Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 127-130

ROMEO TIRANI (*)

Interpolazione dell'errore globale nell'integrazione numerica del problema di Cauchy (**)

1 - Introduzione

Consideriamo il problema di Cauchy

$$y'(x)=f[x,\ y(x)] \qquad y(x_0)=A \tag{1}$$

con le condizioni che esso ammetta una sola soluzione $y(x)$ su un intervallo $[x_0,\ b]$. Gli usuali sottoprogrammi per la risoluzione numerica di tale problema, generano un insieme di valori y_i approssimanti quelli veri $y(x_i)$ nei punti x_i di una griglia

$$G=\{x_i : x_i=x_{i-1}+h_i,\ i=1,2,\dots,m;\ x_m\leqslant b\}\,. \tag{2}$$

Questi punti vengono scelti automaticamente dal sottoprogramma in modo tale che a ogni passo l'errore locale (o meglio, una stima asintoticamente corretta di esso) non superi una tolleranza prefissata dall'utente. Volendo conoscere un'approssimazione di $y(x)$ in un punto non appartenente a G, si ricorre di solito a un processo di interpolazione ([3], [5], pag. 59). È infatti del tutto sconsigliabile, dal punto di vista dell'efficienza, obbligare il sottoprogramma ad aggiustare il proprio passo in modo da giungere proprio nel punto in cui si vuole approssimare $y(x)$.

Supposto dunque di avere costruito, secondo una tecnica opportuna, una funzione $z(x)$ che interpoli i punti $(x_j,\ y_j)$ $(j=0,\ 1,\dots,m;\ y_0=A)$ e che useremo come approssimazione della $y(x)$ sull'intervallo $[x_0,\ x_m]$, sorge il problema di

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italy.
(**) Ricevuto: 5-XI-1984.

stimare l'errore globale

$$e(x) = y(x) - z(x) \tag{3}$$

in ogni punto dell'intervallo suddetto.

In generale saranno già stati determinati dei valori ε_i, approssimanti gli errori globali $e_i = y(x_i) - y_i$ e tali che

$$e_i - \varepsilon_i = O(H^q) \qquad (H \to 0), \tag{4}$$

dove H è la massima ampiezza dei passi h_i della griglia G e q un parametro che abitualmente è legato all'ordine del metodo numerico adottato per integrare il problema (1).

Lo scopo del presente lavoro è allora quello di vedere se, in tali circostanze, sia possibile usare una opportuna funzione $\varepsilon(x)$ che interpola i punti (x_j, ε_j) $(\varepsilon_0 = e_0 = 0)$. come approssimazione della $e(x)$ su $[x_0, x_m]$. Occorrerà a questo proposito esaminare, su tale intervallo, il comportamento della differenza $e(x) - \varepsilon(x)$, cosa che appunto faremo nel seguente paragrafo.

2 - Interpolazione dell'errore globale

L'ipotesi fondamentale che sta alla base di quanto diremo nel seguito, è che esistano due costanti positive α e β, entrambe finite, tali che

$$\alpha \leq \frac{h_s}{h_{s+1}} \leq \beta \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{5}$$

qualunque sia il valore di H. Vi sono importanti ragioni pratiche per impedire che il passo d'integrazione subisca variazioni troppo brusche [4]; la nostra ipotesi è pertanto del tutto realistica, e i più diffusi sottoprogrammi per la risoluzione numerica del problema (1) operano conformemente a essa. Per esempio, il ben noto STEP di Shampine e Gordon [5] pone $\alpha = 0.5$ e $\beta = 8$, mentre l'altrettanto noto RKF45 di Watts e Shampine [2] assume $\alpha = 0.2$ e $\beta = 10$.

Ricordato ora che q è il parametro che compare nella (4), indichiamo rispettivamente con $\varepsilon_{q,n}(x)$ e $\eta_{q,n}(x)$ $(n = q-1, q, \ldots, m)$ i polinomi di grado minore o uguale a $q-1$, definiti dalle seguenti condizioni di interpolazione

$$\varepsilon_{q,n}(x_{n+1-r}) = \varepsilon_{n+1-r} \quad \text{e} \quad \eta_{q,n}(x_{n+1-r}) = e_{n+1-r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, q; x_{n+1-r} \in G). \tag{6}$$

dove ε_{n+1-r} e e_{n+1-r} hanno il significato illustrato nel precedente paragrafo.

