Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 1-8

GIULIO MATTEI (*)

Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans in presenza di correnti di Hall e di ion slip (**)

A Bianca Manfredi per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

La instabilità gravitazionale secondo Jeans è stata oggetto di numerose ricerche, particolarmente stimolate dai lavori, oramai classici, di Fermi e Chandrasekhar (cf. [3], [4] e la bibliografia indicata in [3]) (1). In queste ricerche il mezzo è di volta in volta descritto da un modello fisico-matematico diverso.

In $[7]_1$ è stato esaminato il modello di un fluido elettroconduttore descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica in presenza di corrente Hall; il lavoro $[7]_1$ è stato generalizzato in [2] al caso in cui sia presente anche la corrente di ion slip (2). In [2] peraltro, a differenza di $[7]_1$, si fanno le ipotesi che il fluido sia non viscoso, non conduttore del calore e perfetto conduttore dell'elettricità: scopo della presente nota è di completare lo studio rinunciando a queste ipotesi.

In 2 si danno le equazioni delle perturbazioni. In 3 si determinano il valore critico della lunghezza d'onda e la condizione di instabilità gravitazionale nei due casi significativi di propagazione parallela ed ortogonale al campo magnetico. In 4

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, Via Diotisalvi 2, I-56100 Pisa.

(**) Ricevuto: 13-I-1986.

(1) In $[7]_1$ è data sull'argomento una bibliografia di 39 lavori, aggiornata al 1977; di data successiva sono a conoscenza dell'autore i lavori [1], [2], [6], $[7]_{2,4}$, [8]-[13].

(2) Indicheremo nel seguito un tale fluido con la sigla ISF.

si esaminano casi particolari degni di nota. In 5 infine si sintetizzano le conclusioni cui si è giunti col presente lavoro.

2 - Le equazioni delle perturbazioni

Le equazioni delle perturbazioni (in unità di Gauss) per il gas di cui alla Introduzione sono (cf. [2], [3], [4], [7]$_1$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \frac{\alpha+\eta}{\rho_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi\mu\rho_0}(\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{B}_0 + \operatorname{grad} U \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{2.2}$$

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}_0) + \chi\nabla^2\boldsymbol{b} + \beta\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}_0\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) + \tilde{\beta}\operatorname{rot}[\boldsymbol{B}_0\wedge(\boldsymbol{B}_0\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{b})] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_S^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{k_T c_S^2}{c_p}\nabla^2\left(\frac{p}{p_0} - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \tag{2.5}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è la perturbazione nel campo di velocità, t il tempo, ρ_0 la densità nello stato imperturbato, p la perturbazione nella pressione, α il coefficiente di viscosità di compressione, η quello di scorrimento, μ la permeabilità magnetica, $\boldsymbol{b}/\mu$ la perturbazione nel campo magnetico, $\boldsymbol{B}_0/\mu$ il campo magnetico (uniforme) nello stato imperturbato, U la perturbazione nel potenziale gravitazionale, ρ la perturbazione nella densità, G la costante di gravitazione universale, $\chi = c^2/4\pi\mu\sigma$ con σ conducibilità elettrica e c velocità della luce nel vuoto, $\beta = c^2\beta_H/4\pi\mu$ con β_H coefficiente di Hall, $\tilde{\beta} = c^2\beta_I/4\pi\mu$ con β_I coefficiente di ion slip, c_S la velocità «adiabatica» del suono ($c_S^2 = \gamma p_0/\rho_0$, $\gamma = c_p/c_v$), c_p il calore specifico a pressione costante, c_v il calore specifico a volume costante, p_0 la pressione nello stato imperturbato e k_T il coefficiente di conducibilità termica.

Poiché per l'esame della instabilità gravitazionale secondo Jeans interessa il caso della propagazione unidimensionale, introdotta, senza pregiudizio per la generalità, una terna cartesiana (inerziale) di riferimento (0; x, y, z) di versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ con l'asse x parallelo alla direzione di propagazione e tale da avere

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{0x}\hat{\boldsymbol{x}} + B_{0y}\hat{\boldsymbol{y}} ,$$

proiettando la (2.4) su $\hat{\boldsymbol{x}}$ e tenendo conto della solenoidalità di $\boldsymbol{b}$, si deduce subito

