Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 177-186

M. DE SALVO e D. FRENI (*)

Ipergruppi finitamente generati (**)

1 - Ipergruppi finitamente generati e teoremi di struttura

Per quanto concerne le definizioni e le proprietà di carattere introduttivo, nonchè le notazioni proprie della teoria degli ipergruppi, si rinvia ai lavori $[2]_1$, [8] e alla introduzione di $[4]_2$.

Proviamo le seguenti proprietà.

Proposizione 1.1. *Sia H un ipergruppo e siano H_1, H_2 sottoipergruppi chiusi di H; allora $H_1 \cup H_2$ è un sottoipergruppo di H se, e solo se, $H_1 \subseteq H_2$ oppure $H_2 \subseteq H_1$.*

Dim. Sia $H_1 \cup H_2$ sottoipergruppo di H. Sia per assurdo $H_1 \nsubseteq H_2$, $H_2 \nsubseteq H_1$ e siano $x \in H_1 - H_2$, $y \in H_2 - H_1$. Poichè $H_1 \cup H_2$, è sottoipergruppo, $x \circ y \subset H_1 \cup H_2$. Quindi $\forall u \in x \circ y$ si possono avere due casi

(1.1) $\quad u \in H_1 \qquad\qquad$ (1.2) $\quad u \in H_2$.

Se $u \in H_1$, da $u \in x \circ y$, essendo H_1 chiuso in H, si ha $y \in H_1$, che è un assurdo. Analogamente, se $u \in H_2$ segue $x \in H_2$, che è ancora un assurdo. Quindi, necessariamente, $H_1 \subseteq H_2$ oppure $H_2 \subseteq H_1$. Il viceversa è banale.

Proposizione 1.2. *Sia H un ipergruppo e sia K un sottoipergruppo chiuso di H; allora il più piccolo sottoipergruppo chiuso di H contenente $H - K$ è H.*

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 29-III-1985.

Dim. Sia S il più piccolo sottoipergruppo chiuso di H, contenente $H-K$. Proviamo che $S=H$. Certamente $H=K\cup(H-K)$, per cui, poichè $H-K\subset S$, si ha, a maggior ragione, $H=K\cup S$, quindi $K\cup S$ è un sottoipergruppo. Pertanto per la Proposizione 1.1, $K\subset S$ oppure $S\subset K$. Ma $S\not\subset K$, perchè altrimenti si avrebbe $H-K\subset K$. Quindi $K\subset S$, da cui $H=S$.

Ricordando che in $[4]_2$ si è posto per ogni elemento x di un ipergruppo $x^{[-1]}=\varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1})$ si dimostra facilmente il

Lemma 1.1. *Siano H un ipergruppo, K e T sottoipergruppi parte completa di H e S una parte non vuota di H; allora le seguenti proprietà sono soddisfatte:*

(1.3) $\forall x\in K \quad x^{[-1]}\subset K$;

(1.4) $S\subset K$ *implica* $S^{[-1]}\subset K$ *ove* $S^{[-1]}=\bigcup_{s\in S} s^{[-1]}$;

(1.5) $\varphi(K\circ T)^{-1}\subset\varphi(T\circ K)$ *ove* $\varphi(K\circ T)^{-1}=\{\varphi(x)^{-1}/x\in K\circ T\}$;

(1.6) $\forall s\in S \quad \exists s'\in S^{[-1]}$ *tale che* $\varphi(s)^{-1}=\varphi(s')$;

(1.7) $\forall s'\in S^{[-1]} \quad \exists s\in S$ *tale che* $\varphi(s')^{-1}=\varphi(s)$;

(1.8) $\varphi(S^{[-1]})=\varphi(S)^{-1}$.

Osservazione 1.1. Ricordiamo che se A e B sono parti non vuote di un ipergruppo H e A è parte completa, allora $A\circ B$ e $B\circ A$ sono parti complete.

