1$ ed a supporto compatto rispettivamente in $t_0 - 2r^2 \vdash\!\dashv t_0 + 2r^2$ e B_{2r}, $\eta(t) \equiv 1$ in $t_0 - r^2 \vdash\!\dashv t_0 + r^2$, $\phi(x) \equiv 1$ in B_r e tali che $|\eta'(t)| \leq \frac{1}{r^2}$, $\quad |\nabla \phi| \leq \frac{1}{r}$, $\quad \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leq \frac{1}{r^2}$.

Poniamo poi, nella (18), $v(x, t) = u_m(x, t) - \tau^2 G(L + u_m(x, t))^\lambda$, dove λ è un numero opportunamente grande da scegliersi nel seguito e L è un numero indipendente da m, soddisfacente alla condizione $L > \mathrm{Sup}|(u_m(x, t)|$. Otteniamo allora

$$\int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} G \frac{\partial}{\partial t}\left[t^2 \frac{(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} G \frac{(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{\partial \tau^2}{\partial t} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+ \lambda \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \tau^2 G (L+u_m)^{\lambda-1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial \tau^2}{\partial x_j} G (L+u_m)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tau^2 \frac{(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$- \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{\partial G}{\partial x_j} \frac{(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{\partial \tau^2}{\partial x_i} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} A_m(x, t, u_m, Du_m) \tau^2 G (L+u_m)^\lambda \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq 0\,.$$

Dalle (13), (15), (21) ed usando le formule di Green, si ricava

$$\nu\lambda \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \nabla^2 u_m \tau^2 G(L+u_m)^{\lambda-1} \, dx \, dt + \frac{(L+u_m(x_0,\ t_0))^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

$$\leq \int_{t_0-2r^2}^{t_0-r^2} \int_{B_{2r}} G \frac{(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{\partial \tau^2}{\partial t} dx \, dt - 2 \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}-B_r} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial \tau^2}{\partial x_j} G(L+u_m)^{\lambda} \, dx \, dt$$

$$- \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \sum_{1}^{N}{}_{ij} \frac{\partial a_{ij}^m}{\partial x_j} \frac{G(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{\partial \tau^2}{\partial x_j} dx \, dt - \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}-B_r} \sum_{1}^{N}{}_{ij} a_{ij}^m \frac{G(L+u_m)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial x_i \partial x_j} dx \, dt$$

$$+ K \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \nabla^{2-\alpha} u_m \tau^2 G(L+u_m)^{\lambda} \, dx \, dt \, .$$

Dalla (14) ed usando la formula di Young, si ottiene

$$(\nu\lambda - 2L\Lambda\varepsilon_1 - 2LK) \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \nabla^2 u_m \tau^2 G(L+u_m)^{\lambda-1} \, dx \, dt$$

$$\leq \frac{(2L)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \int_{t_0-2r^2}^{t_0-r^2} \int_{B_{2r}} G \frac{\partial \tau^2}{\partial t} dx \, dt + \frac{2\Lambda}{\varepsilon_1} (2L)^{\lambda} \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}-B_r} G \sum_{1}^{N}{}_{i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)^2 dx \, dt$$

$$+ \Lambda \frac{(2L)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_2-B_r} G \sum_{1}^{N}{}_{i} \left| \frac{\partial \tau^2}{\partial x_i} \right| dx \, dt + \Lambda \frac{(2L)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}-B_r} G \sum_{1}^{N}{}_{ij} \left| \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial x_i \partial x_j} \right| dx \, dt$$

$$+ K(2L)^{\lambda} \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \tau^2 G \, dx \, dt \, .$$

Per le (22) e poiché risulta

$$\left| \frac{\partial \tau^2}{\partial t} \right| \leq \frac{1}{r^2} \qquad \left| \frac{\partial \tau^2}{\partial x_i} \right| \leq \frac{1}{r} \qquad \left| \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{1}{r^2}$$

segue

$$(\nu\lambda - 2L\Lambda\varepsilon_1 - 2LK) \int_{t_0-2r^2}^{t_0} \int_{B_{2r}} \nabla^2 u_m \tau^2 G(L+u_m)^{\lambda-1} \, dx \, dt \leq L^*$$

dove L^* non dipende da m, r e da $(x_0,\ t_0)$.

