Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 121-125

ALBERTA SUPPA MODENA (*)

Sugli anelli q-rigidi(**)

Introduzione

In [5] Maxson studia gli anelli rigidi, gli anelli cioè che ammettono come unici endomorfismi l'identità e l'endomorfismo nullo, e dimostra che un anello rigido artiniano sinistro deve essere commutativo e in parecchi casi un campo. In questa ottica, nel lavoro [6] si è affrontato il problema di caratterizzare i quasi-anelli il cui gruppo di automorfismi si riduce alla sola identità.

La presente ricerca si inserisce in una tale problematica in quanto vengono qui studiati gli anelli non semplici che abbiamo chiamato q-rigidi, quelli cioè i cui quozienti propri sono rigidi. In generale tali anelli non risultano essere rigidi: basta pensare, ad esempio, all'anello somma diretta di due campi di caratteristiche prime p_1, p_2 con $p_1 \neq p_2$.

Si giunge a caratterizzare in modo completo gli anelli q-rigidi nilpotenti e quelli a radicale proprio non nullo. In particolare si osserva che gli anelli q-rigidi con opportuni quozienti artiniani risultano commutativi.

1 - Preliminari

Sia R un anello; indichiamo con R^2 il sottoanello di R generato dal sottoinsieme $R^{(2)} = \{xy \mid x, y \in R\}$.

Un anello R con $R^2 \neq 0$ si dice *rigido* (cfr. [5]) se ha come unici endomorfismi l'identità e l'endomorfismo nullo. La condizione $R^2 \neq 0$ non è restrittiva in quanto un anello R con $R^2 = 0$ privo di endomorfismi non banali risulta essere, per noti risultati di teoria dei gruppi, lo zero-anello sul gruppo additivo $\boldsymbol{Z}_2$ delle classi di resti mod 2.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito con contributo ministeriale. — Ricevuto: 30-X-1984.

Diamo ora la seguente

Def. 1. Un anello R non semplice si dice *q-rigido* se tutti i suoi quozienti propri sono anelli rigidi.

Nel corso del lavoro indichiamo con $J(R)$ il radicale di Jacobson di R e con $A(R)$ l'annullatore di R, cioè $A(R)=\{x \in R \mid xy=yx=0 \quad \forall y \in R\}$.

2 - Proprietà degli anelli q-rigidi

Al fine di giungere ad una caratterizzazione di alcune classi di anelli q-rigidi, premettiamo le seguenti osservazioni.

Osservazione 1. Sia R un anello q-rigido; se $R \neq R^2 \neq 0$, allora R^2 è ideale massimale.

Poichè per ipotesi R/R^2 è uno zero-anello rigido, R/R^2 è, per quanto prima osservato, uno zero-anello semplice e dunque R^2 è massimale.

Osservazione 2. Un anello R q-rigido non contiene ideali propri $I \neq R^2 \neq 0$ tali che R/I sia nilpotente di indice $n \geqslant 3$.

Ragioniamo per assurdo: sia $I \trianglelefteq R$, $I \neq R^2$, tale che R/I sia nilpotente di indice $n \geqslant 3$; allora $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} \in R$ tali che $x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} + I \neq I$ per cui $x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \notin I$. Si consideri la funzione $\varphi: R/I \to R/I$ definita da $\varphi(x+I) = x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x + I$: è un endomorfismo in quanto $\varphi(x+I) \cdot \varphi(y+I) = I = \varphi(xy+I)$ $\forall x, y \in R$. Dalla rigidità di R/I segue che φ è l'endomorfismo nullo o l'identità; nel primo caso si ha $\forall x \in R$, $x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x \in I$ contro l'ipotesi e, nel secondo caso, $xy \in I$ $\forall x, y \in R$ per cui $R^2 \subseteq I$ e ciò contro il fatto che, se $R^2 \neq R$, R^2 è massimale.

Osservazione 3. Sia R q-rigido con $R \neq R^2 \neq 0$; le potenze di R coincidono con R^2 oppure $R^2 = A(R)$.