Teorema 1.1 *Se H è un ipergruppo e K_1, K_2 sono sottoipergruppi parte completa di H, allora $K_1\circ K_2$ e $K_2\circ K_1$ sono sottoipergruppi di H se, e solo se, $K_1\circ K_2=K_2\circ K_1$.*

Dim. Per l'Osservazione 1.1, $K_1\circ K_2=\varphi^{-1}\varphi(K_1\circ K_2)=\varphi^{-1}(\varphi(K_1)\cdot\varphi(K_2))$ ed analogamente $K_2\circ K_1=\varphi^{-1}(\varphi(K_2)\cdot\varphi(K_1))$. Quindi $K_1\circ K_2=K_2\circ K_1$ se, e solo se, $\varphi(K_1)\cdot\varphi(K_2)$ e $\varphi(K_2)\cdot\varphi(K_1)$ sono sottogruppi di H/β^*, ovvero se, e solo se, $K_1\circ K_2$ e $K_2\circ K_1$ sono sottoipergruppi di H.

Nota 1.1. Denotiamo con $\langle S\rangle$, l'intersezione di tutti i sottoipergruppi parte completa di H, contenenti la parte S di H; sia inoltre P_S l'unione di tutti i prodotti di un numero finito di elementi che appartengono a S oppure a $S^{[-1]}$.

Teorema 1.2. *Se S è una parte non vuota di un ipergruppo H, allora $\langle S\rangle=\mathscr{C}(P_S)$.*

Dim. Proviamo che $\mathscr{C}(P_S)$ è un sottoipergruppo di H. Sia $\{x, y\} \subset \mathscr{C}(P_S)$. Allora $\exists (u, v) \in P_S^2$ tale che $x \in \mathscr{C}(u)$, $y \in \mathscr{C}(v)$. Pertanto

$$x \circ y \subset \mathscr{C}(u) \circ \mathscr{C}(v) = \mathscr{C}(u \circ v) \subset \mathscr{C}(P_S).$$

Quindi $\mathscr{C}(P_S)$ è sottosemi-ipergruppo di H. Inoltre $\exists z \in H$ tale che $x \in z \circ y$. Da $x \in \mathscr{C}(u)$ e $y \in \mathscr{C}(v)$ segue $\varphi(x) = \varphi(u)$ e $\varphi(y) = \varphi(v)$. Da $x \in z \circ y$ segue $\varphi(x) = \varphi(z) \cdot \varphi(y)$, da cui $\varphi(z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = \varphi(u) \cdot \varphi(v)^{-1}$. $\{u, v\} \subset P_S$ implica che $\exists \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset S \cup S^{[-1]}$ ed $\exists \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\} \subset S \cup S^{[-1]}$ tali che $u \in \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n$, $v \in \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_m$. Pertanto $\varphi(u) = \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\alpha_n)$ e $\varphi(v) = \varphi(\gamma_1) \cdot \varphi(\gamma_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\gamma_m)$. Quindi

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\alpha_n) \cdot \varphi(\gamma_m)^{-1} \cdot \varphi(\gamma_{m-1})^{-1} \cdot \ldots \cdot \varphi(\gamma_1)^{-1}.$$

Per (1.6) e (1.7), $\exists \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\} \subset S \cup S^{[-1]}$ tale che

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\alpha_n) \cdot \varphi(\mu_1) \cdot \varphi(\mu_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\mu_m) \\ &= \varphi(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_m). \end{aligned}$$

Perciò $z \in \mathscr{C}(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_m) \subset \mathscr{C}(P_S)$. Analogamente si prova che $\exists w \in \mathscr{C}(P_S)$ tale che $x \in y \circ w$. Pertanto $\mathscr{C}(P_S)$ è sottoipergruppo parte completa di H. Proviamo che se K è un sottoipergruppo parte completa di H contenente S, allora $K \supset \mathscr{C}(P_S)$. Sia $x \in \mathscr{C}(P_S)$, allora $\exists t \in P_S$ tale che $x \in \mathscr{C}(t)$.

Da $t \in P_S$ segue che $\exists \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset S \cup S^{[-1]}$ tale che $t \in \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n$. Quindi $\mathscr{C}(t) = \mathscr{C}(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n)$. Ma $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, per (1.4), $\alpha_i \in S \cup S^{[-1]} \subset K$ e pertanto $\mathscr{C}(t) \subset \mathscr{C}(K) = K$, cioè $x \in K$.

Def. 1.1. Se S è una parte non vuota di un ipergruppo H, diciamo che $\langle S \rangle$ è il *sottoipergruppo* di H generato da S. Se S è finito, si dice che $\langle S \rangle$ è *finitamente generato*. Se $\langle S \rangle = H$ diciamo che H è *generato* da S.

