Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 147-155

G. LOMBARDI e R. REBAUDO (*)

Matrici diagonali con correzioni di rango k (**)

1 - Matrici a k-albero

Una matrice $T \in C_{n\times n}$ sarà detta a *k-albero* se

$$T = \begin{bmatrix} W & V^T \\ U & \tilde{D} \end{bmatrix}$$

con $W \in C_{k\times k}$ $(1 \le k < n)$, U, $V \in C_{(n-k)\times k}$, $\tilde{D} = \operatorname{diag}\{\tilde{d}_{k+1}, \dots, \tilde{d}_n\}$. L'insieme di tali matrici sarà indicato con $\mathscr{T}_k$. In particolare, se $k = 1$ la matrice T sarà detta *matrice ad albero* e l'insieme delle matrici ad albero sarà indicato con $\mathscr{T}$

Proposizione 1.1. *Sia* $T \in \mathscr{T}_k$, *definita come in* 1. *Esiste* S, *non degenere, tale che* $S^{-1}TS = D + XY^T$, *con* D *diagonale di ordine* n, X, $Y \in C_{n\times k}$.

Dim. Sia $\alpha \ne \tilde{d}_i$, $i = k+1, \dots, n$. Posto

$$L = (\alpha I_{n-k} - \tilde{D})^{-1} \quad S = \begin{bmatrix} I_k & O \\ LU & I_{n-k} \end{bmatrix} \ (^1),$$

si verifica immediatamente che $S^{-1}TS = D + XY^T$ con

$$D = \begin{bmatrix} \alpha I_k & O \\ O & \tilde{D} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} I_k \\ -LU \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} (W - \alpha I_k + V^T LU)^T \\ V \end{bmatrix}.$$

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Via Bonnano 25/B, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 6-II-1985.

(1) Qui e nel seguito O indica la matrice nulla delle dimensioni che, di volta in volta, occorrerà considerare.

Proposizione 1.2. *Sia* $A = D + XY^T$ *con* $D \in \boldsymbol{C}_{n\times n}$ *matrice diagonale,* $X, Y \in \boldsymbol{C}_{n\times k}$. *Se il rango di* X *è* k, *esiste una matrice* $S \in \boldsymbol{C}_{n\times n}$, *non degenere tale che* $S^{-1}AS = T \in \mathscr{T}_k$.

Dim. Sia W una sottomatrice di ordine k della matrice X, non degenere, certamente esistente. Senza ledere la generalità, si può supporre che W sia costituita delle prime k righe di X. Posto

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} W \\ \tilde{X} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} M \\ \tilde{Y} \end{bmatrix}$$

con D_1, W, $M \in \boldsymbol{C}_{k\times k}$, $D_2 \in \boldsymbol{C}_{(n-k)\times(n-k)}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \boldsymbol{C}_{(n-k)\times k}$, sia

$$S = \begin{bmatrix} W & O \\ \tilde{X} & I_{n-k} \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} W^{-1} & O \\ -\tilde{X}W^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix};$$

si verifica immediatamente che $S^{-1}AS = T \in \mathscr{T}_k$.

Corollario 1.3. *Sia* A *come in* 1.2. *Se* XY^T *ha rango* k, A *è simile ad una matrice* $T \in \mathscr{T}_k$.

Dim. La tesi segue da 1.2, tenuto conto del fatto che X ha certamente rango k.

1.4. Sia $T \in \mathscr{T}_k$ di ordine n, definita come in **1**, non degenere. Da 1.1 segue che $T = B + ZF^T$, ove

$$B = \begin{bmatrix} \alpha I_k & O \\ U & \tilde{D} \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} I_k \\ O \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} (W - \alpha I_k)^T \\ V \end{bmatrix}.$$

Se $\tilde{D}$ non è degenere, è possibile scegliere α in modo che B sia non degenere. In queste ipotesi, per il calcolo di T^{-1} può essere usata la formula di Woodbury [**1**]

$$T^{-1} = B^{-1} - B^{-1}Z(I_k + F^T B^{-1} Z)^{-1} F^T B^{-1}$$

(la matrice $C = I_k + F^T B^{-1} Z = \dfrac{1}{\alpha}(W - V^T \tilde{D}^{-1} U)$ è non degenere, se e solo se T è non degenere [**1**]).