Volendo ora approssimare sull'intervallo $[x_{n+1-q}, x_n]$ la funzione errore $e(x)$, data dalla (3), con il polinomio $\varepsilon_{q,n}(x)$, dovremo, come abbiamo già detto sopra, esaminare il comportamento della differenza $e(x)-\varepsilon_{q,n}(x)$. Scriviamo allora

$$|e(x)-\varepsilon_{q,n}(x)| \leqslant |e(x)-\eta_{q,n}(x)| + |\eta_{q,n}(x)-\varepsilon_{q,n}(x)| \tag{7}$$

dove il primo termine della somma a secondo membro è l'errore dovuto al processo di interpolazione in sé, mentre il secondo termine è dovuto agli errori inerenti $e_{n+1-r}-\varepsilon_{n+1-r}$.

Ora, come è ben noto (vedi, per esempio, [1], pag. 98 sg.), supposto $e(x) \in C^q[x_0, x_m]$ e detto M un qualunque numero reale positivo tale che $|e^{(q)}(x)| \leqslant M$ su $[x_{n+1-q}, x_n]$, risulta

$$|e(x)-\eta_{q,n}(x)| \leqslant \frac{MH^q}{4q} \qquad (x \in [x_{n+1-q}, x_n]),$$

avendo H il significato già detto.

Avremo allora che

$$e(x)-\eta_{q,n}(x) = O(H^q) \qquad (x \in [x_{n+1-q}, x_n]). \tag{8}$$

Occorre ora esaminare la differenza $\eta_{q,n}(x)-\varepsilon_{q,n}(x)$. A questo proposito è opportuno usare la forma lagrangiana del polinomio interpolatore

$$|\eta_{q,n}(x)-\varepsilon_{q,n}(x)| \leqslant \sum_{r=1}^{q} |\ell_r(x)| \cdot |e_{n+1-r}-\varepsilon_{n+1-r}| \qquad (x \in [x_{n+1-q}, x_n]).$$

Per la (4) abbiamo

$$e_{n+1-r}-\varepsilon_{n+1-r} = O(H^q) \qquad (r=1,2,\dots,q;\ H \to 0)$$

mentre in [3] si dimostra, sotto l'ipotesi (5), che il $\max\limits_{1\leqslant r\leqslant q} |\ell_r(x)|$ è uniformemente limitato nell'intervallo $[x_{n+1-q}, x_n]$. Pertanto

$$\eta_{q,n}(x)-\varepsilon_{q,n}(x) = O(H^q) \qquad (x \in [x_{n+1-q}, x_n];\ H \to 0). \tag{9}$$

Per le (7), (8) e (9), possiamo finalmente dire

$$e(x)-\varepsilon_{q,n}(x) = O(H^q) \qquad (x \in [x_{n+1-q}, x_n];\ H \to 0).$$

La relazione precedente ci permette allora di concludere con il seguente

Teorema. *Se la funzione errore $e(x)$, data dalla (3), è di classe C^q sull'intervallo $[x_0, x_m]$ e sono vere le (4) e (5), allora la funzione $\varepsilon_{q,n}(x)$, definita* *dalla prima delle* (6), *converge uniformemente alla* $e(x)$ *sull'intervallo* $[x_{n+1-q}, x_n]$ $(n = q-1, q, \ldots, m)$ *con un ordine almeno uguale a* $O(H^q)$.

Questo teorema risponde pertanto alla questione posta all'inizio, se cioè sia possibile approssimare sull'intervallo $[x_0, x_m]$ la funzione $e(x)$ con un opportuno polinomio che interpoli le stime ε_i degli errori globali e_i nei punti della griglia G data dalla (2).

Bibliografia

[1] W. CHENEY and D. KINCAID, *Numerical mathematics and computing*, Brooks/Cole Publ. Co, Monterey, 1980.

[2] G. E. FORSYTE, M. A. MALCOM and C. B. MOLER, *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, 1977.

[3] M. K. GORDON and L. F. SHAMPINE, *Interpolating numerical solutions of ordinary differential equations*, Proc. of ACM (1974), 46-35.

[4] P. PIOTROWSKY, *Stability, consistency and convergence of variable k-step methods for numerical integration of large systems of ordinary differential equations* in «Conference on the numerical solutions of differential equations» (curatore J. Morris), Lecture Notes in Mathematics **109**, Springer Verlag, Berlino, 1969.

[5] L. F. SHAMPINE and M. K. GORDON, *Computer solution of ordinary differential equations. The initial value problem*, W. H. Freeman Co., San Francisco, 1975.

Summary

In the numerical solutions of the initial value problem, usually efficient codes select the step size to be a large as possible while still metin a given error tollerance, so they rarely hit an output point specified by the user. To force the codes to use smaller steps would be very inefficient, hence we ordinarily get the required values by means of interpolation. This leads to the problem of estimating the corresponding global error, which is the question we discuss in this paper. Here we show that it is possible to approximate the aforesaid error by a piecewise polynomial function which in turn interpolates to the values of the global error at the mesh points (or, more probably, to some approximations to it).

* * *