Osservazione 1.2. Poichè banalmente $\langle H - \omega \rangle = H$ per qualunque ipergruppo H, si può affermare che ogni ipergruppo H tale che $|H/\beta^*| > 1$ è generato da un suo sottoinsieme proprio.

Teorema 1.3. *Sia S una parte non vuota di un ipergruppo H; allora $H = \langle S \rangle$ se, e solo se, $H/\beta^* = \langle \varphi(S) \rangle$.*

Dim. Poichè φ manda sottoipergruppi parte completa contenenti S su sottogruppi contenenti $\varphi(S)$, si ha $\varphi(\langle S \rangle) = \langle \varphi(S) \rangle$; ma $\langle S \rangle$ è parte completa e quindi $\langle S \rangle = \varphi^{-1}(\varphi \langle S \rangle) = \varphi^{-1}(\langle \varphi(S) \rangle)$, da cui la tesi.

Def. 1.2. Se H è un ipergruppo finitamente generato da un insieme costituito da un solo elemento, diciamo che H è *fortemente ciclico.*

Si può osservare che se H è un gruppo, allora le definizioni di ipergruppo fortemente ciclico e di gruppo ciclico coincidono.

Osservazione 1.3. Per il Teorema 1.3 e per la Def. 1.2 si può affermare che un ipergruppo H è fortemente ciclico con generatore x se, e solo se, H/β^* è ciclico con generatore $\varphi(x)$.

Corollario 1.1. *Se H è un ipergruppo fortemente ciclico, allora ogni suo sottoipergruppo è fortemente ciclico.*

Dim. Sia $H = \langle\{x\}\rangle$ e sia K un sottoipergruppo di H. Allora, per l'Osservazione 1.3, H/β^* è un gruppo ciclico, e quindi K/β^* è un suo sottogruppo ciclico. Pertanto, ancora per l'Osservazione 1.3, K è un ipergruppo fortemente ciclico.

Osservazione 1.4. Dalla Nota 1.1 e dal Corollario 1.1, segue che ogni sottoipergruppo di un ipergruppo fortemente ciclico è parte completa.

Con dimostrazione analoga a quella del Corollario 1.1 il Teorema 2.11 di **[9]** e il Teorema 1.3 permettono di provare il

Teorema 1.4. *Se H è un ipergruppo commutativo, finitamente generato, ogni sottoipergruppo di H è finitamente generato.*

Def. 1.3. Diciamo che un ipergruppo H verifica la condizione di *catena ascendente a parti complete*, se ogni catena ascendente di sottoipergruppi parte completa $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ si ferma, cioè $\exists n \in N^*$ tale che $K_n = K_{n+1} = \dots$.

Teorema 1.5. *Un ipergruppo H e ogni suo sottoipergruppo parte completa sono finitamente generati se, e solo se, H verifica la condizione di catena ascendente a parti complete.*

Dim. Sia $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ una catena di sottoipergruppi parte completa di H. Sia $K = \cup K_i$ per $i = 1, 2, \dots$. Poichè i sottoipergruppi parte completa sono chiusi, per la Proposizione 1.1, K è sottoipergruppo parte completa e quindi è finitamente generato. Sia $K = \langle S \rangle$ con $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ e sia $r = \max\{j / \exists s_j \in S,\ s_j \in K_j\}$. Allora $S \subset K_r$, da cui $\langle S \rangle \subset K_r$, ma poichè $K_r \subset K = \langle S \rangle$ si ha $K_r = \langle S \rangle$. E pertanto $K_r = K_{r+1} = \dots$. Viceversa, esista per assurdo un sottoipergruppo K parte completa di H che non sia finitamente generato. Sia $h_1 \in K$, certo $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq K$, quindi $\exists h_2 \in K - \langle \{h_1\} \rangle$ tale che $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2\} \rangle \subsetneqq K$. Iterando il procedimento si trovano degli elementi $h_1, h_2, h_3, \dots$ che determinano una catena ascendente di sottoipergruppi parte completa: $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2, h_3\} \rangle \subsetneqq \dots$ che non si blocca mai.