Il vantaggio di tale formula è quello di calcolare l'inversa di T servendosi, sostanzialmente, dell'inversa di una matrice di ordine k. Tenendo conto delle definizioni precedenti, si ha

$$\mathrm{T}^{-1}=\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} \mathrm{C}^{-1} & -\mathrm{C}^{-1}\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1} \\ -\tilde{\mathrm{D}}^{-1}\mathrm{U}\mathrm{C}^{-1} & \alpha\tilde{\mathrm{D}}^{1}+\tilde{\mathrm{D}}^{-1}\mathrm{U}\mathrm{C}^{-1}\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Per $k=1$, in particolare, si ha

$$\mathrm{T}^{-1}=\beta\begin{bmatrix} 1 & -v^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1} \\ -\tilde{\mathrm{D}}^{-1}u & \tilde{\mathrm{D}}^{-1}uv^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1}+\frac{1}{\beta}\Delta\tilde{\mathrm{D}}^{-1} \end{bmatrix}$$

dove

$$\beta=(d_1-v^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1}u)^{-1}=(d_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{u_iv_i}{d_i})^{-1}$$

$$v^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}}^{-1}=[\frac{v_2}{d_2},\dots,\frac{v_n}{d_n}] \qquad \tilde{\mathrm{D}}^{-1}u=[\frac{u_2}{d_2},\dots,\frac{u_n}{d_n}]^{\mathrm{T}}.$$

2 - Matrici ad albero

Sia $\mathrm{T}\in\mathscr{T}$ di ordine $n\geq 3$. Posto (con ovvio significato dei simboli)

$$\mathrm{T}=[\begin{matrix} d_1 & b^{\mathrm{T}} \\ c & \tilde{\mathrm{D}} \end{matrix}]=\begin{bmatrix} d_1 & b_2\dots b_n \\ c_2 & d_2\dots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ c_n & 0\ \dots\ d_n \end{bmatrix},$$

la formula ricorrente

$$P_i(\lambda)=(d_i-\lambda)P_{i-1}(\lambda)-c_ib_i\prod_{j=2}^{i-1}(d_j-\lambda) \qquad (i=3,\dots,n)$$
$$P_2(\lambda)=(d_1-\lambda)(d_2-\lambda)-c_2b_2$$

consente di calcolare il polinomio caratteristico $P_n(\lambda)$ di T (e, quindi, anche $\det\mathrm{T}=P_n(0)$).

Osservazione 2.1. *Sia* $T \in \mathscr{T}$, *definita come in* 2. *Se esiste* j, *con* $2 \le j \le n$, *tale che* $c_j = 0$ $(b_j = 0)$, d_j *è un autovalore di* T.

Dim. È immediata conseguenza della definizione di T.

Osservazione 2.2. *Sia* $T \in \mathscr{T}$, *definita come in* 2. *Se esistono* $i_1, \dots, i_k$, *con* $2 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, *tali che* $d_{i_1} = \dots = d_{i_k} = d$, *allora* d *è autovalore di* T *di molteplicità* $k-1$.