Scegliendo poi L così grande che $L + u_m \geqslant 1$ e λ così grande che $\nu\lambda - 2L\Lambda\varepsilon_1 - 2LK > 0$, si ottiene infine la (24).

Se poi $(x_0, t_0) \in \Sigma_T$, effettuando il cambiamento di variabile (23) e considerando l'operatore $A_m^*(t)$, con ragionamenti del tutto analoghi, si giunge ancora a dimostrare la (24).

4 – Sfruttando i Lemmi 3 e 4, possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 1. *Supponendo valide le ipotesi* (α), (1), (3), (12), (19), *la disequazione* (4) *ammette una soluzione* $u(x, t)$ *appartenente a* $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$.

Dim. Indichiamo con L_m il massimo di $|\nabla u_m|$, con $P_m = (x_m, t_m)$ un punto in cui (∇u_m) assume tale valore massimo e con $P_0 = (x_0, t_0)$ un punto di accumulazione di $\{P_m\}$.

Supponiamo dapprima che (x_0, t_0) sia interno a Q_T; in tal caso vogliamo dimostrare che risulta

$$|\nabla u_m| \leq K^* \quad \text{in } \bar{Q}_T \tag{25}$$

dove K^* è una costante indipendente da m.

Se per assurdo supponiamo che si abbia

$$\operatorname{Sup} L_m = \infty \tag{26}$$

esisteranno due sottosuccessioni, che chiameremo per semplicità ancora con lo stesso nome, tali da verificare le condizioni

$$\text{(27)} \quad \lim_{m\to\infty} L_m = +\infty \qquad\qquad \text{(28)} \quad \lim_{m\to\infty} |P_m - P_0| = 0 .$$

Dalla (28) segue allora che, almeno per m abbastanza grande, anche P_m è interno a Q_T.

Poniamo poi

$$D_k^h \omega(x, t) = \frac{\omega(x + he_k, t) - \omega(x, t)}{h}$$

dove e_k è il versore dell'asse x_k, e sostituiamo nella (18) (cfr. [3]) $v(x, t) = u_m(x, t) + \varepsilon D_k^{-h}[\tau^2 G(D_k^h u_m - M)_+]$, dove ε è un numero sufficientemente piccolo, $M > \|\psi(x, t)\|_{H^{1,\infty}(Q_T)}$, $\tau(x, t) = \eta(t)\phi(x)$ soddisfacenti alla condizione $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 1$ ed a supporto compatto rispettivamente in $t_m - r^2 \vdash\!\dashv t_m + r^2$ e in $B_r = \{|x_i - x_{im}| \leq r\}$, $\eta(t) \equiv 1$ in $t_m - (r^2/2) \vdash\!\dashv t_m + r^2/2$, $\phi(x) \equiv 1$ in $B_{r/2}$ e tali che $|\eta'(t)| \leq 1/r^2$, $|\nabla\phi| \leq 1/r$, $G = G(x_m, t_m, x, t)$. Avremo allora

$$\int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \frac{\partial}{\partial t} D_k^h u_m [\tau^2 G(D_k^h u_m - M)_+]\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \sum_{ij\,1}^{N} D_k^h\left(a_{ij}^m(x, t)\, \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}[\tau^2 G(D_k^h u_m - M)_+]\, dx\, dt$$

$$- \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \tilde{H}_m(x, t, u_m, Du_m) D_k^{-h}[\tau^2 G(D_k^h u_m - M)_+]\, dx\, dt \leq 0 .$$

