Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 217-225

D. AVERNA e A. FIACCA (*)

Alcuni risultati sui teoremi di G. Scorza Dragoni e L. Tibaldo in spazi astratti (**)

1 - Introduzione

In una nota [10] G. Scorza Dragoni ha studiato, per le funzioni reali di due variabili reali, misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile, il classico Teorema di Lusin sulla quasi continuità delle funzioni misurabili.

Precisamente, l'Autore ha provato che una funzione $f:(t,x)\mapsto f(t,x)$, definita nel rettangolo $R_0=\{(t,x): a\leqslant t\leqslant b,\ c\leqslant x\leqslant d\}$, misurabile (secondo Lebesgue) rispetto a t e continua rispetto a x in R_0, è *quasi continua rispetto a* (t,x) *semiregolarmente rispetto a* x (cfr. qui 2, Proprietà (C_ε)).

Del problema si era occupata poco tempo prima L. Tibaldo [11], la quale aveva conseguito una proposizione che assicurava, nelle stesse ipotesi, che la funzione f è *ε-equiuniformemente continua rispetto a* x (cfr. qui 2, Proprietà ε-E.U.C.).

Le tesi provate da Scorza Dragoni e Tibaldo sono, nella classe delle funzioni misurabili rispetto a t (1), *equivalenti*, almeno nel contesto in cui si pongono i due Autori.

Successivamente molti Autori [3], $[4]_{1,2,3}$, [5], $[6]_{1,2}$, [8] si sono occupati della proprietà di Scorza Dragoni in contesti più generali, in vista delle applicazioni che essa ha nella teoria dei controlli e delle equazioni differenziali generalizzate: M. Q. Jacobs [7] ha fornito, ad esempio, una estensione del Teorema di Scorza Dragoni a funzioni $f: T\times X\to Y$ misurabili rispetto a t e uniformemente continue

(*) Indirizzo degli AA.: D. AVERNA, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, via Archirafi 34, 90123 Palermo, Italy; A. FIACCA, Dipartimento di Matematica Università, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 19–VI–1985.

(1) Abbiamo ritenuto di confrontare le due proprietà in questa classe, poiché le funzioni che soddisfano la proprietà di Scorza Dragoni sono misurabili rispetto a t.

rispetto a x, ove T è uno spazio compatto di Hausdorff con una misura di Radon, X uno spazio metrico separabile e Y uno spazio metrico (cfr. Teorema 2.1 di [7]).

È subito visto che, in questo più ampio contesto, le due proprietà *non* sono più equivalenti: la proprietà di Tibaldo, mantenendoci nella classe delle funzioni misurabili rispetto a t (2), implica la proprietà di Scorza Dragoni, mentre esistono funzioni che verificano la proprietà di Scorza Dragoni ma non quella di Tibaldo (cfr. qui Osservazione 1).

Noi qui in 2, operando nella stessa classe di funzioni $f: T \times X \to Y$ di cui in [7], abbiamo conseguito una proposizione (cfr. Teorema 1) la quale assicura che la generica funzione di detta classe soddisfa la più stringente proprietà di Tibaldo: la nostra proposizione contiene allora strettamente il citato Teorema di Jacobs.

In 3, operando ancora nella classe delle funzioni misurabili rispetto a t, ci siamo posti il problema di attenuare opportunamente la proprietà ε-E.U.C. di Tibaldo in modo da renderla equivalente alla proprietà C_ε, studiando tra l'altro il ruolo che, in tale questione, ha la separabilità dello spazio X che qui, più in generale, abbiamo supposto topologico. Abbiamo così fornito una nuova condizione (cfr. 3, Proprietà A_ε) che essenzialmente è una richiesta di continuità rispetto a x localmente uniforme rispetto a t.

Questa proprietà, nella classe delle funzioni misurabili rispetto a t, rappresenta una condizione necessaria e sufficiente affinché sia verificata la proprietà C_ε (cfr. Teorema 3).