Dim. La tesi segue dal fatto che

$$P(\lambda) = \det(T - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n} (d_i - \lambda) - \sum_{i=2}^{n} c_i b_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{n} (d_j - \lambda)$$

$$= (d-\lambda)^{k-1} [\prod_{\substack{i=1 \\ i \ne i_1, \dots, i_k}}^{n} (d_i - \lambda) - \sum_{i=2}^{n} c_i b_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \ne i, i_1, \dots, i_k}}^{n} (d_j - \lambda)] .$$

Osservazione 2.3. *Sia* $T \in \mathscr{T}$ *definita come in* 2. *Se* T *è ad elementi reali e tali che* $b_i c_i > 0$ $(i = 2, \dots, n)$ *allora i suoi autovalori sono tutti reali.*

Dim. Posto $\Lambda = \operatorname{diag}\{1, \sqrt{c_2/b_2}, \dots, \sqrt{c_n/b_n}\}$, si verifica immediatamente che $\tilde{T} = \Lambda^{-1} T \Lambda$ è simmetrica.

Tenuto conto delle Osservazioni 2.1 e 2.2, nel seguito si supporrà che la matrice T sia tale che $b_i c_i \ne 0$ $(i = 2, \dots, n)$ e che $d_i \ne d_j$, $i \ne j$, $2 \le i, j \le n$. Non lede la generalità supporre, inoltre, che sia $d_2 < \dots < d_n$.

Lemma 2.4. *Sia* T *matrice ad albero reale, simmetrica e tale che* $d_2 < \dots < d_n$. *I polinomi*

$$P_1(\lambda) = d_1 - \lambda, \qquad P_2(\lambda) = (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda) - c_2^2,$$

$$P_i(\lambda) = (d_i - \lambda) P_{i-1}(\lambda) - c_i^2 \prod_{j=2}^{i-1} (d_j - \lambda) \qquad (2 < i \le n)$$

verificano le seguenti proprietà:

(a) $P_r(\lambda)$, $1 \le r \le n$, *ha* r *radici reali e distinte;*

(b) *per* $r \ge 2$, *se* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *sono le radici di* $P_r(\lambda)$, *si ha*

$$\alpha_1 < d_2 < \alpha_2 < d_3 < \dots < \alpha_{r-1} < d_r < \alpha_r .$$

Dim. La proprietà (a) è ovvia per $r=1$; per $r=2$ le proprietà (a), (b) sono di verifica immediata. Supposto che esse siano verificate per $r=k$, siano $\beta_1, \dots, \beta_k$ le radici reali e distinte di $P_k(\lambda)$. Per l'ipotesi di induzione risulterà $\beta_1 < d_2 < \beta_2 < d_3 < \dots < \beta_{k-1} < d_k < \beta_k$; ne segue che $\operatorname{sign} P_{k+1}(\beta_i) = (-1)^i$, $i=1, \dots, k$. Poiché inoltre $\lim_{\lambda \to -\infty} P_{k+1}(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda \to +\infty} (-1)^{k+1} P_{k+1}(\lambda) = +\infty$, $P_{k+1}(\lambda)$ ha $k+1$ radici reali distinte $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$. Si osservi che $P_{k+1}(\lambda) = (d_{k+1} - \lambda) P_k(\lambda) + c_{k+1}^2 \prod_{i=2}^{k} (d_i - \lambda)$ è il polinomio caratteristico della sottomatrice di T, ottenuta considerando le prime $k+1$ righe e colonne; ne segue [7] $\alpha_1 \leq d_2 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \leq d_{k+1} \leq \alpha_{k+1}$.

Tenuto conto dell'ipotesi di induzione e del fatto che $d_{k+1} > d_i$ $(i=2, \dots, k)$ sarà $P_{k+1}(d_i) \neq 0$ $(i=2, \dots, k+1)$. Ne segue pertanto che $\alpha_1 < d_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < d_{k+1} < \alpha_{k+1}$.

Lemma 2.5. *Siano* T, $P_1(\lambda), \dots, P_n(\lambda)$ *come in* 2.4. *Se* $\alpha \in R$ *è tale che* $P_r(\alpha) = 0$ *con* $1 < r \leq n$, *allora* $P_r'(\alpha) \cdot P_{r-1}(\alpha) < 0$.