Dalla (21) e passando al limite per $h \to 0$, si ricava

$$\frac{1}{2}(\max D_k u_m)^2 - \frac{1}{2}\int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} G(D_k u_m - M)_+^2 \frac{\partial \tau^2}{\partial t}\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \sum_{ij\,1}^{N} D_k a_{ij}^m D_i u_m D_j[\tau^2 G(D_k u_m - M)_+]\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \sum_{ij\,1}^{N} a_{ij}^m D_i D_k u_m G \frac{\partial \tau^2}{\partial x_j}(D_k u_m - M)_+\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \sum_{ij\,1}^{N} a_{ij}^m D_i D_k u_m D_j (D_k u_m - M)_+ \tau^2 G\, dx\, dt$$

$$- \frac{1}{2}\int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \sum_{ij\,1}^{N} a_{ij}^m \frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial \tau^2}{\partial x_i}(D_k u_m - M)_+^2\, dx\, dt$$

$$- \int_{t_m-r^2}^{t_m}\int_{B_r} \tilde{H}_m(x, t, u_m Du_m) D_k[\tau^2 G(D_k u_m - M)_+]\, dx\, dt \leq M^2 .$$

Indicando con L_{km} il valore di $|D_k u_m|$ nel punto P_m e ponendo

$$|DD_k u_m|_+ = \begin{cases} DD_k u_m & \text{se } D_k u_m > M \\ 0 & \text{se } D_k u_m \leq M \end{cases}$$

dalla (13) ed usando la diseguaglianza di Young e la formula di Green, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{km}^2 + \nu \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tau^2 G|DD_k u_m|^2 \,dx\,dt \le \frac{1}{2r^2} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} G\nabla^2 u_m \,dx\,dt \\
&+\frac{L}{r} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} G\nabla^2 u_m \,dx\,dt + LL_m^2 \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tau^2 \nabla G \,dx\,dt \\
&+\frac{L}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{r^2}\right) \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} G\nabla^2 u_m \,dx\,dt + 2\varepsilon L \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} G|DD_k u_m|_+^2 \,dx\,dt \\
&-\frac{1}{2} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \sum_1^N{}_{ij} \frac{\partial a_{ij}^m}{\partial x_j} G \frac{\partial \tau^2}{\partial x_i} (D_k u_m - M)_+^2 \,dx\,dt \\
&-\frac{1}{2} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \sum_1^N{}_{ij} a_{ij}^m G \frac{\partial^2}{\partial x_i} \frac{\partial \tau^2}{\partial x_j} (D_k u_m - M)_+^2 \,dx\,dt \\
&- \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \sum_1^N{}_{ij} a_{ij}^m G\tau^2 (D_k u_m - M)_+ D_j D_k u_m \,dx\,dt \\
&+ \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tilde{H}_m(x,\ t,\ u_m,\ Du_m) \frac{\partial \tau^2}{\partial x_k} G (D_k u_m - M)_+ \,dx\,dt \\
&+ \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tilde{H}_m(x,\ t,\ u_m,\ Du_m) \tau^2 \frac{\partial G}{\partial x_k} (D_k u_m - M)_+ \,dx\,dt \\
&+ \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tilde{H}_m(x,\ t,\ u_m,\ Du_m) \tau^2 G D_k (D_k u_m - M)_+ \,dx\,dt + K_1 \,.
\end{aligned}
$$

Per la (15) ed il Lemma 4, si ricava

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{km}^2 + (\nu - 3\varepsilon L - K\varepsilon) \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} \tau^2 G|DD_k u_m|_+^2 \,dx\,dt \\
&\le \frac{\bar{K}}{2r^2} + \bar{K}L\left(\frac{3}{2r} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon r^2} + \frac{1}{2r^2}\right) + K\frac{\bar{K}}{r} L_m^{1-\alpha} \\
&+ KL_m(1+L_m^{2-\alpha}) \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} |\nabla G| \,dx\,dt + LL_m^2 \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} |\nabla G| \,dx\,dt \\
&+ \frac{K}{r} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} G|\nabla u_m| \,dx\,dt + \frac{K}{\varepsilon} \int_{t_m-r^2}^{t_m} \int_{B_r} (1+|\nabla u_m|^{2-\alpha})^2 \tau^2 G \,dx\,dt + K_2 \,.
\end{aligned}
$$