Infine, in 4, facciamo seguire alcune considerazioni a proposito del nostro Teorema 2 e di alcune proposizioni fornite da B. Ricceri in [9].

2 – Siano T uno spazio topologico compatto di Hausdorff, μ una misura di Radon positiva su $T, (X, \rho)$ e (Y, d) spazi metrici (possiamo supporre, senza perdita di generalità, che la metrica d sia limitata) e f una funzione definita in $T \times X$ a valori in Y.

Diremo che la funzione f ha la proprietà di Scorza Dragoni (o Proprietà C_ε) se (cfr. [10], § 1)

(C_ε) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *esiste in corrispondenza un insieme chiuso* $T_\varepsilon \subset T$, *con* $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, *tale che la funzione* $f_{|T_\varepsilon \times X}$ *sia continua.*

Diremo che la funzione f ha la proprietà di Tibaldo (o Proprietà ε-E.U.C.) se (cfr. [11], § 3)

(ε-E.U.C.) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *esiste in corrispondenza un insieme chiuso* $T_\varepsilon \subset T$, *con* $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, *tale che la famiglia di funzioni* $\{f(t, .)\}_{t \in T_\varepsilon}$ *risulta equiuniformemente continua in* X.

(2) È appena il caso di osservare che esistono funzioni che godono della proprietà di Tibaldo e che non sono misurabili rispetto a t (cfr. [12], §5).

Introdotta ora la funzione $\omega: T \times [0, +\infty[\to \boldsymbol{R}$ definita ponendo

$$\omega(t, \delta) = \sup_{\rho(x_1, x_2) \leq \delta} \{d[f(t, x_1), f(t, x_2)]\}, \tag{2.1}$$

sussistono i seguenti due lemmi (cfr. [7], Lemma 2.1 e Lemma 2.2) ([3]).

Lemma 1. *Sia X separabile e la funzione f sia tale che $f(., x)$ sia misurabile per ogni $x \in X$ e $f(t, .)$ sia continua per quasi ogni $t \in T$. In tali condizioni la funzione $\omega(., \delta): T \to \boldsymbol{R}$, $\delta \geqslant 0$, è misurabile.*

Lemma 2. *Sia $f: T \times X \to Y$ uniformemente continua rispetto a x per quasi ogni $t \in T$. In tali condizioni l'applicazione $\omega(t, .)$ è continua nel punto $\delta = 0$ per quasi ogni $t \in T$.*

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema 1. *Supponiamo che lo spazio metrico X sia separabile, che per ogni $x \in X$ la funzione $f(., x)$ sia misurabile e che per quasi ogni $t \in T$ la funzione $f(t, .)$ sia uniformemente continua in X. In tali condizioni la funzione f risulta ε-equiuniformemente continua rispetto a x* (ε-E.U.C.).

Osserviamo intanto che, in virtù del Lemma 1, la funzione $\omega(., \delta)$, $\delta \geqslant 0$, è misurabile. Sia ora T_0 un sottoinsieme misurabile di T con $\mu(T_0) = 0$ tale che, per ogni $t \in T - T_0$, la funzione $\omega(t, .)$ è continua in 0 (cfr. Lemma 2) e inoltre la funzione $f(t, .)$ è uniformemente continua in X.

Poiché risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \omega(t, 1/n) = 0 \qquad \forall t \in T - T_0, \tag{2.2}$$

segue dal Teorema di Egorov ([2], pg. 187) che, fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, esiste un chiuso $T_\varepsilon \subset T$, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che la successione $\{\omega(t, 1/n)\}_{n \in N}$ converge a 0 uniformemente in T_ε.

Proviamo ora che la famiglia di funzioni $\{f(t, .)\}_{t \in T_\varepsilon}$ è equiuniformemente continua in X. Infatti, fissato un numero $\sigma > 0$ esiste un numero naturale $\bar{n} = \bar{n}(\sigma)$ tale che

$$\omega(t, 1/\bar{n}) < \sigma \qquad \forall t \in T_\varepsilon. \tag{2.3}$$

([3]) In realtà, nei Lemmi 2.1 e 2.2 di [7] le ipotesi di continuità e di continuità uniforme sono fatte per ogni $t \in T$, ma si vede facilmente che ci si può limitare a fare queste richieste per quasi ogni $t \in T$.

