Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 139-142

M. F. RINALDI e M. G. RINALDI (*)

Quasi anelli U_s-generati (**)

Introduzione

In [1] sono stati studiati gli anelli generati dalle unità sinistre. In questo lavoro ci occupiamo, più in generale, dei quasi-anelli destri generati dalle loro unità sinistre (U_s-generati): si viene così a caratterizzare una classe di quasi-anelli distributivamente generati (cfr. [2]).

In un quasi-anello destro generato dalle unità sinistre l'annullatore sinistro è un ideale bilatero e il quoziente rispetto a tale ideale risulta essere un anello isomorfo all'anello delle classi di resto modulo q, dove q è la caratteristica del gruppo additivo del quasi-anello.

In questo lavoro si fornisce una tecnica per costruire tutti i quasi-anelli destri U_s-generati.

1 - Preliminari

Sia N un quasi-anello destro (vale cioè $(a+b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in N$). Nel seguito diremo che N è *U_s-generato* (ove U_s è l'insieme, che supporremo non vuoto, delle unità sinistre di N) se è generato dalle unità sinistre. Si vede subito che allora N è distributivamente U_s-generato.

Useremo, senza esplicito richiamo, notazioni e definizioni di [2]; indicheremo però con $A_s(N)$ *l'annullatore sinistro di* N e con $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_q$ rispettivamente l'anello degli interi relativi e l'anello delle classi di resto modulo q; inoltre con N^+, $N^\cdot$ intenderemo rispettivamente la struttura additiva e moltiplicativa di N.

Chiameremo poi *invertibile a destra* un elemento n di N se esiste un elemento x di N tale che $nx = e_s$, dove e_s è una unità sinistra di N.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro svolto con contributo M.P.I. — Ricevuto: 4-I-1985.

2 - Struttura dei quasi-anelli U_s-generati

Sia N un quasi-anello destro U_s-generato; per il seguito è importante considerare i sottoinsiemi di N così definiti: $A_r = \{n \in N | \forall x \in N\, nx = rx, r \in \boldsymbol{Z}^+ \cup \{0\}\}$; in particolare notiamo che A_0 coincide con $A_s(N)$ e A_1 con l'insieme delle unità sinistre U_s; è chiaro (cfr. [2], Prop. 6.4) inoltre che N coincide con l'unione, per $r \geq 0$, degli A_r.

Utilizzeremo più volte nel seguito la seguente osservazione, anche senza esplicito richiamo.

Osservazione 1. Sia N un quasi-anello U_s-generato; allora $\forall r \geq 0$ A_r è laterale di A_0; inoltre, $\forall i, j \geq 0$ risulta $A_i + A_j = A_{i+j}$.

Si prova infatti immediatamente che $\forall r \geq 0$, $\forall \overline{a}_r \in A_r$, $A_r = \overline{a}_r + A_0$: è intanto ovvio, per costruzione, che $\overline{a}_r + A_0 \subseteq A_r + A_0 = A_r$ e, d'altra parte, se $\overline{a}_r$ è un fissato elemento di A_r qualunque sia a_r in A_r si ha $a_r - \overline{a}_r \in A_0$. Il resto è ovvio.

Siamo ora in grado di caratterizzare completamente i quasi-anelli destri U_s-generati.

Teorema 1. *I quasi-anelli destri N, U_s-generati, diversi da $\boldsymbol{Z}$ sono tutti e soli quelli isomorfi al quasi-anello $[N; +, *]$, ove*

(a) $N^+ = \boldsymbol{Z}_q^+ \dotplus A^+$(¹), *dove A è uno zero-quasi-anello di caratteristica q e $N/A \cong \boldsymbol{Z}_q$;*

(b) «$*$» *è un prodotto del tipo*

$$(1) \qquad \langle z_1, a_1 \rangle * \langle z_2, a_2 \rangle = w^{-1} z_1 \langle z_2, a_2 \rangle \qquad \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{Z}_q, \quad \forall a_1, a_2 \in A,$$

essendo w un elemento invertibile di $\boldsymbol{Z}_q$.

