Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 293-302

L. M. ABATANGELO e M. PERTICHINO (*)

Una caratterizzazione di insiemi di classe $[0, 1, n-1, n, 2n-1]$ (**)

1 – Sia K un k-insieme di un piano protettivo $\pi = \pi_q$, non necessariamente desarguesiano. Indicati con t_i il numero delle rette di π che incontrano K in i punti, diciamo *caratteri* di K gli interi $t_0, t_1, \ldots, t_{q+1}$. Seguendo le usuali definizioni (cfr. Tallini [5]), diremo che K è un k-insieme di *classe* $[m_0, m_1, \ldots, m_s]$, con $0 \leq m_0 < m_1 \ldots m_s \leq q+1$, se $t_n = 0$, per ogni $n \neq m_0, m_1, \ldots, m_s$; inoltre se K è di classe $[m_0, m_1, \ldots, m_s]$ con $t_{m_i} \neq 0$, per ogni $i = 0, 1, \ldots, s$, K è di *tipo* $(m_0, m_1, \ldots, m_s)$.

I k-insiemi con due o tre caratteri diversi da zero, sono stati ampiamente studiati (cfr. [6]; per una esauriente bibliografia cfr. [4]). Pochi e sporadici sono invece i risultati finora noti sui k-insiemi con più di tre caratteri diversi da zero. Il problema generale della loro determinazione, classificazione e caratterizzazione sembra piuttosto arduo. Tuttavia, in taluni casi, è possibile ottenere significative caratterizzazioni di k-insiemi, non appena si assumano opportune ipotesi sui loro caratteri. Lo scopo della presente Nota è introdurre e caratterizzare una vasta famiglia di $m(2m-1)$-insiemi di classe $[0, 1, m-1, m, 2m-1]$.

2 – Premettiamo alcuni esempi di $m(2m-1)$-insiemi di classe $[0, 1, m-1, m, 2m-1]$ dedotti da particolare k-archi.

Esempio 1. Sia π un piano protettivo di ordine dispari n e γ una sua ovale, cioè un $(n+1)$-arco. Come è ben noto i suoi punti esterni sono $\frac{1}{2}n(n+1)$ e ve ne sono n sulle rette tangenti, $\frac{1}{2}(n-1)$ sulle rette secanti ed $\frac{1}{2}(n+1)$ sulle rette

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, Via G. Fortunato, 73100 Bari, Italy.

(**) Ricerca eseguita nell'ambito del Progetto di ricerca «Strutture Geometriche Combinatorie e loro applicazioni». — Ricevuto: 26-III-1986.

esterne. Concludendo si ha che l'insieme E dei punti esterni all'ovale costituiscono un $\frac{1}{2}n(n+1)$-insieme di tipo $\left(\frac{1}{2}(n-1),\ \frac{1}{2}(n+1),\ n\right)$.

Posto $\frac{1}{2}(n+1)=m$, E risulta un $m(2m-1)$-insieme di tipo $(m-1,\ m,\ 2m-1)$. Come è ben noto per un punto esterno ad una ovale passano 2 tangenti, $m-1=\frac{1}{2}(n-1)$ rette secanti ed altrettante rette esterne (rispetto all'ovale). Indicato con v_i il numero delle rette i-secanti ad E, per ogni punto P di E si ha

$$v_{m-1}(P)=m-1 \qquad v_m(P)=m-1 \qquad v_{2m-1}(P)=2.$$

Se invece si considerano i punti Q di $\pi-E$, essi o appartengono a γ o risultano interni rispetto a γ. Se $Q\in\gamma$ si ha

$$v_{m-1}(Q)=n=2m-1 \qquad v_m(Q)=0 \qquad v_{2m-1}(Q)=1\,.$$

Infine se Q è un punto di π interno a γ si ha

$$v_{m-1}(Q)=m \qquad v_m(Q)=m \qquad v_{2m-1}(Q)=0\,.$$

Si può pertanto concludere che l'insieme E dei punti di π esterni ad un'ovale γ è un $m(2m-1)$-insieme di tipo $(m-1,\ m,\ 2m-1)$ che gode delle seguenti proprietà:

(2.1) E è uniforme (cioè per i suoi punti $v_i(P)$ sono costanti).

(2.2) Per ogni punto $P\in E \quad v_{m-1}(P)=v_m(P)$.