Lemma 1.2. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito m, allora $\forall n \in N^*$ tale che $x^n \subset \omega_H$ si ha che $p(x)|n$.*

Dim. Ricordiamo che si indica con $p(x)$ il periodo di x, cioè il più piccolo intero positivo m tale che $x^m \subset \omega_H$. Certamente $\exists \{q, r\} \subset N$ tale che $n = m \cdot q + r$ con $0 \leqslant r < p(x)$. Se fosse $0 < r < p(x)$, allora $x^n = x^{mq+r} = (x^m)^q \circ x^r \subset \omega_H^q \circ x^r = \omega_H \circ x^r = \mathscr{C}(x^r)$; cioè $x^n \subset \mathscr{C}(x^r)$ da cui $\mathscr{C}(x^n) = \mathscr{C}(x^r)$. Ma $x^n \subset \omega_H$ implica $\mathscr{C}(x^n) = \omega_H$, quindi $x^r \subset \mathscr{C}(x^r) = \mathscr{C}(x^n) = \omega_H$, cioè $x^r \subset \omega_H$, assurdo perchè $0 \leqslant r < m$. Pertanto necessariamente $r = 0$ e quindi $n = m \cdot q$, cioè $m|n$.

Corollario 1.2. *Sia x un elemento di un ipergruppo H, allora $p(x) = p(\varphi(x))$.*

Dim. Sia $p(x) = n$ e $p(\varphi(x)) = m$. Per la Proposizione 5 di $[7]_1$ $m|n$. Da $p(\varphi(x)) = m$ segue $\varphi(x)^m = 1_{H/\beta^*}$, cioè $\varphi(x^m) = 1_{H/\beta^*}$, da cui $x^m \subset \omega_H$; pertanto, dal Lemma 1.2, $n|m$. Quindi $m = n$. Se $p(x) = \infty$ e $p(\varphi(x)) = m < \infty$, per quanto detto prima $x^m \subset \omega_H$, da cui $p(x) \leqslant m < \infty$, cioè una contraddizione.

Lemma 1.3. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito n, allora $\forall \{s, t\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ con $s \neq t$, $\mathscr{C}(x^s) \cap \mathscr{C}(x^t) = \emptyset$.*

Dim. Sia per assurdo $u \in \mathscr{C}(x^s) \cap \mathscr{C}(x^t)$; allora $\mathscr{C}(x^s) = \mathscr{C}(u) = \mathscr{C}(x^t,)$ da cui $\varphi(x^s) = \varphi(x^t)$, cioè $\varphi(x)^s = \varphi(x)^t$; pertanto, supposto $s > t$, $\varphi(x)^{s-t} = \varphi(x^{s-t}) = 1_{H/\beta^*}$ e quindi $x^{s-t} \subset \omega_H$, il che è assurdo perchè $p(x) = n$ e $s - t < n$.

Teorema 1.6. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito n. Allora $\langle \{x\} \rangle = \bigoplus_{r=1}^{n} \mathscr{C}(x^r)$, ove con il simbolo $\oplus$ si intende unione disgiunta.*

Dim. Per il Corollario 1.2, $p(\varphi(x)) = n$, onde $\langle \varphi(x) \rangle = \{\varphi(x), \varphi(x)^2, \dots, \varphi(x)^n\}$.
Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 1.3, $\langle \{x\} \rangle = \varphi^{-1}(\langle \varphi(x) \rangle)$, da cui $\langle \{x\} \rangle$, è unione delle retroimmagini degli elementi di $\langle \varphi(x) \rangle$, cioè di

$\varphi^{-1}\varphi(x) = \mathscr{C}(x)$, $\varphi^{-1}\varphi(x^2) = \mathscr{C}(x^2) \ldots \varphi^{-1}\varphi(x^n) = \mathscr{C}(x^n)$. Infine dal Lemma 1.3 segue l'asserto.

Ricordiamo che un r-ipergruppo H è un ipergruppo tale che $\forall x \in H$ $|\mathscr{C}(x)| = r$. Pertanto, discende subito dal Teorema 1.6 il seguente

Corollario 1.3. *Se H è un r-ipergruppo ed x è un elemento di H di periodo finito n, allora $|\langle \{x\} \rangle| = n \cdot r$.*

2 - Prodotto diretto di sottoipergruppi

Proviamo le seguenti proprietà.