Se $R^3 = 0$ si ha $R^2 \subseteq A(R)$, da cui segue $R^2 = A(R)$ per la Osservazione 1. Sia $R^3 \neq 0$; se $a \in R \setminus (R^2 \cup A(R))$, si definisce in R/R^3 la funzione $\varphi(x+R^3) = xa + R^3$ che risulta essere un endomorfismo in quanto $\varphi(x+R^3)\,\varphi(y+R^3) = R^3 = \varphi(xy+R^3)$ $\forall x, y \in R$. Poichè R/R^3 è rigido si ha che φ è l'endomorfismo nullo o l'identità; nel primo caso si ha $xa \in R^3$ $\forall x \in R$ da cui $Ra \subseteq R^3\, \forall a \in R \setminus (R^2 \cup A(R))$ e quindi $R^2 \subseteq R^3$ da cui $R^2 = R^3$; nel secondo caso si ha $xy \in R^3$ e $xa - x \in R^3$ $\forall x, y \in R$, da cui $R = R^3$ contro l'ipotesi.

Si può ora dimostrare il

Teorema 1. *Un anello R è nilpotente q-rigido se e solo se*
(1) *R è zero-anello su un gruppo di ordine 4;*
(2) *R^2 è l'unico ideale di R e R/R^2 è uno zero-anello su $\boldsymbol{Z}_2$.*

Sia R un anello nilpotente q-rigido. Se $R^2 = 0$, R è uno zero-anello tale che $\forall I \trianglelefteq R$, R/I è rigido nilpotente e dunque isomorfo allo zero-anello su $\boldsymbol{Z}_2$; allora ogni ideale I è massimale in R. In queste condizioni si ha (cfr. [1]) che R ha al più due ideali propri e quindi è zero-anello su un gruppo di ordine 4. Se $R^2 \neq 0$ si ha $R^3 = 0$ (Osservazione 3) e dunque ogni immagine omomorfa di R è uno zero-anello; ne segue che R^2 è contenuto in ogni ideale e, come tale, è minimale. La Osservazione 1 assicura che R^2 è l'unico ideale. Il viceversa è ovvio.

3 - Anelli q-rigidi a quozienti artiniani.

Consideriamo ora anelli q-rigidi che soddisfano alla condizione di avere opportuni quozienti artiniani sinistri. Ricordiamo che si chiama *semiprimario* (cfr. [4]) un anello il cui quoziente rispetto al proprio radicale di Jacobson è artiniano. In questo caso sussiste il

Teorema 2. *Un anello R con $R \neq R^2$ e $0 \neq J(R) \neq R$ è semiprimario q-rigido se e solo se è somma diretta di un campo rigido e di uno zero anello su $\boldsymbol{Z}_2$.*

Se R è semiprimario q-rigido l'anello $R' = R/J(R)$ è artiniano semisemplice rigido per cui è locale o nilpotente (cfr. [5]) ma, essendo semisemplice, ha unità per cui è un campo. Segue che $J(R)$ è un ideale massimale di R che non può coincidere con R^2 per quanto appena visto. Risulta dunque $R = R^2 + J(R)$. Dimostriamo che tale somma è diretta. Ragioniamo per assurdo: se $R^2 \cap J(R) = J(R^2)$ fosse non nullo, si avrebbe che $R^2/J(R^2)$ sarebbe un campo perchè isomorfo ad $R/J(R)$ e sarebbe un ideale minimale (come ideale destro) dell'anello rigido $R/J(R^2)$ e a quadrato non nullo per cui (Th. 2.3. di [5]) $R/J(R^2)$ risulterebbe un campo e da ciò seguirebbe $J(R^2)$ massimale in R; poichè $J(R^2) = J(R) \cap R^2$ si avrebbe $J(R^2) = J(R) = R^2$ ed $R = R^2$ contro l'ipotesi.
Il viceversa è ovvio.

Nelle condizioni del Teorema 2 l'anello R risulta esere commutativo; vediamo di stabilire ora una condizione di commutatività nel caso che $R = R^2$.

Teorema 3. *Sia R una anello q-rigido con $R = R^2$ e $A(R) \neq 0$; se $R/A(R)$ è artiniano allora R è commutativo e privo di elementi idempotenti non nulli.*

Se $R/A(R)$ è rigido artiniano esso è commutativo; allora $\forall x, y \in R$ $xy - yx \in A(R)$. Si ha quindi $\forall z \in R$ $(xy - yx)z = z(xy - yx) = 0$, da cui $xyz = yxz$, $zxy = zyx$ e anche $(xz - zx)y = y(xz - zx) = 0$, da cui $xzy = zxy$, $yxz = yzx$. Confrontando segue $(zy)x = x(zy)$ $\forall x, y, z \in R$ e quindi R è commutativo.