Posto $\delta = \delta(\sigma) = 1/\tilde{n}$, si ha per l'appunto

$$d[f(t, x_1), f(t, x_2)] \leqslant \omega(t, 1/\tilde{n}) < \sigma \qquad \forall x_1, x_2 \in X \quad \text{con} \quad \rho(x_1, x_2) < \delta . \tag{2.4}$$

Osservazione 1. Le proprietà di Tibaldo e di Scorza Dragoni, nel contesto in cui si pongono i due Autori, sono, nella classe delle funzioni misurabili rispetto a t (4), *equivalenti*. Questa equivalenza *non* continua però a sussistere operando, come in [7] e qui, in un contesto più generale: la proprietà di Tibaldo, se X è separabile, implica la proprietà di Scorza Dragoni (5), mentre esistono funzioni che verificano la proprietà di Scorza Dragoni e che non verificano la proprietà di Tibaldo. Tale è, ad esempio, la funzione $f: [0, 1] \times ([-1, 0[\cup]0, 1]) \to \boldsymbol{R}$ definita da $f(t, x) = t + |x|/x$.

Da quanto detto segue che il Teorema 1 contiene strettamente il già citato Teorema 2.1 di [7].

Osservazione 2. Il Teorema 1 rappresenta inoltre una estensione a spazi astratti del classico Teorema di Tibaldo ([11], § 3) e di un risultato di H. A. Antosiewicz e A. Cellina relativo a multifunzioni ([1], Lemma 1).

3 – Sia X uno spazio topologico e T, μ, Y come nel paragrafo precedente.

Diremo che la funzione f gode della Proprietà (B_ε) se

(B_ε) *fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un chiuso $T_\varepsilon \subset T$, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che la funzione $f_{|T_\varepsilon}(., x)$ sia continua per ogni $x \in X$.*

Diremo inoltre che la funzione f gode della Proprietà (A_ε) se

(A_ε) *fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un chiuso $T_\varepsilon \subset T$, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che, per ogni $(t_0, x_0) \in T_\varepsilon \times X$ e per ogni $\sigma > 0$, esistono un intorno U di t_0 ed un intorno V di x_0 in modo che risulti*

$$d[f(t, x), f(t, x_0)] < \sigma \qquad \forall t \in U \cap T_\varepsilon \qquad \forall x \in V .$$

Sussiste il seguente

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f goda della proprietà (C_ε) è che essa soddisfi le Proprietà (A_ε) e (B_ε).*

---

(4) Cfr. nota (1).

(5) Ciò segue dal Teorema 2.1 di [7], tenendo presente che una funzione che verifica la proprietà ε-E.U.C. è uniformemente continua rispetto a x per quasi ogni $t \in T$.

Dimostriamo prima la parte sufficiente. Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, siano $T'_{\varepsilon/2}$ e $T''_{\varepsilon/2}$ due chiusi determinati rispettivamente in (A_ε) e (B_ε) in corrispondenza di $\varepsilon/2$. L'insieme $T_\varepsilon = T'_{\varepsilon/2} \cap T''_{\varepsilon/2}$ è chiuso e risulta $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$.
Proviamo che la funzione $f_{|T_\varepsilon \times X}$ è continua. Infatti, fissati $(t_0, x_0) \in T_\varepsilon \times X$ e $\sigma > 0$, per la proprietà (A_ε) è possibile determinare un intorno U' di t_0 ed un intorno V di x_0 tali che

$$(3.1) \qquad d[f(t, x), f(t, x_0)] < \sigma/2 \qquad \forall t \in U' \cap T_\varepsilon \qquad \forall x \in V;$$

d'altra parte, per la proprietà (B_ε) è possibile determinare un intorno U'' di t_0 tale che

$$(3.2) \qquad d[f(t, x_0), f(t_0, x_0)] < \sigma/2 \qquad \forall t \in U'' \cap T_\varepsilon .$$