$\partial b_x/\partial t = 0$, $\partial b_x/\partial x = 0$ e quindi $b_x = 0$ interessando solo le perturbazioni che si propagano. Le rimanenti otto perturbazioni soddisfano al sistema

$$(2.6)_1 \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha + 2\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{B_{0y}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(2.6)_2 \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} \qquad\qquad (2.6)_3 \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x}$$

$$(2.6)_4 \qquad \frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x} - B_{0y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + (\chi + \bar{\beta} B_0^2)\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2}$$

$$(2.6)_5 \qquad \frac{\partial b_z}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} + (\chi + \bar{\beta} B_{0x}^2)\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} \qquad\qquad (2.6)_6 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$(2.6)_7 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = c_S^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{k_T c_S^2}{c_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{p}{p_0} - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \qquad\qquad (2.6)_8 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -4\pi G\rho\,.$$

3 - La condizione di instabilità gravitazionale

Imponiamo al sistema (2.6) la soluzione del tipo onda piana sinusoidale

$$(3.1) \qquad \psi(x,\ t) = \bar{\psi}\exp\left[i(\omega t - kx)\right]$$

dove ψ è la generica perturbazione, $\bar{\psi}$ (costante) la sua ampiezza, ω (costante) la frequenza angolare, k (costante) la componente secondo l'asse x del vettore numero d'onda $\boldsymbol{k}$, $k = \boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}$.

Considerando k prefissato reale, determiniamo l'equazione di dispersione. Poniamo

$$(3.2) \qquad i\omega = w \qquad\qquad (3.3) \qquad N = c_T^2 k^2 - 4\pi G\rho_0$$

con c_T velocità «isoterma» del suono ($c_T^2 = p_0/\rho_0$). Studiamo separatamente il caso di propagazione nella direzione del campo magnetico e quello nella direzione ortogonale (il caso di propagazione obliqua ha rivelato un appesantimento algebrico nei calcoli tale da rendere proibitiva la determinazione diretta della zona di stabilità).

3.1 - Propagazione nella direzione del campo magnetico

Scegliamo $\hat{x}$ in modo da avere $\boldsymbol{B}_0 = B_0 \hat{\boldsymbol{x}}$ ($B_0 = |\boldsymbol{B}_0|$). Le equazioni $(2.6)_2$-$(2.6)_5$, contenenti sia grandezze gasdinamiche (v_y e v_z) che magnetiche (b_y e b_z), conducono alla

$$\{(w+\frac{\eta}{\rho_0}k^2)[w+(\chi+\beta B_0^2)k^2]+A_0^2k^2\}^2+[\beta B_0 k^2(w+\frac{\eta}{\rho_0}k^2)]^2=0 \tag{3.4}$$

dove $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0/\sqrt{4\pi\mu\rho_0}$ (3) è la *velocità di Alfvén*. Nella (3.4) non compaiono termini gravitazionali; essa non è influenzata né dalla comprimibilità del mezzo, né dalla conduzione del calore e fornisce l'equazione di dispersione caratterizzante la propagazione di onde di Alfvén modificate dalle correnti di Hall e di ion slip in un ISF dissipativo (nel caso $\chi = 0$, $\eta = 0$ essa è stata studiata in $[7]_5$, n. 3).

Le rimanenti equazioni $(2.6)_1$, $(2.6)_6$, $(2.6)_7$, $(2.6)_8$-disaccoppiate dalle altre e contenenti solo grandezze gasdinamiche (v_x, p, ρ e U) conducono all'equazione di dispersione

$$w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = 0 \tag{3.5}$$

dove

$$a_1 = (\frac{\alpha+2\eta}{\rho_0} + \frac{k_T c_S^2}{c_p p_0})k^2 \qquad a_2 = \frac{k_T c_S^2}{c_p p_0}\frac{\alpha+2\eta}{\rho_0}k^4 + c_S^2 k^2 - 4\pi G\rho_0 \qquad a_3 = \frac{c_S^2 k_T k^2}{c_p p_0}N \, .$$

Si riconosce facilmente che se è $N<0$, ossia se è verificata la condizione

$$c_T^2 k^2 < 4\pi G\rho_0 \, , \tag{3.6}$$

la (3.5) possiede almeno una radice reale positiva, il che porta, per la (3.2), alla instabilità gravitazionale. Quindi il valore critico λ_c della lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/|k|$ è dato dalla

$$\lambda_c = \lambda_T = \sqrt{\pi c_T^2/G\rho_0} \, . \tag{3.7}$$

---

(3) In tutto il lavoro $\sqrt{}$ è simbolo di radice quadrata aritmetica.

