Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 237-239

C. Cotti Ferrero (*)

Radicali in quasi-anelli planari (**)

Il problema della caratterizzazione dei radicali dei quasi-anelli planari è stato posto in [**1**]. Qui risolviamo tale problema, osservando inoltre incidentalmente che un quasi-anello planare è semplice se, e solo se, è privo di ideali destri propri.

Per le notazioni ed i risultati elementari ci riferiremo senz'altro ad [**1**]$_1$ riferendoci ad un quasi-anello sinistro N. Indicheremo con A il suo annullatore sinistro, con P il suo radicale primo, con M il suo radicale nil e con $J_n (n = 0, 1, 2)$ i suoi radicali del tipo di Jacobson-Betsch. Indicheremo inoltre con N^+ il gruppo additivo di N.

Iniziamo con una osservazione che, pur non particolarmente legata ai radicali di un quasi-anello, precisa la struttura degli ideali sinistri di un quasi-anello planare.

Osservazione 1. Il semigruppo moltiplicativo di un ideale sinistro I di un quasi-anello planare N è unione di un gruppo destro ed (eventualmente) di elementi dell'annullatore A.

Sia infatti $x \in I \setminus A$: ovviamente l'unità del gruppo moltiplicativo cui x deve appartenere (si ricordino i teoremi di Ferrero sulla struttura dei quasi-anelli planari) sta in $I \setminus A$, e pertanto sta in $I \setminus A$ tutto il predetto gruppo moltiplicativo. Ne segue che $I \setminus A$ è un gruppo destro. Il resto è ovvio.

Abbastanza importante per il seguito è invece la seguente caratterizzazione dei quasi-anelli planari semplici.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito con parziale contributo M.P.I. – Ricevuto: 4-VII-1985.

Teorema 1. *Un quasi-anello planare è semplice se, e solo se, è privo di ideali destri propri.*

Sia infatti N planare, semplice e con ideali destri propri, e sia D la somma di questi ideali destri. Poichè gli ideali destri di N sono nilpotenti (in quanto contenuti in A, cfr. $[1]_2$) risulta che D è nil, e deve dunque essere proprio e anzi nilpotente. Inoltre D è l'unico ideale destro 1-modulare di N perchè N/D (come N-gruppo) è fortemente monogeno (perchè N è planare) e semplice perchè D è ovviamente massimo come ideale destro. Essendo D proprio, si ha che esso coincide con il radicale J_1, che notoriamente è un ideale. Ma questo è assurdo perchè N è semplice. Ne segue che N deve essere privo di ideali destri propri. L'inverso è ovvio.

Teorema 2. *Sia N planare non semplice; risulta $J_2=N$ se, e solo se, A contiene almeno un sottogruppo di N^+ non contenuto nel sostegno dell'ideale destro massimo di N.*

Sia infatti N planare non semplice, con $J_2=N$, e sia D la somma degli ideali destri di N. Dalla dimostrazione del Teorema 1 segue che D deve essere nilpotente, proprio e 1-modulare. Visto che per ipotesi $J_2=N$ si ha che D non deve essere 2-modulare, e questo implica che N possiede N-sottogruppi propri che contengono propriamente D; d'altra parte è ovvio che ogni sottogruppo di N^+ contenuto in A è un N-sottogruppo di N e che (cfr. $[1]_1$) la somma di un N-sottogruppo e di un ideale destro di N deve essere un N-sottogruppo di N; ne segue la tesi. L'inverso è ovvio.

Teorema 3. *Sia N un quasi-anello planare. Allora:*

(1) *se N è non semplice e $J_2 \neq N$, allora $P=M=J_2\neq 0$;*

(2) *il radicale J_2 di N è nullo se, e solo se, A non contiene alcun sottogruppo di N^+;*

(3) *se N è semplice ma non N-semplice, allora $J_1=0$ e $J_2=N$.*

Sia infatti N non semplice e sia M il radicale nil di N; risulta subito che M è non nullo, nilpotente e diverso da N; anzi M è il massimo ideale di N. Si ha pertanto subito che $P=M$ e ovviamente $J_2\neq 0$. Se $J_2\neq N$ allora J_2, essendo un ideale, è contenuto in M; in definitiva è $P=M=J_2$, e abbiamo il caso (1).

Se N è semplice allora, per il Teorema 1, N è privo di ideali destri propri e pertanto $J_2=N$ oppure $J_2=0$, e ovviamente $P=M=J_1=0$.

Risulta tuttavia $J_2=0$ se N non ha N-sottogruppi propri, il che implica che A non contiene sottogruppi di N^+.

Bibliografia

[1] G. Pilz: [•]$_1$ *Near-rings*, North-Holland, 1983; [•]$_2$ *On the structure of planar near-rings*, Institutbericht Linz **79** (1977).

Summary

The radicals of planar near-rings are studied.

* * *