Posto $U = U' \cap U''$, si ha infine

$$(3.3) \qquad d[f(t, x), f(t_0, x_0)] < \sigma \qquad \forall t \in U \cap T_\varepsilon \qquad \forall x \in V.$$

Per quanto riguarda la parte necessaria è intanto subito visto che dalla proprietà (C_ε) discende la proprietà (B_ε). Fissato peraltro $\varepsilon > 0$, sia T_ε un chiuso determinato come in (C_ε). Per ogni $(t_0, x_0) \in T_\varepsilon \times X$ e per ogni $\sigma > 0$, è possibile determinare un intorno U di t_0 ed un intorno V di x_0 di modo che

$$(3.4) \qquad d[f(t, x), f(t_0, x_0)] < \sigma/2 \qquad \forall t \in U \cap T_\varepsilon \qquad \forall x \in V,$$

da cui segue la proprietà (A_ε).

Nel Teorema 2 si può sostituire la condizione (B_ε) con la proprietà
($\tilde{B}_\varepsilon$) [6] *esiste un sottoinsieme denso D di X tale che, fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un chiuso $T_\varepsilon \subset T$, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che la funzione $f_{|T_\varepsilon}(. , x)$ sia continua per ogni $x \in D$.*

Sussiste infatti la seguente

Proposizione 1. *La funzione f soddisfi le condizioni* (A_ε) *e* ($\tilde{B}_\varepsilon$). *In queste ipotesi essa soddisfa la condizione* (B_ε).

Fissato $\varepsilon > 0$, si può supporre, senza perdita di generalità, che il chiuso T_ε della ($\tilde{B}_\varepsilon$) e della (A_ε) sia lo stesso.

---

[6] La condizione ($\tilde{B}_\varepsilon$), come risulterà chiaro dall'Esempio 1, è più debole della condizione (B_ε).

Dimostriamo che la funzione $f_{|T_\varepsilon}(.\,, x_0)$ è continua per ogni $x_0 \in X$. Fissati $t_0 \in T_\varepsilon$ e $\sigma > 0$, per la Proprietà (A_ε) è possibile determinare un intorno U' di t_0 ed un intorno V di x_0 in modo che

$$d[f(t, x), f(t, x_0)] < \sigma/3 \qquad \forall t \in U' \cap T_\varepsilon \qquad \forall x \in V. \tag{3.5}$$

Poiché D è denso in X, esiste un punto $q_0 \in D \cap V$. D'altra parte, per la proprietà (B_ε), la funzione $f_{|T_\varepsilon}(.\,, q_0)$ è continua ed è possibile quindi determinare un intorno U'' di t_0 con la proprietà

$$d[f(t, q_0), f(t_0, q_0)] < \sigma/3 \qquad \forall t \in U'' \cap T_\varepsilon. \tag{3.6}$$

Posto quindi $U = U' \cap U''$, risulta per l'appunto

$$d[f(t, x_0), f(t_0, x_0)] < \sigma \qquad \forall t \in U \cap T_\varepsilon. \tag{3.7}$$

Come è stato anticipato nella nota (6), la condizione ($\tilde{B}_\varepsilon$) è più debole della (B_ε) anche se lo spazio X è separabile: ciò risulta dal seguente

Esempio 1. Siano $T = [0, 1]$, μ la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $X = [0, 1]$ e Y l'insieme dei numeri reali con la metrica usuale. Sia inoltre $f: [0, 1] \times [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ la funzione definita ponendo

$$f(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = x \\ 0 & \text{se } t \neq x. \end{cases}$$

Tale funzione soddisfa la condizione ($\tilde{B}_\varepsilon$), essendo $f(.\,, x)$ misurabile per ogni $x \in X$ (cfr. successiva Proposizione 2). Essa *non* soddisfa però la Proprietà (B_ε). Infatti, sia T_1 un qualunque sottoinsieme chiuso di T con $\mu(T - T_1) < 1$.
È $T_1 \neq \phi$ e la $f(.\,, \bar{t})$ non è continua in $\bar{t} \in T_1$.