Esempio 2. Se il piano π è immerso, quale sottopiano di un piano proiettivo π' d'ordine n', l'insieme E dei punti esterni di una ovale di π, risulta essere un $m(2m-1)$-insieme di tipo $(0,\ 1,\ m-1,\ m,\ 2m-1)$, poichè le rette di π' che intersecano π in un sol punto o risultano esterne ad E oppure hanno in comune con E un sol punto.

L'insieme E verifica ancora le proprietà (2.1) e (2.2), inoltre si ha

(2.3) $$v_1(Q)=0 \Longleftrightarrow v_{m-1}(Q)+v_m(Q)+v_{2m-1}(Q)>1.$$

3 – Al fine di caratterizzare gli esempi del numero precedente, studiamo alcune proprietà generali dei b-insiemi, con $b=n(2n-1)$ ed $n\geq 3$, di classe $[0,\ 1,\ n-1,\ n,\ 2n-1]$ di un piano proiettivo finito $\pi=\pi_m$.

Proposizione 3.1. *Se K è un b-insieme, con $b=n(2n-1)$ ed $n\geq 3$, di classe $[0,\ 1,\ n-1,\ n,\ 2n-1]$ tale che per ogni suo punto P sia*

$$v_{n-1}(P)=v_n(P), \tag{3.1}$$

K è uniforme e le rette $(2n-1)$-secanti costituiscono nel piano duale un $2n$-arco.

Dim. Indicato con $v_i(P)$ il numero delle rette i-secanti per P a K si ha

$$(n-2)\,v_{n-1}(P)+(n-1)\,v_n(P)+2(n-1)\,v_{2n-1}(P)=(2n+1)\,(n-1)\,. \tag{3.2}$$

Da qui, essendo $n-1$ primo con $n-2$, segue che $v_{n-1}(P)=\lambda\,(n-1)$, pertanto la (3.2) diventa

$$\lambda(n-2)+v_n(P)+2v_{2n-1}(P)=2n+1\,. \tag{3.3}$$

Tenendo conto della (3.1), si ha

$$\lambda(2n-3)+2v_{2n-1}(P)=2n+1\,. \tag{3.4}$$

Dalla (3.4) segue che λ deve essere dispari, inoltre essendo $2v_{2n-1}(P)\geq 0$, si ha facilmente che $\lambda=1$ per $n\geq 3$.

Si può pertanto concludere che per ogni punto P di K si ha

$$v_{n-1}=n-1 \qquad v_n=n-1 \qquad v_{2n-1}=2\,. \tag{3.5}$$

Si ha allora che il numero complessivo delle rette $(2n-1)$-secanti è

$$t_{2n-1}=2n\,. \tag{3.6}$$

Pertanto, essendo $v_{2n-1}=2$, tali rette si incontrano solo in punti di K e per ogni punto di π passano al più 2 rette $(2n-1)$-secanti. Rimane così provato l'asserto.

Nell'ipotesi della Proposizione 3.1, si ha inoltre che

(3.7) $\qquad t_{n-1}=n(2n-1) \qquad\qquad$ (3.8) $\qquad t_n=(n-1)\,(2n-1).$

Per le $(3.5)_2$, (3.6) e (3.8) si ha il seguente

Corollario. *Le rette n-secanti e le rette $(2n-1)$-secanti incontrano una $(2n-1)$-secante solo in punti di K.*

Dim. Fissata una $(2n-1)$-secante r, per ogni $P \in r \cap K$ passano $(n-1)$ rette n-secanti. Poichè tali punti P sono in numero di $2n-1$, per la (3.8) si ha l'asserto.

In π si ha

$$t_0 + t_1 = m^2 + m + 1 - (t_{n-1} + t_n + t_{2n-1}) \geq 0; \tag{3.9}$$

in forza delle (3.6), (3.7), (3.8) per $m = 2n-1$ risulta $t_0 + t_1 = 0$, cioè $t_0 = t_1 = 0$; proviamo allora

Proposizione 3.2. *Se $n = \frac{1}{2}(m+1)$, K è l'insieme dei punti esterni ad un'ovale di π, di cui le rette $(2n-1)$-secanti sono l'inviluppo tangenziale.*

