Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 195-201

GABRIEL PRIPOAE (*)

Connexions de Schouten et de Vrănceanu sur des f-variétés (**)

Introduction

Les connexions classiques de Schouten et de Vrănceanu ont été pour la première fois étudiées en forme invariante dans quelques articles de S. Ianus et I. Popovici [2], [3]. Il s'agit des connexions linéaires sur des variétés presque produit, intimement liées à la structure du point de vue intégrabilité, parallélisme des distributions, etc.

Nous avons généralisé $[5]_{1,2}$ ces connexions, premièrement par l'addition d'un certain tenseur de type (1, 2) et deuxièment en introduisant la classe des connexions de type Schouten et de type Vrănceanu; toutes les considérations que nous avons faites sont valables sur des variétés presque produit ou presque complexes.

Dans cette Note on étudie les deux types de connexions pour la structure canonique presque produit induite sur une f-variété. On met on évidence la liaison entre l'intégrabilité de la structure et la connexion Schouten (2) et on définit certains types de compatibilité des connexions avec la f-structure (3).

1 – Soit M une variété différentiable n dimensionnelle; $\mathscr{C}(M)$ le module affine [1] des connexions linéaires sur M; $\mathscr{T}^r_s(M)$ le module des tenseurs de type (r, s); pour $\mathscr{T}^1_0(M)$ on utilise la notation $\mathscr{X}(M)$. Tous les objets géométriques sont de classe C^∞.

On suppose que M est un f-variété, donc qu'il existe $f \in \mathscr{T}^1_1(M)$ t.q.

$$f^3 + f = 0 .$$

(*) Indirizzo: 209, Rue Moşilor, Bl. 17, Sc. II, et. 3 apt. 43, Sect. 2, 70314 Bucarest, Roumanie.

(**) Ricevuto: 15-IV-1985.

En notant $l=-f^2$, $m=f^2+1$, on a [9]

$$l+m=f \qquad l^2=l \qquad m^2=m \qquad lm=ml=0$$

$$lf=f \qquad fm=mf=0 \qquad f^2l=-l \qquad f^2m=0\,.$$

Soit $P=2f^2+I$.
Il résulte $P^2=I$, donc P est une structure presque produit sur M. Elle définit deux distributions globales complémentaires (à l'aide des projecteurs m et l), qu'on va noter par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Dans ce qui suit $\nabla\in\mathscr{C}(M), B, D\in\mathscr{T}^1_2(M)$ seront fixés.

On appèlle *connexion Schouten généralisée* une connexion linéaire $\overline{\nabla}$ définie par [5]$_1$

$$\overline{\nabla}_X Y = m\nabla_X mY + l\nabla_X lY + B(X,Y) \quad \text{avec} \tag{1.1}$$

$$mB(X,mY)=lB(X,lY)=0\,. \tag{1.2}$$

La *connexion Vrănceanu généralisée* $\tilde{\nabla}$ est définie par [5]$_1$

$$\tilde{\nabla}_X Y = m\nabla_{mX} mY + l\nabla_{lX} lY + m[lX,mY] + l[mX,lY] + D(X,Y) \quad \text{avec} \tag{1.3}$$

$$mD(mX,mY)=lD(lX,lY)=0\,. \tag{1.4}$$

Proposition 1.1. *Par rapport à la f-structure, les relations* (1.1)-(1.4) *s'écrivent*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + f^2\nabla_X Y + \nabla_X f^2 Y + 2f^2\nabla_X f^2 Y + B(X,Y)\,,$$

$$f^2B(X,Y)+B(X,f^2Y)+B(X,Y)=0\,,$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \nabla_{f^2X} f^2Y + \nabla_X f^2 Y + \nabla_{f^2X} Y + f^2\nabla_X Y + f^2\nabla_{f^2X} Y$$
$$+ f^2\nabla_X f^2 Y - [f^2X, f^2Y] - [f^2X, Y] + f^2[X, f^2Y] - f^2[f^2X, Y] + D(X,Y)\,,$$

$$f^2D(X,f^2Y)+f^2D(f^2X,Y)+f^2D(X,Y)$$
$$+D(f^2X,f^2Y)+D(X,f^2Y)+D(f^2X,Y)+D(X,Y)=0\,.$$

Remarque 1.2.1. Soient

$$\tilde{p}_B : \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M), \quad \tilde{p}_B(\nabla) = \overline{\nabla}, \quad \tilde{p}_D : \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M), \quad \tilde{p}_D(\nabla) = \tilde{\nabla}.$$

Les relations (1.2) et (1.4) sont des conditions necessaires et suffisantes pour que $\tilde{p}_B$ et $\tilde{p}_D$ soient projecteurs.

Remarque 1.2.2. $\tilde{p}_B \circ \tilde{p}_D = \tilde{p}_D$ si et seulement si

$$B(X, Y) + D(X, f^2Y) + f^2D(X, Y) + 2f^2D(X, f^2Y) = 0 .$$

Remarque 1.2.3. $\tilde{p}_D \circ \tilde{p}_B = \tilde{p}_D$ si et seulement si $B(f^2X, Y) = B(X, f^2Y)$.