Se $\{f(.\,, n)\}_{n \in N}$ è una successione di funzioni misurabili definite in T ed a valori in Y, fissato un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un chiuso $T_\varepsilon \subset T$, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che le funzioni $f_{|T_\varepsilon}(.\,, n)$ siano continue per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. A tal fine, sarà sufficiente scegliere $T_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{n,\varepsilon}$ ove $T_{n,\varepsilon}$ è un chiuso contenuto in T, con $\mu(T - T_{n,\varepsilon}) < \varepsilon/2^n$, tale che la funzione $f_{|T_{n,\varepsilon}}(.\,, n)$ sia continua. Da ciò segue immediatamente la seguente

Proposizione 2. *Se X è uno spazio topologico separabile e la funzione $f(.\,, x)$ è misurabile per ogni $x \in X$, allora f soddisfa la Proprietà* ($\tilde{B}_\varepsilon$).

Siamo ora in grado di formulare la seguente caratterizzazione delle funzioni che godono della proprietà di Scorza Dragoni, nel caso in cui X sia uno spazio topologico separabile.

Teorema 3. *Sia X uno spazio topologico separabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f goda della Proprietà* (C_ε) *è che essa soddisfi la Proprietà* (A_ε) *ed inoltre $f(.,x)$ sia misurabile per ogni $x \in X$.*

La dimostrazione segue immediatamente dalle Proposizioni 1 e 2 e dal Teorema 2.

Osservazione 3. Vogliamo osservare che, se X *non* è separabile, la parte sufficiente del Teorema 3 *non* sussiste, così come *non* sussiste in generale la Proposizione 2 (cfr. [9], Esempio 2.1).

4 – In questo paragrafo ci limitiamo a fare alcune considerazioni a proposito di un risultato conseguito da B. Ricceri (Teorema 2.2 di [9]) (7) e del nostro Teorema 2.

Formuliamo intanto la seguente

Proposizione 3. (8) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f goda della proprietà di Scorza Dragoni è che siano verificate le seguenti due condizioni.*

(1) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esista un sottoinsieme chiuso T_ε di T, con $\mu(T - T_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che la funzione $f_{|T_\varepsilon}(.,x)$ sia continua per ogni $x \in X$.*

(2) *Esista una funzione φ definita in $T \times X \times X$ ed a valori in $\boldsymbol{R}_0^+$ con le seguenti proprietà:*

(i)$_1$ $\varphi(t,x,x) = 0 \qquad \forall (t,x,x) \in T \times X \times X;$

(i*)$_2$ *per ogni $\varepsilon > 0$ esista un sottoinsieme chiuso T'_ε di T, con $\mu(T - T'_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che*

(α) *la funzione $\varphi_{|T'_\varepsilon}(.,x,y)$ è semicontinua superiormente $\forall x, y \in X$,*

(β) *la funzione $\varphi_{|T'_\varepsilon \times X}(.,.,y)$, $y \in X$, è semicontinua superiormente nei punti $(t,y) \in T'_\varepsilon \times X$;*

(i)$_3$ *per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $t \in T$ esista un numero $\delta > 0$ tale che $d[f(t,x), f(t,y)] < \varepsilon$ per ogni $x, y \in X$ con $\varphi(t,x,y) < \delta$.*

---

(7) Si possono fare considerazioni analoghe relativamente al Teorema 2.1 di [9].

(8) Di questa proposizione omettiamo la dimostrazione poiché del tutto simile a quella fornita da Ricceri in [9].

Tale proposizione, equivalente al Teorema 2.2 di [9], consente però di ampliare la classe delle funzioni φ che intervengono nel predetto Teorema.