Dim. Se $Q \notin K$, si ha

$$v_{n-1}(Q) + v_n(Q) + v_{2n-1}(Q) = 2n$$

$$(n-1)\, v_{n-1}(Q) + n v_n(Q) + (2n-1)\, v_{2n-1}(Q) = n(2n-1)$$

dove, per il corollario precedente, $v_{2n-1}(Q)$ può assumere solo i valori 0 ed 1. Pertanto se $Q \notin K$, si ha

$$v_{n-1}(Q) = 2n-1 \qquad v_n(Q) = 0 \qquad v_{2n-1}(Q) = 1 \tag{3.10}$$

$$v_{n-1}(Q) = n \qquad v_n(Q) = n \qquad v_{2n-1}(Q) = 0 \tag{3.11}$$

a seconda che Q appartenga o meno ad una $(2n-1)$-secante.

I punti di tipo (3.10) sono i punti di un'arco H. Infatti, essendo tali punti l'intersezione di una $(n-1)$-secante con una $(2n-1)$-secante, per le (3.5), (3.6) e (3.10) si ha che su ogni $(n-1)$-secante ve ne sono due, su ogni $(2n-1)$-secante ve ne è uno solo, mentre le rette n-secanti risultano esterne a tale arco. Inoltre la cardinalità di H è $2n$ (cfr. Corollario). Si ha così l'asserto.

Si è così riottenuta una caratterizzazione già nota dell'esterno di una conica (cfr. [3]).

Dalla (3.9) per $m > 2n-1$, si ha che $t_0 + t_1 > 0$.

Teorema. *Se $m > 2n-1$, ogni b-insieme, con $b = n(2n-1)$ e $n \geq 3$, di tipo $(0, 1, n-1, n, 2n-1)$ verificante le (2.1), (2.2) e (2.3), è l'insieme dei punti* *esterni di un'ovale di un sottopiano di π. Inoltre le rette $(2n-1)$-secanti sono l'inviluppo tangenziale di tale ovale.*

Dim. Se $Q \notin K$, si ha

$$v_1(Q) + (n-1)\, v_{n-1}(Q) + n v_n(Q) + (2n-1)\, v_{2n-1}(Q) = n(2n-1)\,. \tag{3.13}$$

Tenendo poi conto del Corollario precedente, si ha

$$v_{2n-1}(Q) = 1 \quad \text{oppure} \quad v_{2n-1}(Q) = 0;$$

inoltre si ha

$$v_{2n-1}(Q) = 1 \Longrightarrow v_n(Q) = 0\,.$$

Si può allora concludere, in forza della (2.3), che un punto $Q \notin K$ di una $(2n-1)$-secante o è di tipo $Q_0(\notin K)$ con

$$v_{2n-1}(Q_0) = 1 \qquad v_n(Q_0) = 0 \qquad v_{n-1}(Q_0) = 2n-1 \qquad v_1(Q_0) = 0 \tag{3.14}$$

oppure è del tipo

$$v_{2n-1}(Q) = 1 \qquad v_n(Q) = v_{n-1}(Q) = 0 \qquad v_1(Q) = (n-1)\,(2n-1)\,. \tag{3.15}$$

Dal computo del numero delle rette $(n-1)$-secanti incidenti una $(2n-1)$-secante segue, con ragionamenti analoghi a quelli visti nella dimostrazione del Corollario, che vi è un sol punto Q_0 di tipo (3.14) mentre tutti gli altri sono di tipo (3.15).

Se invece $v_{2n-1}(Q) = 0$, la (3.13) diventa

$$v_1(Q) + (n-1)\, v_{n-1}(Q) + n v_n(Q) = n(2n-1)\,. \tag{3.16}$$

Allora, esclusi i casi per cui $v_i(Q) > 0$, si ha che la (3.16) diventa

$$(n-1)\, v_{n-1}(Q) + n v_n(Q) = n(2n-1)\,.$$

Si può pertanto concludere che

$$v_{n-1}(Q) = \lambda n \tag{3.17}$$

$$v_n(Q) = 2n - 1 - \lambda(n-1)\,. \tag{3.18}$$

Inoltre, se si interseca il fascio di rette aventi per centro un tale punto Q con una $(2n-1)$-secante s non passante per Q, in forza della (2.3), si ha

$$v_{n-1}(Q) + v_n(Q) = 2n\,. \tag{3.19}$$

Infatti risulta $v_1(Q) = 0 = v_{2n-1}(Q)$ ed ogni retta i-secante, con $i = n-1$ ed $i = n$, incontra s solo in punti di K o nell'unico punto Q_0 di s, verificante le (3.14).