Dunque $\forall\lambda > \lambda_T$ c'è sempre instabilità gravitazionale; applicando il *criterio di Routh-Hurwitz* (cf. [5], p. 340) si trova che $\forall\lambda < \lambda_T$ c'è stabilità, e ciò qualunque sia il valore dei parametri ρ_0, p_0, c_p, c_v, α, η e k_T.

3.2 - Propagazione in direzione ortogonale al campo magnetico

Osserviamo anzitutto che in questo caso, come indicano le (2.6), la corrente Hall non gioca alcun ruolo, a differenza di quella di ion slip.

Le $(2.6)_2$, $(2.6)_3$ e $(2.6)_5$ sono ora equazioni (autonome) di diffusione di ovvio significato, mentre le rimanenti equazioni del sistema (2.6) conducono all'equazione di dispersione

$$w^4 + b_1 w^3 + b_2 w^2 + b_3 w + b_4 = 0 \tag{3.8}$$

dove: $b_1 = a_1 + (\chi + \tilde{\beta} B_0^2)\, k^2$ $\qquad$ $b_2 = a_2 + (\chi + \tilde{\beta} B_0^2)\, k^2 a_1 + A_0^2 k^2$

$$b_3 = a_3 + (\chi + \tilde{\beta} B_0^2)\, k^2 a_2 + \frac{A_0^2 k_T c_S^2 k^4}{c_p p_0} \qquad b_4 = (\chi + \tilde{\beta} B_0^2)\, k^2 a_3 .$$

Dalla (3.8) si deduce che $\forall\lambda > \lambda_T$, con λ_T dato dalla (3.7), c'è instabilità e, applicando il criterio di Routh-Hurwitz, si trova che $\forall\lambda < \lambda_T$ c'è stabilità, e ciò qualunque sia il valore dei parametri in gioco.

4 - Casi particolari degni di nota

In questo numero ci proponiamo di indicare in quali casi particolari il valore critico della lunghezza d'onda non è più dato dalla (3.7) ed in quali invece tale formula resta valida.

(1) In propagazione parallela al campo magnetico, se è $k_T \neq 0$ vale la (3.7), mentre se è $k_T = 0$ vale la *formula di Jeans*

$$\lambda_c = \lambda_J = \sqrt{\pi c_S^2 / G\rho_0} \tag{4.1}$$

e ciò indipendentemente dall'essere nulli o meno (separatamente o congiuntamente) i coefficienti α, η, χ, β e $\tilde{\beta}$.

(2) In propagazione ortogonale al campo magnetico sono possibili i seguenti casi

(2.1) $k_T \neq 0 \quad \chi \neq 0 \quad \tilde{\beta} \neq 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_T$

(2.2) $k_T \neq 0 \quad \chi \neq 0 \quad \tilde{\beta} = 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_T$

(2.3) $k_T \neq 0 \quad \chi = 0 \quad \tilde{\beta} \neq 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_T$

(2.4) $k_T \neq 0 \quad \chi = 0 \quad \tilde{\beta} = 0 \, : \, \lambda_c = \tilde{\lambda}_T$ con

$$\tilde{\lambda}_T = \sqrt{\pi(c_T^2 + A_0^2)/G\rho_0}\,. \tag{4.2}$$

(2.5) $k_T = 0 \quad \chi \neq 0 \quad \tilde{\beta} \neq 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_J$

(2.6) $k_T = 0 \quad \chi \neq 0 \quad \tilde{\beta} = 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_J$

(2.7) $k_T = 0 \quad \chi = 0 \quad \tilde{\beta} \neq 0 \, : \, \lambda_c = \lambda_J$

(2.8) $k_T = 0 \quad \chi = 0 \quad \tilde{\beta} = 0 \, : \, \lambda_c = \tilde{\lambda}_J$ con

$$\tilde{\lambda}_J = \sqrt{\pi(c_S^2 + A_0^2)/G\rho_0}\,. \tag{4.3}$$

Le conclusioni (2.1)-(2.8) sussistono indipendentemente dall'essere nulli o meno (separatamente o congiuntamente) i coefficienti α, η e β.

5 - Conclusioni

A completamento dei risultati di [2] e [7]$_1$, per la instabilità gravitazionale secondo Jeans di un ISF in presenza di dissipazione, col presente lavoro si traggono le conclusioni che seguono.

In propagazione parallela al campo magnetico.

Viscosità, conducibilità elettrica finita, corrente di Hall e corrente di ion slip non hanno alcun effetto sul valore di λ_c, al contrario della conducibilità termica, risultando $\lambda_c = \lambda_T$ (con λ_T data da 3.7)) se $k_T \neq 0$ e $\lambda_c = \lambda_J$ (con λ_J data da (4.1)) se $k_T = 0$.