2 - Parallélisme des distributions $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Intégrabilité de la f-structure

Une distribution $\mathscr{S}$ s'appelle *parallèle par rapport à* ∇ si pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ et $Y \in \mathscr{S}$ on a $\nabla_X Y \in \mathscr{S}$.

Remarque 2.1.1. La distribution $\mathscr{D}$ est parallèle par rapport à $\overline{\nabla}$ si et seulement si pour tout $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ $\quad B(X, lY) = (B(X, Y)$.

Remarque 2.1.2. La distribution $\mathscr{D}'$ est parallèle par rapport à $\overline{\nabla}$ si et seulement si pour tout $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ $\quad B(X, lY) = 0$.

Remarque 2.1.3. Les distributions $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles par rapport à $\overline{\nabla}$ si et seulement si $B = 0$.

Proposition 2.2. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *sont parallèles par rapport à* $\tilde{\nabla}$.

(ii) $\tilde{\nabla}_X P = 0$ *pour tout* $X \in \mathscr{X}(M)$.

(iii) $\tilde{\nabla}_X f^2 = 0$ *pour tout* $X \in \mathscr{X}(M)$.

(iv) $D(X, Y) = lD(mX, lY) + mD(lX, mY)$.

Dém. (ii)$\Leftrightarrow$(iii) est évidente. Dans [5] on montre que (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$ $D(X, Y) = PD(X, PY) = -D(PX, PY)$ ce qui nous mène à (iv).

On sait que les distributions $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont intégrables si $l[mX, mY]=0$ resp. $m[lX, lY]=0$. Le tenseur de Nijenhuis est

$$N(X, Y)=[fX, fY]-f[fX, Y]-f[X, fY]+f^2[X, Y].$$

Deux théorèmes de [7] nous assurent que la f-structure est partiéllement intégrable (resp. intégrable) si et seulement si $N(lX, lY)=0$ (resp. $N=0$).

Proposition 2.3. *Soit*

$$B'(X, Y)=B(X, Y)-B(Y, X) \quad t.q. \quad B'(mX, mY)=B'(lX, lY)=0$$

et soit $\overline{\nabla}$ *de torsion*

$$T=\alpha\otimes l-l\otimes\alpha+\beta\otimes m-m\otimes\beta; \quad \alpha, \beta\in\mathscr{T}^0_1(M).$$

Alors les distributions $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *sont intégrables.*

Dém. On a $[X, Y]=\overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X-\alpha(X)\cdot lY+\alpha(Y)\cdot lX-\beta(X)mY+\beta(Y)mX$ et avec (1.1) on obtient c.q.f.d.

Corollaire 2.4. *Si B est symétrique et si $\overline{\nabla}$ est sans torsion (ou sémi-symétrique) alors les distributions $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont intégrables.*

Proposition 2.5. *Soit $B=0$ et $\overline{\nabla}$ sans torsion. Si*

$$f^2(\nabla_{fX}f)(fY)=f(\nabla_{f^2X}f)(fY), \tag{2.1}$$

alors la f-structure est partiéllement intégrable.

Dém. Par simple calcul on obtient

$$N(X, Y)=a(fX, Y)-a(fY, X)-fa(X, Y)-fa(Y, X)$$

où on a noté $a(X, Y)=f(\nabla_X f)(fY)$. La relation (2.1) satisfaite signifie $a(fX, lY)=fa(lX, lY)$, ce qui implique $N(lX, lY)=0$.

De la même manière on démontre la

Proposition 2.6. *Soit $B=0$ et $\overline{\nabla}$ sans torsion. Si*

$$f^2(\nabla_X f)(fY)=f(\nabla_{fX}f)(fY),$$

alors la f-structure est intégrable.

Remarque 2.7. Dans [6] on montre que, étant données deux distributions globales, il existe une connexion affine qui les fait parallèles; si en plus le système est intégrable, alors la connexion est symétrique.

Pour les distribution $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ définies dans **1**, nous avons une sorte de réciproque: il existe $\bar{\nabla}$ la *connexion de Schouten classique* (pour $B=0$) t.q. $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ soient parallèles. Si en plus $\bar{\nabla}$ est sans torsion, alors les deux distributions sont intégrables.

3 - Connexions compatibles avec la f-structure

Soient les sous-modules affines [1] de $\mathscr{C}(M)$ $C_1, C_2, \ldots, C_7$ définis respectivement par

$$\nabla_X f = 0 \qquad \nabla_X f^2 = 0 \qquad (\nabla_X f)(fY) = 0$$

$$f(\nabla_X f) = 0 \qquad f(\nabla_X f^2) = 0 \qquad (\nabla_X f^2)(fY) = 0 \qquad (\nabla_X f)(fY) = 0.$$

On dit que ∇ est (i)-*compatible avec* f si $\nabla \in C_i, \quad i = 1, \ldots, 7$.