Dalle (3.17), (3.18) e (3.19) si ha $\lambda = 1$ e quindi

$$v_1(Q) = 0 \qquad v_{n-1}(Q) = v_n(Q) = n \qquad v_{2n-1}(Q) = 0\,. \tag{3.20}$$

Tenendo conto delle (3.5) e della (3.7) si ha che su ogni n-secante vi sono n di tali punti.

Possiamo pertanto concludere che i punti Q di π che non appartengono a K per cui si ha $v_1(Q) = 0$ sono o di tipo (3.14) o di tipo (3.20). Indicati con Γ i $2n$ punti di tipo (3.14) e con I l'insieme dei punti di tipo (3.20), si ha

$$|I| = (n-1)(2n-1)\,.$$

Indichiamo inoltre con T_i l'insieme delle rette i-secanti K. Consideriamo allora, la struttura di incidenza τ, rispetto alla usuale relazione di inclusione, i cui punti siano gli elementi dell'insieme $\mathscr{P} = K \cup \Gamma \cup I$ e le cui rette siano gli elementi di $\mathscr{R} = T_{n-1} \cup T_n \cup T_{2n-1}$. È facile verificare, [1], [2], che essa è un piano proiettivo π_0, che pertanto risulta un sottopiano di π. Γ risulta un $2n$-arco di tale sottopiano π_0.

Infatti tenendo conto delle (3.5), (3.6) e (3.14) si ha che: su ogni $(n-1)$-secante vi sono due punti di Γ; su ogni $(2n-1)$-secante vi è un sol punto di Γ, mentre le rette n-secanti sono esterne. Rimane così provato l'asserto.

4 – Il seguente esempio mostra che le condizioni (2.1), (2.2) e (2.3) sono essenziali per la validità della caratterizzazione data dal Teorema.

Si consideri un piano proiettivo di Galois $\pi = PG(2, q)$, $q = p^{2h}$, p primo e $p \neq 2, 5$, tale che l'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ abbia due soluzioni in $GF(q)$, cioè tale che 5 sia un quadrato di $GF(q)$. Sia t un elemento di $GF(q)$ tale che $t^2 + t - 1 = 0$.

Si consideri in $PG(2, q)$ il gruppo G generato dalle seguenti omografie α e β rispettivamente di equazioni

$$\alpha:\quad \rho x' = x + y - z \qquad \rho y' = (t+1)\,y - z \qquad \rho z' = (t+2)\,y - z$$

$$\beta:\quad \rho x' = y \qquad \rho y' = x \qquad \rho z' = z\,.$$

Il gruppo G risulta isomorfo al gruppo alterno $\mathscr{A}_5$, essendo

$$\alpha^5 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 .$$

Considerato il punto $C_1(1, 1, 0)$ di π si ha la seguente

Proposizione 4.1. *Lo stabilizzatore di C_1 è un gruppo di Klein formato dalle involuzioni β, $\gamma = \alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^2$, $\beta\gamma$ e dall'identità.*

Dim. Sia $\gamma = \alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^2$ la collineazione di equazioni

$$\rho x' = y - z \qquad \rho y' = x - z \qquad \rho z' = -z .$$

Considerata allora la collineazione $\beta\gamma$ di equazioni

$$\rho x' = x - z \qquad \rho y' = y - z \qquad \rho z' = -z ,$$

è facile verificare che sia γ che $\beta\gamma$ sono involuzioni che lasciano fisso C_1. Pertanto il gruppo $K = \{1, \beta, \gamma, \beta\gamma\}$ è un gruppo di Klein che lascia fisso C_1. Vogliamo far vedere che K è lo stabilizzatore di C_1 in $\mathscr{A}_5$. A tale scopo è sufficiente verificare che C_1 non risulta essere unito in alcuno dei sottogruppi di G che contengono K propriamente. Essendo $G \approx \mathscr{A}_5$, è noto che G ha un solo sottogruppo V, che contiene propriamente K, è contenuto propriamente in G e risulta isomorfo ad $\mathscr{A}_4$.