Proposizione 2.1. *Se H è un ipergruppo commutativo, π un insieme di numeri primi e F_π l'insieme degli elementi di H il cui periodo è finito e contiene solo fattori primi appartenenti a π, allora F_π è un sottoipergruppo parte completa di H.*

Dim. Siano $\{x, y\} \subset F_\pi$, $p(x) = n = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\lambda_r}$, $p(y) = m = q_1^{\mu_1} \cdot q_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\mu_s}$ con $\{p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_s\} \subset \pi$. Sia $t = \text{m.c.m.}\,(n, m)$; certamente $t = \alpha_1^{\gamma_1} \cdot \alpha_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_u^{\gamma_u}$ con $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u\} \subset \pi$. Si ha $(x \circ y)^t = x^t \circ y^t \subset \omega_H \circ \omega_H = \omega_H$, quindi $\forall z \in x \circ y$ $z^t \subset \omega_H$, da cui per il Lemma 1.2 $p(z)|t$ e quindi $z \in F_\pi$. Cioè $(x \circ y) \subset F_\pi$. Inoltre $\exists z \in H$ tale che $x \in y \circ z$. Proviamo che $z \in F_\pi$. Si ha $x^t \subset (y \circ z)^t$
$= y^t \circ z^t \subset \omega_H \circ z^t = \mathscr{C}(z^t)$, ma $x^t \subset \omega_H$ e pertanto $\omega_H = \mathscr{C}(z^t)$, da cui $z^t \subset \omega_H$ e quindi $p(z)|t$, cioè $z \in F_\pi$. Analogamente si prova che $\exists w \in F_\pi$ tale che $x \in w \circ y$; così F_π è sottoipergruppo di H. Inoltre $\forall u \in \omega_H$ $p(u) = 1 = q^0$ $\forall q \in \pi$, pertanto $u \in F_\pi$. Da $\omega_H \subset F_\pi$ discende che F_π è parte completa di H.

Conseguenza immediata della Proposizione 2.1, ove si suppone $\pi = \{q\}$, è il seguente

Corollario 2.1. *Se H è un ipergruppo commutativo, q un numero primo e F_q l'insieme degli elementi di H il cui periodo è finito e potenza di q, allora F_q è sottoipergruppo parte completa di H.*

Nota 2.1. Dato un numero primo q, denotiamo con T_q l'insieme degli elementi di H il cui periodo non è divisibile per q.

Proposizione 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo e q un numero primo, allora T_q è sottoipergruppo parte completa di H.*

Dim. Sia π_q l'insieme di tutti i numeri primi diversi da q. Per la Proposizione 2.1, F_{π_q} è un sottoipergruppo parte completa di H. Proviamo che $F_{\pi_q} = T_q$. Sia $x \in F_{\pi_q}$, allora $p(x) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\lambda_r}$ ove $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ $p_i \in \pi_q$; ma $q \notin \pi_q$ così $\forall i$ $p_i \neq q$ e $q \nmid p(x)$. Pertanto $x \in T_q$. Analogamente si prova che $T_q \subset F_{\pi_q}$.

Proposizione 2.3. *Se H è un ipergruppo commutativo e q_1, q_2 sono numeri primi distinti, allora $F_{q_1} \subset T_{q_2}$ e $F_{q_2} \subset T_{q_1}$.*

Dim. Sia $x \in F_{q_1}$, allora $p(x) = q_1^{\lambda}$. Certamente $q_2 \nmid q_1$, e quindi $q_2 \nmid p(x)$, da cui $x \in T_{q_2}$. Pertanto $F_{q_1} \subset T_{q_2}$. Analogamente si vede che $F_{q_2} \subset T_{q_1}$.

Proposizione 2.4. *Se H è un ipergruppo commutativo e q un numero primo, allora $F_q \cap T_q = \omega_H$.*

Dim. Per il Corollario 2.1 e la Proposizione 2.2, $F_q \cap T_q \supset \omega_H$. Viceversa sia $x \in F_q \cap T_q$. Da $x \in F_q$ segue $p(x) = q^{\lambda}$; $x \in T_q$ implica $q \nmid p(x)$. Perciò $q \nmid q^{\lambda}$ il che è assurdo a meno che non sia $\lambda = 0$, cioè $p(x) = 1$ e quindi $x \in \omega_H$. Pertanto $F_q \cap T_q \subset \omega_H$.