Dim. Per $r=2$ l'asserto segue dallo studio diretto dei polinomi $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$. Supponiamo allora che $\beta_1, \dots, \beta_k$ siano le radici di $P_k(\lambda)$ e che risulti $P_k'(\beta_i) \cdot P_{k-1}(\beta_i) < 0$ $(i=1, \dots, k)$.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ sono le radici di $P_{k+1}(\lambda)$, per 2.4 si avrà $\alpha_1 < d_2 < \dots < \alpha_k < d_k < d_{k+1}$ e $P_{k+1}'(\alpha_i) \neq 0$ $(i=1, \dots, k+1)$.

Poiché $\lim_{\lambda \to -\infty} P_{k+1}(\lambda) = +\infty$, sarà $\operatorname{sign} P_{k+1}'(\alpha_i) = (-1)^i$. Da $P_{k+1}(\lambda) = (d_{k+1} - \lambda) P_k(\lambda) - c_{k+1}^2 \prod_{j=2}^{k} (d_j - \lambda)$ segue $P_k(\alpha_i) = \dfrac{c_{k+1}^2}{d_{k+1} - \alpha_i} \prod_{j=2}^{k} (d_j - \alpha_i)$ e, quindi, $\operatorname{sign} P_k(\alpha_i) = (-1)^{i+1}$. Si conclude pertanto che $P_{k+1}'(\alpha_i) \cdot P_k(\alpha_i) < 0$ $(i=1, \dots, k+1)$.

Teorema 2.6. *Siano* T, $P_1(\lambda), \dots, P_n(\lambda)$ *come in* 2.4. *La successione di polinomi* $Q_0(\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda)$, $Q_1(\lambda) = (-1)^{n-1} P_{n-1}(\lambda), \dots, Q_{n-1}(\lambda) = -P_1(\lambda)$, $Q_n(\lambda) = 1$ *costituisce una successione di Sturm per l'equazione caratteristica di* T [2], [5].

Dim. $Q_0(\lambda)$ ha, per definizione, le stesse radici di $P_n(\lambda)$, polinomio caratteristico di T e, per 1.6, tutte con molteplicità uno; $Q_n(\lambda)$ è diverso da zero per ogni valore di λ.

Se $\alpha \in \boldsymbol{R}$ è tale che esista r con $1 \leq r \leq n-1$, per cui $Q_r(\alpha) = 0$, tenuto conto di 2.4 e della definizione di $Q_r(\lambda)$, si ha $Q_{r-1}(\alpha) \cdot Q_{r+1}(\alpha) < 0$. Se, infine, α è tale che $Q_0(\alpha) = 0$, per 2.5 risulta $Q_0'(\alpha) \cdot Q_1(\alpha) > 0$.

3 - Esempi

Negli esempi che seguono $n \geq 3$ è l'ordine della matrice considerata.

3.1 – Sia

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2-n} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & 3-n & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & 3-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 3-n \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è $P(\lambda) = (1-\lambda)^{n-2}[\lambda^2 - 2\lambda - (n-2)]$, $\det T = 2-n$ ed i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$, $\lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 1$.

3.2 – Siano a, $b \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ e sia

$$T = \begin{bmatrix} a & a & a \cdots a \\ a & b & 0 \cdots 0 \\ a & 0 & b \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 \cdots b \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è $P(\lambda) = (b-\lambda)^{n-2}[(a-\lambda)(b-\lambda) - (n-1)\,a^2]$ e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + b + \sqrt{\delta}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{\delta})$$

(con $\delta = (4n-3)\,a^2 - 2ab + b^2$), $\lambda_3 = \ldots = \lambda_n = b$; si ha inoltre $\det T = ab^{n-2}[b - (n-1)\,a]$. Se $\det T \neq 0$, posto $\alpha = a[(n-2)\,a - b]$,

$$T^{-1} = \frac{1}{ab[(n-1)\,a - b]} \begin{bmatrix} -b^2 & ab & ab & \cdots & ab \\ ab & \alpha & -a^2 & \cdots & -a^2 \\ ab & -a^2 & \alpha & \cdots & -a^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ab & -a^2 & -a^2 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}.$$