Infatti, è ovvio che le funzioni φ che verificano la $(\mathrm{i})_2$ del Teorema 2.2 verificano la $(\mathrm{i}^*)_2$ della Proposizione 3, mentre esistono funzioni f per le quali è possibile trovare una φ soddisfacente la condizione $(\mathrm{i}^*)_2$ ma *non* la $(\mathrm{i})_2$, come si può vedere dal seguente

Esempio 2. Essendo $T=[0,1]$, μ la misura di Lebesgue, $X=[-1,0[\cup]0,1]$, $Y=\boldsymbol{R}$, andiamo a considerare la funzione $f\colon T\times X\to Y$ con $f(t,x)=|x|$. È subito visto che questa funzione verifica le condizioni della Proposizione 3 ove si assuma

$$\varphi(t,x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se } |x|=|y| \\ |x-y| & \text{se } |x|\neq|y|, \end{cases}$$

mentre la φ così scelta *non* verifica la $(\mathrm{i})_2$ del Teorema 2.2 di [9].

Vogliamo poi osservare che la richiesta fatta nel Teorema 2.2 della esistenza di una funzione φ semicontinua superiormente è equivalente alla richiesta che sia semicontinua superiormente la funzione $\varphi(t,x,y)=d[f(t,x),f(t,y)]$. Infatti, assumendo $\varphi(t,x,y)=d[f(t,x),f(t,y)]$, è facile verificare che le condizioni di Ricceri si mantengono ancora necessarie (oltre che sufficienti) ai fini della validità della proprietà di Scorza Dragoni.

Osserviamo inoltre che, assumendo $\varphi(t,x,y)=d[f(t,x),f(t,y)]$, la condizione $(\mathrm{i})_2$ del più volte citato Teorema di [9] è equivalente alla $(\mathrm{i}^*)_2$ della nostra Proposizione 3, mentre la altre coincidono. Poiché in questo caso la (α) della Proposizione 3 diventa superflua, in quanto conseguenza dell'ipotesi (1), è subito visto che, con questa scelta della funzione φ, è possibile conseguire il nostro Teorema 2 dalla Proposizione 3.

Bibliografia

[1] H. A. Antosiewicz and A. Cellina, *Continuous selections and differential relations*, J. Differential Equations **19** (1975), 386-398.

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1952 (chap. I-IV).

[3] P. Brunovsky, *Scorza-Dragoni's theorem for unbounded set-valued functions and its applications to control problems*, Mat. Casopis **20** (1970), 205-213.

[4] C. CASTAING: [•]$_1$ *Sur les multi-applications mesurables*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle 1 (1967), 91-126; [•]$_2$ *Sur le graphe d'une multi-application souslinienne (mesurable)*, Secrétariat des Math. de la Faculté des Sciences de Montpellier, Publication No. 55, 1969-1970; [•]$_3$ *Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **271** (1970), 396-398.

[5] C. J. HIMMELBERG, *Precompact contraction of metric uniformities and the continuity of $F(t, x)$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **50** (1973), 185-188.

[6] C. J. HIMMELBERG and F. S. VAN VLECK: [•]$_1$ *Lipschitzian generalized differential equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 48 (1972), 159-169; [•]$_2$ *An extension of Brunovsky's Scorza-Dragoni type theorem for unbounded set-valued functions*, Math. Slovaca **26** (1976), 47-52.

[7] M. Q. JACOBS, *Remarks on some recent extensions of Filippov's implicit function lemma*, SIAM J. Control 5 (1967), 622-627.

[8] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, New York, 1964.

[9] B. RICCERI, *Su due caratterizzazioni della proprietà di Scorza-Dragoni*, Matematiche (Catania) **35** (1980), 149-154.

[10] G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **17** (1948), 102-106.

[11] L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. **2** (1947), 146-152.

[12] C. VINTI, *Una ripartizione del continuo ed una osservazione sulle funzioni continue rispetto ad una e non misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **27** (1957), 253-266.

Summary

This paper contains some considerations about a theorem of Tibaldo and Scorza-Dragoni's property. In particular, after stating an extension of Tibaldo's theorem, we characterize Scorza-Dragoni's property in a general context (in which the well-known Carathéodory's conditions does not imply Scorza-Dragoni's property).

* * *