Supponiamo ora che in R ci sia un elemento $e \neq 0$ tale che $e^2 = e$; si consideri la funzione $\varphi: R/A(R) \to R/A(R)$ definita da $\varphi(x + A(R)) = ex + A(R)$ che è un endomorfismo in quanto $\varphi(x + A(R))\varphi(y + A(R)) = exey + A(R) = exy + A(R)$ $= \varphi(xy + A(R))$. Allora o φ è l'endomorfismo nullo il che implica l'assurdo $ex \in A(R)$ $\forall x \in R$, o φ è l'identità il che implica $x - ex \in A(R)$ $\forall x \in R$ onde $(x - ex)y = 0$ $\forall y \in R$, da cui segue che e è unità di $R^2 = R$ e ciò contro il fatto che $A(R) \neq 0$.

Stabiliamo ora il

Teorema 4. *Sia R un anello q-rigido con $R = R^2$ i cui quozienti sono artiniani; se $0 \neq J(R) \neq R$, allora $J(R)$ è l'unico ideale massimale che contiene ogni altro ideale di R.*

Dal fatto che $R/J(R)$ è artiniano segue (Teorema 2) che $J(R)$ è massimale. Supponiamo che esista un ideale $I \nsubseteq J(R)$ tale che $R = J(R) + I$ e consideriamo $J(R) \cap I = J(I)$. Se $J(I) \neq 0$, $R/J(R) \simeq I/J(I)$; osserviamo che $I/J(I)$ è ideale di $R/J(I)$ e, per il fatto di essere campo, è ideale destro minimale a quadrato non nullo per cui (Th. 2.3. [5]) si ha che $R/J(I)$ è un campo. Allora $J(I)$ risulta massimale in R per cui $J(I) = J(R)$, da cui $I \supseteq J(R)$ e ciò è assurdo. Se $J(I) = 0$, allora $R = J(R) \oplus I$. Si ha che $R/I \simeq J(R)$ per cui R/I è radicale rigido artiniano e quindi nilpotente (Th. 3.1. di [5]) e, per l'Osservazione 2, zero-anello: risulta pertanto $R^2 \subseteq I$ e quindi $R^2 \subseteq R$ il che è escluso.

Nel caso che l'anello R sia artiniano abbiamo infine il

Teorema 5. *Un anello R con $R^2 = R$ è artiniano. semisemplice e q-rigido se e solo se è somma diretta di due campi rigidi.*

Poichè R è semisemplice artiniano, allora R è somma diretta di un numero finito di anelli semplici artiniani (cfr. Th. 1.4.4. di [2]). Essendo rigidi tutti i quozienti di R, si ha subito l'asserto. L'inverso è ovvio.

Bibliografia

[1] C. Cotti Ferrero e M.G. Rinaldi, *Sugli stems i cui ideali propri sono massimali*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 73-79.

[2] I. N. Herstein, *Non commutative rings*, The Carus Mathematical Monographs, M.A.A. 1968.

[3] C. Hopkins, *Rings with minimal condition for left ideals*, Ann. of Math. (2) **40** (1939), 712-730.

[4] N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37 (1964).

[5] C. J. Maxson. *Rigid rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **21** (1978), 95-101.

[6] A. Suppa Modena, *Sui quasi-anelli distributivi $\mathfrak{A}$-rigidi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 219-222.

Summary

In this paper we study rings whose quotient-rings with proper ideals are rigid. We prove that a ring R is nilpotent q-rigid iff R is a zero-ring on a group of order 4 *or R^2 is the only ideal and R/R^2 is a zero-ring on $\boldsymbol{Z}_2$. We also prove that a ring R with $R \neq R^2$ and $0 \neq J(R) \neq R$ is semiprimary q-rigid iff is the direct sum of a rigid field with a zero-ring on $\boldsymbol{Z}_2$. Lastly we characterize the q-rigid artinian semisimple rings.*

* * *