3.3 – Sia

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n \\ 2 & 2 & 0 \cdots 0 \\ 3 & 0 & 3 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 0 & 0 \cdots n \end{bmatrix}.$$

Posto $s = \dfrac{n(n+1)}{2} - 2$, si ha $\det \mathrm{T} = -s \cdot n!$ e

$$\mathrm{T}^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (s-2)/2 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & (s-3)/3 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & (s-n)/n \end{bmatrix}.$$

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di T, per 2.4 si ha $\lambda_1 < 2 < \lambda_2 < 3 < \lambda_3 < \dots < n-1 < \lambda_{n-1} < n < \lambda_n$; poiché $\det \mathrm{T} < 0$, $\lambda_1 < 0$, essendo $n \geq 3$, $\|\mathrm{T}^{-1}\|_\infty = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n-2}{s}$; ne segue $\dfrac{1}{2} < \|\mathrm{T}^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{3}{4}$ e, quindi, $\lambda_1 \leq -\dfrac{4}{3}$.

3.4 – Siano a, b, $c \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ e sia

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \cdots a & a \\ a & b & b & b \cdots b & b \\ a & b & c & 0 \cdots 0 & 0 \\ a & b & 0 & c \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & b & 0 & 0 \cdots c & 0 \\ a & b & 0 & 0 \cdots 0 & c \end{bmatrix}.$$

Se T non è degenere, posto: $\alpha = bc[c - (n-2)b]$, $\beta = -ac[c - (n-2)b]$, $\theta = ac[c - (n-2)a]$, $\gamma = -ac(b-a)$, $\delta = a(b-a)[c - (n-3)b]$, $\eta = ab(b-a)$, si ha

$$\mathrm{T}^{-1} = \frac{1}{\beta(a-b)}\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \beta & \theta & \gamma & \gamma \cdots \gamma & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta & \eta \cdots \eta & \eta \\ 0 & \gamma & \eta & \delta \cdots \eta & \eta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \gamma & \eta & \eta \cdots \eta & \delta \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è $P(\lambda) = (c-\lambda)^{n-3}\{-\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2 + [(n-2)(a^2+b^2) + a^2 - ab - ac - bc]\lambda + a(b-a)[c-(n-2)b]\}$ e $\det \mathrm{T} = ac^{n-3}(b-a)[c-(n-2)b]$.

3.5 – Sia

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\cdots & 1\\ 1 & -1 & 1\cdots & 1\\ 1 & 1 & -1\cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1\cdots & -1\end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-n & 1 & 1\cdots & 1\\ 1 & -1 & 0\cdots & 0\\ 1 & 0 & -1\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0\cdots & -1\end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda)=(-1)^{n-2}(\lambda+2)^{n-2}[\lambda^2+(2-n)\lambda-2]$; gli autovalori sono $\lambda_1=\frac{1}{2}(n-2-\sqrt{n^2-4n+12})$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(n-2+\sqrt{n^2-4n+12})$, $\lambda_3=\ldots=\lambda_n=-2$ e $\det A=(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}$. Infine, un sistema ortonormale di autovettori di A è costituito dalle colonne di

$$W=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\begin{bmatrix}(n-1)/\beta_1 & (n-1)/\beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ (\lambda_1-1)/\beta_1 & (\lambda_2-1)/\beta_2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ (\lambda_1-1)/\beta_1 & (\lambda_2-1)/\beta_2 & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-3} & \cdots & \alpha_1\\ (\lambda_1-1)/\beta_1 & (\lambda_2-1)/\beta_2 & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-3} & \cdots & \alpha_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\lambda_1-1)/\beta_1 & (\lambda_2-1)/\beta_2 & \alpha_{n-2}^{n-2} & \alpha_{n-2}^{n-3} & \cdots & \alpha_{n-2}\end{bmatrix}$$

($\beta_1=\sqrt{\lambda_1^2-2\lambda_1+n}$; $\beta_2=\sqrt{\lambda_2^2-2\lambda_2+n}$; α_i, $i=1,\ldots,n-2$ e $\alpha_0=1$ sono le radici $(n-1)$-sime dell'unità).