Considerata l'omografia $\delta = \alpha^2\beta\alpha^4$ di equazioni

$$\rho x' = y + (t-1)z \qquad \rho y' = y - tz \qquad \rho z' = x + y - z ,$$

si ha $\delta^3 = 1$. Essendo $\beta^2 = \delta^3 = (\beta\delta)^3 = 1$, si ha $\langle\beta, \delta\rangle \approx \mathscr{A}_4$. Poichè inoltre si ha $\delta\beta\delta^2 = \gamma$, risulta che K è un sottogruppo di $\langle\beta, \delta\rangle$. L'asserto pertanto discende dal fatto che C_1 non è unito in γ.

Dalla Proposizione 4.1 discende che il punto C_1 ha in G una traiettoria K di lunghezza 15, precisamente si ha

$$K = \{C_1(1,1,0),\ C_2(1,1,2),\ C_3(1,-1,0),\ C_4(t, 2(1-t), 1),$$

$$C_5(2t-1,\ 1-t, 1),\ C_6(1-t,\ 2t-1, 1),\ C_7(2(1-t), t, 1),$$

$$C_8(t+1,\ 1, 1),\ C_9(0, t, 1),\ C_{10}(0, -t, 1),\ C_{11}(1, t+1, 1),$$

$$C_{12}(-t, 0, 1),\ C_{13}(1, 1-t, 1),\ C_{14}(t, 0, 1),\ C_{15}(1-t, 1, 1)\}.$$

Proviamo ora che

Proposizione 4.2. *K è un insieme uniforme di tipo* (0, 1, 2, 3, 5,) *per* $q \geqslant 11$.

Dim. Per come è stato costruito K, segue che G agisce transitivamente su K e pertanto K risulta uniforme. Possiamo perciò limitarci a studiare il comportamento delle secanti a K per un suo punto qualsiasi. Si verifica facilmente che per C_1 passano: due bisecanti C_1C_2, C_1C_3, due trisecanti $C_1C_4C_5$, $C_1C_6C_7$, due 5-secanti $C_1C_9C_{11}C_{12}C_{15}$, $C_1C_8C_{10}C_{13}C_{14}$.

Per ogni punto C di K si ha allora

$$v_2(C) = 2 \qquad v_3(C) = 2 \qquad v_5(5) = 2 .$$

Poichè $q > 5$, per C passano q-5 rette unisecanti.

L'esistenza infine delle rette esterne è assicurato dal computo delle rette tangenti e secanti K. Infatti è facilmente verificato che, indicato con t_i il numero totale delle rette i-secanti, si ha

$$t_2 = 15 \qquad t_3 = 10 \qquad t_5 = 6.$$

Essendo $v_1(C) = q-5$, si ha $t_1 = (q-5)\,15$ e quindi, per $q \geq 11$,

$$t_0 = q^2 + q + 1 - (t_1 + t_2 + t_3 + t_5) = q^2 + q + 1 - 15q + 75 - 31 = q^2 - 14q + 45 > 0 .$$

Rimane così provato che K è un 15-insieme di tipo (0, 1, 2, 3, 5).

Proposizione 4.3. *Le bisecanti di K si incontrano a due a due nei punti di K ed a 3 a 3 oppure a 5 a 5 in punti non appartenenti a K.*

Dim. Il gruppo $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ muta in sè la conica γ di equazione

$$(1 + 2t)(x^2 + y^2) - 2xy - 2t(x + y)z + (3t - 1)z^2 = 0.$$

Consideriamo la polare del punto C_1 rispetto a γ di equazione $x + y - 1 = 0$, che risulta proprio la congiungente C_2C_3.

Per la transitività del gruppo G sull'insieme K, la polarità rispetto a γ definisce una biiezione tra i punti di K e le sue bisecanti. Per le proprietà della polarità, si avrà che i poli delle trisecanti sono punti (non appartenenti a K) per cui passano tre bisecanti ed i poli delle 5-secanti sono punti (non appartenenti a K) per cui passano 5 bisecanti.

Per determinare i punti per cui passano 3 bisecanti si consideri il polo della retta trisecante $C_1C_4C_5$. Poichè tale retta ha equazione

$$x - y + 2 - 3t = 0\,,$$

il suo polo è il punto $D_1(1,0,1)$, per cui passano le seguenti tre bisecanti di K: C_2C_3, $C_{11}C_{13}$, $C_{12}C_{14}$.