È immediato verificare che $[N; +, *]$ è un quasi-anello destro U_s-generato.

Viceversa, sia N un quasi-anello destro U_s-generato.

Se $\operatorname{car} N = 0$, allora risulta $N^+ \cong \boldsymbol{Z}^+$. Infatti, cominciamo col provare che in tal caso $A_s(N) = A_0 = \{0\}$: se esistesse in A_0 un certo $a \neq 0$, a sarebbe esprimibile come somma di un certo numero (finito) r_a di unità sinistre. Per ogni n in N si avrebbe allora $0 = an = r_a n$ e dunque $\operatorname{car} N \neq 0$, contro il supposto. In questo caso, per la Osservazione 1, si ha che $\forall r > 0$, $1 = |A_0| = |A_r|$ (²) e in definitiva che

(¹) Il simbolo $\dotplus$ indica la somma semidiretta (dipendente dall'omomorfismo φ: $\boldsymbol{Z} \to \operatorname{Aut}(A)$: $z \mapsto \varphi_z$), di Z_q^+ e A^+ (cfr. [3] pag. 91).

(²) Con $|M|$ indichiamo la cardinalità dell'insieme M.

N^+ è un gruppo ciclico infinito generato dalla unità (bilatera) e cioè che N^+ è isomorfo a $\boldsymbol{Z}^+$; in questo caso N risulta allora un anello (cfr. [3] Prop. 6.6). Sia dunque car$N = q$, q naturale. Osserviamo subito che allora $A_q = A_0$ per ogni $a \in A_q$ e per ogni $n \in N$, $an = qn = 0$ da cui $A_q \subseteq A_0$ e dunque, stante la Osservazione 1, $A_q = A_0$.

Tenendo presente la Osservazione 1 si ha allora che $\forall i \geqslant 0$ $A_{q+i} = A_q + A_i = A_0 + A_i = A_i$ e dunque

$$(2) \qquad A_{q+i} = A_i \qquad \forall i \geqslant 0 .$$

Consideriamo ora una unità sinistra di N; sia u e sia $\mathcal{C}_q$ il gruppo ciclico da essa generato. Osserviamo che $\mathcal{C}_q \cap A_0^+$ è lo zero di N e che $N^+ = \mathcal{C}_q + A_0^+$, visto che $\mathcal{C}_q$ contiene un rappresentante di ciascun laterale di A_0 in N. Ne segue che $N^+ = \mathcal{C}_q^+ \dotplus A_0^+$. D'altra parte A_0 è un ideale di N e dunque $(N/A_0)^+$ è isomorfo a $\mathcal{C}_q$ ed N/A_0 è abeliano e quindi distributivo - per l'Osservazione 1 - e con unità $(u + A_0 = A_1/A_0)$; essendo anzi generato dalla sua unità, risulta isomorfo all'anello delle classi di resto $\boldsymbol{Z}_q$. Infine A_0 è uno zero-quasi-anello di caratteristica q. Possiamo dunque identificare, a meno di isomorfismi, il gruppo additivo N^+ di un quasi-anello destro N U_s-generato con la somma diretta $Z^+ \dotplus A^+$, dove A è uno zero-quasi-anello di caratteristica q ([3]).

Proviamo ora che i prodotti del tipo (1) sono gli unici ammissibili affinchè N sia U_s-generato. Notiamo intanto che l'annullatore sinistro di N coincide con $A = \{\langle 0, a\rangle \in N | a \in A\}$. Da ciò segue subito, ricordando le precedenti notazioni stabilite per i laterali dell'annullatore, che per un qualunque elemento $\langle r, \overline{a}\rangle$ di N, si ha

$$(3) \qquad \langle r, \overline{a}\rangle \in A_i \qquad \text{se e solo se} \qquad A_i = \{\langle r, a\rangle \in N | a \in A\} .$$

Infatti per ogni a in A, l'elemento $\langle r, a\rangle = \langle r, \overline{a}\rangle + \langle 0, a - \overline{a}\rangle$ ([4]) appartiene a $A_i + A_0 = A_i$ per l'Osservazione 1 e, d'altra parte, se $\langle s, a\rangle$ sta in A_i, allora $\langle s, a\rangle - \langle r, \overline{a}\rangle \in A$, per cui $s - r = 0$.