3.6 – Sia A, di ordine n, definita come in 3.5, e sia $B\in \boldsymbol{C}_{m\times m}$. Sia

$$M=A\otimes B=\begin{bmatrix}B & B & B\cdots & B\\ B & -B & B\cdots & B\\ B & B & -B\cdots & B\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B & B & B\cdots & -B\end{bmatrix}.$$

Se W è la matrice degli autovettori di A, posto $\hat{W}=W\otimes I_m$, risulterà, con ovvio significato dei simboli,

$$\hat{W}^T M\hat{W}=\operatorname{diag}\{\lambda_1 B,\ \lambda_2 B,\ -2B,\ldots,-2B\}.$$

Se $\mu_1,\ldots,\mu_m$ sono gli autovalori di B, gli autovalori di M sono allora $\{\lambda_i\mu_j,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m\}$ [3].

3.7 – Siano $A_k\in \boldsymbol{R}_{k\times k}$ tale che $a_{ij}=1-\delta_{ij}$, $1\leq i,j\leq k$; $X\in \boldsymbol{R}_{(n-k)\times k}$ $x_{ij}=1$, $1\leq i\leq n-k$, $1\leq j\leq k$. Si consideri la matrice a k-albero di ordine n

$$T=\begin{bmatrix}A_k & X^T\\ X & I_{n-k}\end{bmatrix}.$$

Si ha allora
$$\mathrm{T}^{-1} = \frac{1}{k(n-k-1)+1}\begin{bmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{X} & \mathrm{C} \end{bmatrix},$$

ove: $\mathrm{B} \in \boldsymbol{R}_{k\times k}$ è tale che
$$b_{ij} = \begin{cases} n-k-1 & \text{se } i \neq j \\ -[(k-1)(n-k-1)+1] & \text{se } i = j, \end{cases}$$

$\mathrm{C} \in \boldsymbol{R}_{(n-k)\times(n-k)}$ è tale che
$$c_{ij} = \begin{cases} -k & \text{se } i \neq j \\ k(n-k-2)+1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

$$\det \mathrm{T} = (-1)^k [k(n-k-1)+1].$$

Bibliografia

[1] D. FISHER, G. GOLUB, O. HALD, C. LEIVA and O. WIDLUND, *On Fourier - Toeplitz methods for separable elliptic problems*, Math. Comp. 28, n. 126 (1974).

[2] G. GHELARDONI e P. MARZULLI, *Argomenti di Analisi Numerica*, E.T.S., Pisa, 1979.

[3] A. GRAHAM, *Kronecker products and matrix calcolus with applications*, Ellis Horvood Limited, 1981.

[4] A. S. HOUSEHOLDER, *The theory of matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.

[5] E. ISAACSON and H. B. KELLER, *Analysis of numerical methods*, J. Wiley & Sons Inc, New York, 1966.

[6] J. STOER. *Introduzione all'Analisi Numerica*, Zanichelli, 1975.

[7] J. H. WILKINSON, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

Summary

A class of bordered diagonal matrices, here called k-tree matrices, is investigated. For any such matrix, a similar matrix is found, in the class of diagonal matrices modified by a matrix of rank k, and viceversa; the Woodbury formula is used to find the inverse.

A Sturm sequence for the characteristic equation is found for real symmetric k-tree matrices in the special case of k = 1.

In addition, examples are given, to be used as test matrices.

* * *