Le immagini di D_1 mediante le collineazioni del gruppo godono della stessa proprietà e sono

$$D_2(0,1,1) \qquad D_3(0,1-t,1) \qquad D_4(1,t,0) \qquad D_5(1,t,1) \qquad D_6(1-t,0,1)$$

$$D_7(t,1,1) \qquad D_8(1-t,1-t,1) \qquad D_9(t,1,0) \qquad D_{10}(t,t,1)\,,$$

essendo

$$\alpha(D_1D_2D_3D_4D_5)\,(D_6D_7D_8D_9D_{10}) \qquad \beta(D_1D_2)\,(D_3D_6)\,(D_4D_9)\,(D_5D_7)\,(D_8D_{10})\,.$$

Un procedimento analogo permette di determinare i punti per cui passano 5 bisecanti.

La retta che congiunge i punti $C_1C_9C_{11}C_{12}C_{15}$ ha equazione $x - y + t = 0$. Il suo polo rispetto a γ è il punto $A_1(t, 1-t, 1)$ per cui passano le seguenti 5 bisecanti C_2C_3, C_4C_{14}, C_5C_{13}, C_6C_8, C_7C_{10}.

Le immagini di A_1 mediante le collineazioni del gruppo $\langle\alpha, \beta\rangle$ godono della stessa proprietà e sono

$$A_2(0,1,0) \qquad A_3(1-t,t,1) \qquad A_4(0,0,1) \qquad A_5(1,1,1) \qquad A_6(1,0,0)\,,$$

essendo

$$\alpha(A_1A_2A_3A_4A_5)\,(A_6) \qquad \beta(A_1A_3)\,(A_2A_6)\,(A_4)\,(A_5)\,.$$

Al fine di provare l'asserto, si osservi che nel computo delle intersezioni delle bisecanti un punto dell'insieme $\mathscr{D} = \{D_1, \ldots, D_{10}\}$ vale 6, poichè per esse passano 3 bisecanti, e un punto dell'insieme $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_6\}$ vale 10, poichè per esso passano 5 bisecanti.

Si può pertanto concludere che due bisecanti di K si incontrano oltre che nei punti di K nei punti degli insiemi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{D}$.

Proposizione 4.4. *L'insieme K non risulta essere l'insieme formato dai punti esterni ad una conica di un sottopiano di $PG(2,q)$.*

Dim. Se, infatti, si suppone che tale sottopiano π_0 esista, π_0 deve essere un $PG(2,5)$ essendo $|K|=15$. Ciò non è possibile, poichè la caratteristica di $PG(2,q)$ è diversa da 5.

Si può provare che K è l'insieme dei punti esterni ad un ovale se e solo se $p=5$. Si conclude pertanto:

In $\pi = PG(2,q)$ *con* $q = p^{2h} > 11$, $p \neq 2$ *e* $p \neq 5$, *K è un insieme di tipo* (0, 1, 2, 3, 5) *che verifica le proprietà* (2.1) *e* (2.2) *ma non la* (2.3), *poichè per i punti* A_i *risulta*

$$v_2(A_i) = 5 \qquad v_1(A_i) = 5 \qquad v_3(A_i) = v_5(A_i) = 0\,.$$

Bibliografia

[1] A. Barlotti, *Un'osservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito*, Boll. Un. Mat. Ital. **17** (1962), 394-398.

[2] H. P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[3] O. Ferri, *Una caratterizzazione grafica dell'insieme dei punti esterni ad una ovale in* π_q *(q dispari)*, Rend. Mat. Univ. Roma (1) **14** (1981).

[4] J. W. Hirschfeld, *Projective Geometries over finite fields*, Claredon Press, Oxford 1979.

[5] G. Tallini, *Graphic characterization of algebraic varietes in a Galois space*, Conv. Inter. Geom. Comb., Roma, Sett. 1973, tomo II, Acc. Naz. Lincei (1976), 153-165.

[6] M. Tallini Scafati, *{k, n}-archi di un piano grafico finito con particolare riguardo a quelli a due caratteri*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. (8) **53** (1972), 71-81.

Summary

Let K be a $n(2n-1)$*-set of class* $[0, 1, n-1, n, 2n-1]$ *in a projective plane* π. *We give some necessary and sufficient conditions in order that K is the set of external points to an oval of a subplane of* π.

* * *