In propagazione ortogonale al campo magnetico.

(1) Viscosità e corrente Hall continuano a non avere alcun effetto su λ_c.

(2) La conducibilità elettrica finita in presenza di corrente di ion slip non influenza λ_c, al contrario di quanto accade in assenza di detta corrente (si confronti in 4 il caso (2.1) col (2.3), il (2.2) col (2.4), il (2.5) col (2.7) e il (2.6) col (2.8)).

(3) La corrente di ion slip non influenza λ_c se $\chi \neq 0$ (si confronti il caso (2.1) col (2.2) e il (2.5) col (2.6)), mentre influenza λ_c se è $\chi = 0$ e ciò sia se $k_T \neq 0$ (si confronti il caso (2.3) col (2.4)) sia se $k_T = 0$ (si confronti il caso (2.7) col (2.8)).

(4) La conducibilità termica influenza sempre λ_c (si confronti il caso (2.1) col (2.5), il (2.2) col (2.6), il (2.3) col (2.7) e il (2.4) col (2.8)).

Terminiamo osservando che, anche per un ISF, sia in propagazione parallela che ortogonale al campo magnetico, la presenza di conducibilità termica non trascurabile ha una influenza rimarchevole sulla instabilità gravitazionale: infatti tale presenza produce una alterazione del valore critico di Jeans della lunghezza d'onda introducendovi la velocità isoterma del suono al posto di quella adiabatica (λ_J si muta in λ_T e $\tilde{\lambda}_J$ in $\tilde{\lambda}_T$).

Bibliografia

[1] J. P. BAPTISTA and D. GERBAL, *The Jean's instability in an expanding medium*, Astrophys. and Space Sci. 73 (1980), 349-353.

[2] C. BORTONE and G. PELLICCIARDI, *Gravitational instability of a plasma with anisotropic electric current*, Rend. Mat. (7) 2 (1982), 291-301.

[3] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, University Press, Oxford, 1961 (n.i. 119, 120).

[4] S. CHANDRASEKHAR and E. FERMI, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, Astrophys. J. **118** (1953), 116-141.

[5] L. DERWIDUÉ, *Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique*, Masson, Paris, 1957.

[6] L. P. GRISHCHUK and YA. B. ZEL'DOVICH, *Gravitational instability in a multicomponent fluid*, Soviet Astronom. **25** (1981), 267-272.

[7] G. MATTEI: [•]$_1$ *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma dissipativo in presenza di effetto Hall*, Ann. Mat. Pura Appl. **117** (1978), 387-395; [•]$_2$ *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 170-176; [•]$_3$ *Sulla propagazione ondosa in un gas in presenza di irraggiamento termico*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1980), 88-94; [•]$_4$ *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans in presenza di irraggiamento termico e rotazione*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **30** (1981), 108-113; [•]$_5$ *Sulla propagazione ondosa in un fluido in presenza di correnti di Hall e di ion slip*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **33** (1984), 113-123.

[8] V. MILLUCCI, *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma dissipativo in presenza di effetto Hall e di irraggiamento termico*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 387-396.

[9] M. R. RAGHAVACHAR, *Gravitational instability in the presence of suspended particles and rotation*, Phys. Fluids 22 (1979), 999-1001.

[10] G. REMORINI: [•]$_1$ *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **31** (1982), 285-290; [•]$_2$ *Propagazione ondosa e instabilità in un plasma rotante anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 257-267.

[11] R. S. SENGAR, *Magnetogravitational instability of a finitely-conducting medium with variable streaming motion*, Astrophys. and Space Sci. **89** (1983), 285-291.

[12] K. C. SHARMA, *Gravitational instability of a Hall plasma in the presence of suspended particles*, Astrophys. and Space Sci. **85** (1982), 263-269.

[13] R. C. SHARMA and K. C. SHARMA, *Suspended particles and the gravitational instability of a rotating plasma*, Astrophys. and Space Sci. **71** (1980), 325-332.

Summary

In this paper we study Jeans' gravitational instability of an electrically-conducting gas described by the magnetofluiddynamic equations in the presence of the Hall and ion slip currents. Viscosity, heat conductivity and finite electrical conductivity are taken into account. The critical value of the wavelength is determined and the condition for the gravitational instability is discussed. Several noteworthy particular cases are then examined.

***