Remarque 3.1.1. Nous avons les inclusions

$$\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[r] \arrow[dr] & C_5 \\
C_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & C_3 \arrow[dr] & C_6 \\
 & C_4 \arrow[r] & C_7
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.1.2. $\bar{\nabla} \in C_2$ si et seulement si $B=0$.

Remarque 3.1.3. Une caractérisation similaire pour $\tilde{\nabla} \in C_2$ est donnée par la Proposition 2.2.

Remarque 3.1.4. Si $\nabla \in C_1$, alors

$$\bar{\nabla} = \nabla + B, \qquad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - [f^2X, f^2Y] - [f^2X, Y] + f^2[X, f^2Y] + f^2[f^2X, Y] + D(X, Y).$$

Remarque 3.1.5. $\bar{\nabla} \in C_1$ si et seulement si $B=0$ et $\nabla \in C_7$.

Remarque 3.1.6. $\tilde{\nabla} \in C_1$ si et seulement si a lieu (iv) de la Proposition 2.2. et

$$D(X,fY)-fD(X,Y)=f(\nabla_{f^2X}f)(fY)-l[mX,fY]+f[mX,lY].$$

En particulier, si $\nabla \in C_7$ et si $D(X,Y)=-l[mX,lY]-m[lX,mY]$, alors $\tilde{\nabla} \in C_1$.

Remarque 3.1.7, Conformément à la Proposition 2.6 si $B=0$, $\tilde{T}=O$ et $\nabla \in C_7$, alors la f-structure est intégrable.

Dans [4] est donnée une caractérisation des connexions de C_1. Nous allons en trouver une analogue pour C_2 et pour un sous-ensemble remarcable de C_2.

Une connexion ∇ s'appélle *connexion* (*) *par rapport à la structure presque produit* P si $[5]_3$

$$P\nabla_X Y-\nabla_{PX}Y=\tfrac{1}{2}(P[X,Y]-P[PX,PY]+[X,PY]-[PX,Y]).$$

On note $\bar{\mathscr{C}}(M)_B=\operatorname{Im}\bar{p}_B$, $\tilde{\mathscr{C}}(M)_D=\operatorname{Im}\tilde{p}_D$ et l'ensemble des connexions (*) de C_2 avec C_2^*. (Ici il n'est pas nécessaire que $\bar{p}_B$ et $\tilde{p}_D$ soient projecteurs, cf. à la Remarque 1.2.1.)

Proposition 3.2. *On a les relations*

$$C_2=\bigcup_B \{\bar{\mathscr{C}}(M)_B \mid B\in\mathscr{T}_2^1(M) \text{ vérifiant } (3.1)\}$$

$$C_2^*=\bigcup_D \{\tilde{\mathscr{C}}(M)_D \mid D\in\mathscr{T}_2^1(M) \text{ vérifiant } (3.1)\}$$

où

$$f^2B(X,Y)+B(X,f^2Y)+2f^2B(X,f^2Y)=0. \tag{3.1}$$

Dém. On utilise deux résultats de $[5]_3$.

Remarque 3.3. Un tenseur B satisfait (3.1) si et seulement s'il existe $B'\in\mathscr{T}_2^1(M)$ t.q.

$$B(X,Y)=B'(X,Y)+f^2B'(X,Y)+B'(X,f^2Y)+2f^2B'(X,f^2Y).$$

Références

[1] V. Cruceanu, *Sur la définition d'une connexion affine*, C. R. Acad. Sci. Paris **266** (1968), 532-534.

[2] S. IANUS, *Sur les structures presque produit des variétés à connexion linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 272 (1971), 734-735.

[3] S. IANUS and I. POPOVICI, *On the Vrănceanu's nonholonomic connections*, An. Stünţ . Ints. Univ. «Al. I. Cuza» Iaşi **26** (1980), 389-393.

[4] R. MIRON and GH. ATANASIU *Connexions linéaires compatibles avec* (f, g)-*structures*, Proc. Nat. Coll. Geom. Top. Piatra Neamt. (1983), 94-97.

[5] G. PRIPOAE: $[\bullet]_1$ *Sur les connexions de Schouten et de Vrănceanu*, (à paraître); $[\bullet]_2$ *Une généralisation des connexions de Schouten et de Vrănceanu*, Proc. Nat. Coll. Geom. Top. Timisoara (1984); $[\bullet]_3$ *Quelques remarques concernant une classe de connexions linéaires dans un espace doué d'une structure presque produit ou presque complexe* (à paraître).

[6] A. G. WALKER, *Connections for parallel distributions in the large*, Quart. J. Math. Oxford (2) **6** (1955), 301-308.

[7] K. YANO and M. KON, *CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds*, Birkhauser, 1983.

Summary

In this paper are studied the Schouten and Vrănceanu's connections, defined in the natural almost product structure of a f-manifold. We also establish some relations between the integrability of the structure and the Schouten's connections and define some new types of compatibility of connections with the f-structure.

* * *