Scegliendo ε così piccolo che $\nu - 3\varepsilon L - K\varepsilon > 0$, dalla seconda delle (22) (dove si è scelto $p = q$), usando la formula di Schwarz, si ricava

$$\frac{1}{2}L_{km}^2 \leq K_3 + \frac{K_4}{r} + \frac{K_5}{r^2} + K_6 \frac{L_m^{1-\alpha}}{r} + KCL_m(L_m^{2-\alpha} + 1)\, r^{(N+2)/p} \tag{29}$$

$$+ CLL_m^2\, r^{(N+2)/p} + K\bar{K}L_m^{2-2\alpha}$$

dove p è un numero da scegliersi nel seguito, tale che $(N+2)/p < 1$. Poiché $(x_0,\ t_0)$ è interno a Q_T e $(x_m,\ t_m) \to (x_0,\ t_0)$, almeno per m abbastanza grande, possiamo scegliere l'intorno $t_m - r^2 \vdash\!\dashv t_m + r^2 \times B_r$, interno a Q_T, di raggio $r = L_m^{-\sigma(p/(N+2))}$, $0 < \sigma < 1$, dato che $t_m \to \infty$.

Avremo allora

$$\frac{1}{2}L_m^2 \leq K_3 + K_4 L_m^{\sigma p/(N+2)} + K_5 L_m^{2\sigma p/(N+2)} + K_6 L_m^{1-\alpha+\sigma p/(N+2)}$$

$$+ KCL_m^{1-\sigma}(1 + L_m^{2-\alpha}) + CLL_m^{2-\sigma} + K\bar{K}L^{2-2\alpha}$$

donde l'assurdo, per la (26), se scegliamo $\sigma < (N+2)/p$ e $(N+2)/p$ così vicino a 1 che $\alpha > 1 - \sigma$. La (25) è pertanto dimostrata.

Per la (25) ed il Lemma 3 possiamo affermare che dalla successione $\{u_m(x,\ t)\}$ si può estrarre una sottosuccessione (che chiameremo per semplicità ancora con lo stesso nome) convergente q.o. in Q_T (cfr. [6]) verso una funzione $u(x,\ t)$ soluzione della (4) ed appartenente evidentemente a $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T,\ H^{1,\infty}(\Omega))$. Se invece $(x_0,\ t_0) \in \Sigma_T$, ricordando la proprietà (α) della frontiera di Ω, indichiamo con V l'intorno di $(x_0,\ t_0)$ tale che $V \cap \Gamma$ si possa rappresentare nella forma $x_N = h(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{N-1})$ (avendo supposto per semplicità $i = N$). Effettuando allora il cambiamento di variabile (23) e considerando gli operatori $A_m^*(t)$ ottenuti prolungando per simmetria, possiamo osservare che non è restrittivo supporre (effettuando eventualmente un ulteriore cambiamento sulle prime $N-1$ variabili) $a_{ij}^{*m} = 0 \quad i \neq N$ e quindi $\dfrac{\partial u_m}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u_m}{\partial x_N}$.

Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli seguiti per giungere alla (25), si può ancora dimostrare che

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right| \leq K_7 \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ N-1\ .$$

Poiché la successione $\{u_m(x, t)\}$ è limitata in $\mathscr{L}^\infty(\bar{Q}_T) \cap \mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))$ si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in $\mathscr{L}^2(0 \vdash\!\dashv T, H^1(\Omega))$ verso una soluzione $u(x, t)$ della (4) che soddisfa evidentemente alla condizione

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq K_7 \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1 .$$

Inoltre, per le disuguaglianze di dualità del Lemma 2, risulta

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_N}\right| \leq K_8 \qquad \text{su } \Sigma_T$$

e quindi, con calcoli analoghi ai precedenti, si può mostrare che $|\nabla u_m| \leq K_9$. Essendo $\lim_{m\to\infty} \nabla u_m = \nabla u$ in $L^2(Q_T)$ debole, si avrà anche $|\nabla u| \leq K_9$.

Osserviamo infine che l'ipotesi suppletiva (12) può essere facilmente eliminata. Possiamo infatti dimostrare il seguente

Teorema 2. *Supponendo valide le ipotesi* (α), (1), (3), (19), *la disequazione* (4) *ammette una soluzione* $u(x, t) \in \mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$.