Corollario 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo e π è un insieme di numeri primi, allora $\forall q \in \pi$ si ha $F_q \cap F_{\pi - \{q\}} = \omega_H$.*

Dim. Per definizione $F_{\pi-\{q\}} = \{x \in H / p(x) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\lambda_r}$ con $\{p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_r\} \subset [\pi - \{q\}]\}$, pertanto $F_{\pi-\{q\}} \subset T_q$. Allora $F_q \cap F_{\pi-\{q\}} \subset F_q \cap T_q = \omega_H$. Viceversa, per la Proposizione 2.1 e per il Corollario 2.1, $\omega_H \subset F_q \cap F_{\pi-\{q\}}$.

Lemma 2.1. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di periodo finito m; allora se $s|m$ si ha $\forall u \in x^s$ $p(u) = m/s$.*

Dim. Poniamo $m/s = t$. Si ha $(x^s)^t = x^{st} = x^m \subset \omega_H$. Pertanto $\forall u \in x^s$ $u^t \subset \omega_H$. Sia $q < t$, allora $sq < st = m$ e quindi $u^q \subset (x^s)^q = x^{sq} \not\subset \omega_H$ perchè $sq < m = p(x)$. Così $p(u) = t$.

Teorema 2.1. *Se H è un ipergruppo e x è un suo elemento di periodo finito $r \cdot s$, allora $\forall u \in x^r$ $\langle \{u\} \rangle$ è sottoipergruppo di $\langle \{x\} \rangle$.*

Dim. $p(x) = rs$ implica, per il Lemma 2.1, $p(u) = s$. Per il Teorema 1.6 $\langle \{u\} \rangle = \bigoplus_{q=1}^{s} \mathscr{C}(u^q)$; ma $u \in x^r$ implica $u^q \subset x^{rq}$, da cui $\forall q \in \{1, 2, \ldots, s\}$ $\mathscr{C}(u^q) = \mathscr{C}(x^{rq})$. Ma $\langle \{x\} \rangle = \bigoplus_{t=1}^{rs} \mathscr{C}(x^t)$ e, poichè $\forall q \in \{1, 2, \ldots, s\}$ $rq \leq rs$, si ha $\langle \{u\} \rangle = \bigoplus_{q=1}^{s} \mathscr{C}(u^q) = \bigoplus_{q=1}^{s} \mathscr{C}(x^{rq}) \subset \bigoplus_{t=1}^{rs} \mathscr{C}(x^t) = \langle \{x\} \rangle$.

Def. 2.1. Sia H un ipergruppo e sia $\{K_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoipergruppi di H. Diciamo che H è *prodotto diretto della famiglia* $\{K_i\}_{i\in I}$, se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

$$\forall i \in I \qquad K_i \text{ è parte completa di } H; \tag{2.1}$$

$$H = \langle \bigcup_{i\in I} K_i \rangle; \tag{2.2}$$

$$\forall j \in I \qquad K_j \cap \langle \bigcup_{i \in I - \{j\}} K_i \rangle = \omega_H. \tag{2.3}$$

In tal caso si scrive $H = \boxtimes_{i\in I} K_i$.

Dal Teorema 1.1 e dall'Osservazione 1.1, si deduce la

Osservazione 2.1. Se H è un ipergruppo commutativo e $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sono sottoipergruppi parte completa di H, allora $\langle \bigcup_{i=1}^{n} K_i \rangle = \circ \prod_{i=1}^{n} K_i$.

Teorema 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo di torsione, cioè tale che tutti i suoi elementi hanno periodo finito, allora $H = \boxtimes_{q\in P_H} F_q$, ove $P_H = \{q$ primi $/ \exists x \in H$ tale che $q | p(x)\}$.*

Dim. Se H è un ipergruppo commutativo di torsione, H/β^* è un gruppo abeliano di torsione, quindi H/β^* è prodotto diretto delle sue componenti primarie S_q, ma per il Corollario 1.2, per ogni primo q si ha $S_q = \varphi(F_q)$, e quindi per il Lemma 3.1 di [4]$_3$ segue la tesi.