La (3) ci consente di affermare che il prodotto «*» gode della seguente notevole proprietà

$$(4) \qquad \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{Z}_q \qquad \forall a_1, a_2, a \in A \qquad \langle z_1, a_1\rangle * \langle z_2, a_2\rangle = \langle z_1, a\rangle * \langle z_2, a_2\rangle .$$

Se infatti $\langle z_1, a_1\rangle \in A_i$ allora, per ogni $a \in A$, anche $\langle z_1, a\rangle \in A_i$ e quindi, qualunque sia $\langle z_2, a_2\rangle$ in N, si ha che

$$\langle z_1, a_1\rangle * \langle z_2, a_2\rangle = i\langle z_2, a_2\rangle = \langle z_1 a\rangle * \langle z_2, a_2\rangle .$$

([3]) Vale la pena di notare che nel caso $A_0 = \{0\}$ si ha $N \cong Z_q$, ciclico, finito.
([4]) $\forall z \in Z_q$, $\forall a, \overline{a} \in A$, si ha $\langle z, a\rangle + \langle 0, \overline{a}\rangle = \langle z, a + \overline{a}\rangle$, essendo $\varphi(0) = 1_A$.

Notiamo ora che se $\langle r, a\rangle \in A_i$, allora $r\langle 1, a\rangle \in A_i$ dal momento che, per un opportuno b in A, si ha $r\langle 1, a\rangle = \langle r, b\rangle \in A_i$ per la (3). Ciò permette di provare che se $\langle r, a\rangle$ è un elemento invertibile a destra in N, allora r è invertibile in $\boldsymbol{Z}_q$: sia $\langle r, a\rangle \in A_i$ e sia $\langle \bar{r}, \bar{a}\rangle$ un suo inverso destro. Per ogni elemento $\langle x, y\rangle$ di N, si ha (per un opportuno b in A)

$$\langle x, y\rangle = (\langle r, a\rangle * \langle \bar{r}, \bar{a}\rangle) * \langle x, y\rangle = (r\langle 1, b\rangle * \langle \bar{r}, \bar{a}\rangle) * \langle x, y\rangle = rj\langle x, y\rangle$$

(essendo A_j il sottoinsieme di N cui appartiene $\langle 1, b\rangle * \langle \bar{r}, \bar{a}\rangle$) e dunque è $rj \equiv 1$ mod q.

Siamo ora in grado di caratterizzare i possibili prodotti di N. Sia $\langle w, a\rangle$ una unità sinistra di N e sia $\langle 1, a\rangle$ in A_k; si ha allora che $\forall \langle x, y\rangle \in N$ e per un opportuno $\bar{a}$ in A

$$\langle x, y\rangle = \langle w, a\rangle * \langle x, y\rangle = (w\langle 1, \bar{a}\rangle) * \langle x, y\rangle = w(\langle 1, \bar{a}\rangle * \langle x, y\rangle) = wk\langle x, y\rangle ,$$

da cui $k = w^{-1}$. Ne segue, in generale, che $\forall \langle z_1, a_1\rangle \quad \langle z_2, a_2\rangle \in N$ si ha

$$\langle z_1, a_1\rangle * \langle z_2, a_2\rangle = z_1\langle 1, \bar{a}_1\rangle * \langle z_2, a_2\rangle = z_1 w^{-1}\langle z_2, a_2\rangle,$$

avendo opportunamente scelto $\bar{a}_1$ in A.

Bibliografia

[1] D. Boccioni, *Struttura degli anelli generati dai loro elementi unità sinistri*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39 (1967), 87-101.
[2] G. Pilz, *Near rings*, North-Holland, New York, 1977.
[3] E. Schenkman, *Group theory*, Krieger Publishing Company, New York, 1975.

Summary

U_s-generated right near-rings are studied and completely characterized.

* * *