Dim. Esiste una successione $H_n(x, t, u, p)$ tale che

(30) $$|H_n(x, t, u, p)| \leq K(1 + p^{2-\alpha}) \qquad \forall |u| \leq L$$

(31) $$|H_n(x, t, u, p) - H_n(x, t, v, q)| \leq K_n\{|u - v| + |p - q|\}$$
$$\forall |u|, |v|, |p|, |q| \leq C$$

(32) $$\lim_{n\to\infty} H_n(x, t, u, p) = H(x, t, u, p)$$

q.o. in Q_T ed uniformemente in ogni insieme limitato di R^{N+1}.

Introduciamo allora le disequazioni variazionali

(33) $$\int_{t_1}^{t_2} \langle A(t) u_n, v - u_n \rangle \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \{v_t + H_n(x, t, u_n, Du_n)\} (v - u_n) \, dx \, dt$$
$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \{[v(x, t_2) - u_n(x, t_2)]^2 - [v(x, t_1) - u_n(x, t_1)]^2 \, dx$$

$$u_n(x, 0) = u_0 \qquad u_n \in K^\psi \qquad \forall v \in K^\psi \cap W_2^{1,1}(Q_T)$$

e dimostriamo che le soluzioni $u_n(x, t)$ soddisfano alle limitazioni

(34) $\phi(x, t) \leq u_n(x, t) \leq \psi(x, t)$ (35) $|\nabla u_n(x, t)| \leq K^*$

dove K^* è una costante indipendente da n.

Allo scopo consideriamo le disequazioni, analoghe alle (18),

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle A_m(t) u_{mn}, v - u_{mn} \rangle \, dt \tag{36}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \{ \frac{\partial u_m}{\partial t} + \tilde{H}_{mn}(x, t, u_{mn}, Du_{mn}) \} (v - u_{mn}) \, dx \, dt \geqslant 0$$

$$u_{mn}(x, 0) = u_{0m}(x) \qquad u_{mn} \in K^{\psi_m} \qquad \forall v \in K^{\psi_m}$$

ed osserviamo che, fissato n, almeno per m abbastanza grande, risulta per la (19)

$$\phi_t - \sum_1^N {}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^m \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_i}) + H_{mn}(x, t, \phi(x, t), D\phi(x, t)) \leq 0 \, ;$$

ripetendo allora i ragionamenti seguiti nella dimostrazione del Lemma 1, si giunge ancora a dimostrare la relazione

$$\phi(x, t) \leq u_{mn}(x, t) \leq \psi_m(x, t)$$

e quindi la (34).

Per dimostrare la (35), basta osservare che nella maggiorazione (19) la costante K^* non dipende dalla costante K_C che compare nella (12).

Considerando allora la successione $\{u_n(x, t)\}$ possiamo affermare che esiste una sottosuccessione (che chiameremo per semplicità ancora con lo stesso nome) convergente q.o. in Q_T verso una funzione $u(x, t)$, soluzione della (4) ed appartenente a $\mathscr{L}^\infty(0 \vdash\!\dashv T, H^{1,\infty}(\Omega))$.

Bibliografia

[1] D. G. Aronson, *Non negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 607-694.

[2] M. Biroli and U. Mosco, *Existence of regular solutions for non linear Signorini's problems*, J. Differential Equations 57 (1985), 333-348.

[3] J. FREHSE, *On the smoothness of variational inequalities with obstacles*, Proc. Semester Partial Differential Equations, Banach-Center, Warszawa, 1978.

[4] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliff N.J., 1964.

[5] B. HANOUZET et J. L. JOLY, *Méthodes d'ordre dans l'intérpretation de certaines inéquations variationnelles et applications*, J. Funct. Anal. 34 (1979), 217-249.

[6] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV and N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968 (Translated from Russian).

[7] M. MATZEU, U. MOSCO and M. A. VIVALDI, *Optimal impulse and continuous control with hamiltonian of quadratic growth*, Meth. Oper. Res. 51 (1984), 59-105.

[8] J. P. PUEL, *Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasilinéaires elliptiques et paraboliques d'ordre* 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 3 (1976), 89-119.

[9] H. H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*, Springer Verlag, Berlin.

[10] M. A. VIVALDI, *Non linear parabolic variational inequalities: existence of weak solutions and regularity properties*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 1-B (1987), 259-274.

***