Proposizione 2.5. *Se H è un ipergruppo ciclico, allora H è fortemente ciclico.*

Dim. Sia H ciclico con generatore x. Allora $\forall y \in H \; \exists n \in N^*$ tale che $y \in x^n$, ma $x^n \subset \mathscr{C}(x^n) \subset \mathscr{C}(P_{\{x\}})$ ove $P_{\{x\}} = \bigcup_{\substack{t_i \in \{x\} \cup x^{[-1]} \\ n \in N^*}} (t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n)$, e quindi, per il Teorema 1.2, $y \in \langle \{x\} \rangle$, cioè H è finitamente generato da $\{x\}$.

Osservazione 2.2. Si noti che, in generale non vale il viceversa della Proposizione 2.5, come mostra l'esempio seguente di ipergruppo $H = \langle \{a, b\}, \circ \rangle$, ove: l'iperoperazione «$\circ$» è $a \circ a = \{a\}$, $a \circ b = b \circ a = \{a, b\}$, $b \circ b = \{b\}$, e H è un ipergruppo fortemente ciclico, ma non è ciclico.

Tuttavia se H è un ipergruppo completo tale che $|H/\beta^*| < \infty$, allora H fortemente ciclico implica H ciclico. Infatti se $H = \langle \{x\} \rangle$, per l'Osservazione 1.3, H/β^* è un gruppo ciclico con generatore $\varphi(x)$. Allora $\forall y \in H$, poichè H/β^* è finito,

$\exists n \in N$ tale che $\varphi(y) = \varphi(x)^n$, da cui $y \in \mathscr{C}(x^n) = x^n$, pertanto H è ciclico con generatore x.

Proposizione 2.6. *Sia H un ipergruppo; allora si ha*

(2.4) *se $|H| \leqslant 3$, H è fortemente ciclico;*

(2.5) *se $|H| = 4$ e H non ha struttura di gruppo, H è fortemente ciclico.*

Dim. Dall'ipotesi segue che $|H/\beta^*| \leqslant 3$, e poichè tutti i gruppi di ordine minore o uguale a tre sono ciclici, per l'Osservazione 1.3, segue la tesi.

Bibliografia

[1] R. H. BRUCK, *A survey of binary systems*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[2] P. CORSINI: $[\bullet]_1$ *Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux*, Atti Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina (1978), 7-22; $[\bullet]_2$ *Sur les semi-hypergroupes complètes et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); $[\bullet]_3$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980).

[3] P. CORSINI e G. ROMEO, *Hypergroupes complètes et $\mathscr{T}$-groupoides*, Atti Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina (1978), 129-146.

[4] M. DE SALVO: $[\bullet]_1$*Sugli ipergruppi completi finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 269-280; $[\bullet]_2$ *Su le potenze ad esponente intero in un ipergruppo e gli r-ipergruppi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 409-421; $[\bullet]_3$ *Sugli ipergruppi commutativi finitamente generati*, Matematiche (Catania), in corso di stampa.

[5] M. DE SALVO e D. FRENI: $[\bullet]_1$ *Semi-iperguppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **30** (1981), 44-59; $[\bullet]_2$ *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Matematiche (Catania) **35** (1980), 211-226.

[6] M. DRESHER and O. ORE, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938).

[7] D. FRENI: $[\bullet]_1$ *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Matematiche (Catania) **35** (1980), 270-286; $[\bullet]_2$ *Sugli r-ipergruppi e gli ampliamenti*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1982).

[8] M. KOSKAS, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 155-192.

[9] A. MACHÌ, *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano 1974.

[10] J. MITTAS, *Hypergroupes canoniques*, Math. Balkanica **2** (1972), 165-179.

[11] Y. SUREAU, *Thèse de doctorat d'état*, Universitè de Clermont II (1980).

[12] G. ZAPPA, *Fondamenti di teoria dei gruppi* (I), Edizioni Cremonese, Roma 1965.

Summary

In 1 *we introduce the finitely generated hypergroups and characterize their structure, considering in particular the hypergroups generated by a singleton (strongly cyclic hypergroups).*

In 2 *we extend to hypergroups the notion of direct product and generalize a known result of group theory to commutative torsion hypergroups.*

* * *