Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 101-109

Salvatore Antonucci (*)

Osservazioni sulla caratteristica generalizzata e sul numero cromatico d'un grafo (**)

1 - Grado generalizzato e caratteristica generalizzata

Dato un grafo G non orientato, semplice (cioè privo di cappi e di spigoli in parallelo), denotiamo con $d(x, y)$ la distanza di due vertici x e y di G e poniamo

$$J_h(x) = \{y/d(x, y) = h\} \tag{1}$$

$$I_h(x) = \{y/1 \leq d(x, y) \leq h\} \tag{2}$$

$$(h \in N_0 = N - \{0\}).$$

Diremo *grado n-uplo* (generalizzato) di un vertice x il numero

$$d_n(x) = |I_n(x)|, \tag{3}$$

sicchè, se $d(x)$ è il grado (usuale) di x, si ha

$$d(x) = d_1(x). \tag{4}$$

Diremo, poi, *grado* (generalizzato) *di specie* N' $(N' \subseteq N_0)$ il numero

$$d_{N'}(x) = \sum_{h \in N'} |J_h(x)| \tag{5}$$

ed in particolare *grado di specie* $\{n\}$ $(n \in N_0)$, o, brevemente, *grado di specie* n, il numero

$$d_{(n)}(x) = |J_n(x)|; \tag{6}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università, Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 3-X-1984.

ovviamente è

$$d(x) = d_{(1)}(x)\,. \tag{7}$$

Se $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sono i vertici di un grafo G, l'insieme

$$\{d(x_1), d(x_2), \ldots, d(x_p)\} \tag{8}$$

prende il nome di *caratteristica* di G.

Se $N_1, N_2, \ldots, N_p$ sono sottoinsiemi di N_0, diremo *caratteristica mista* (generalizzata) *di specie* $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ di G l'insieme

$$\{d_{N_1}(x_1), d_{N_2}(x_2), \ldots, d_{N_p}(x_p)\}\,; \tag{9}$$

se, poi, è $N_1 = N_2 = \ldots = N_p = N'$, si ha la *caratteristica di specie* N'; così, diremo *caratteristica n-upla* l'insieme

$$\{d_n(x_1), d_n(x_2), \ldots, d_n(x_p)\}\,.$$

È stato posto (cfr. [5], [**1**], [4]) il problema di vedere in quali casi la caratteristica (usuale) determina il grafo a meno di isomorfismi; in [**1**] e in [4] sono state anche considerate caratteristiche un pò più generali della (8); in particolare, in [4], M. Ferro considerò il problema per i grafi orientati e in [**1**]$_1$ l'Autore prese in considerazione lo stesso problema per gli ipergrafi.

È del tutto naturale considerare il seguente problema (aperto): *in quali casi una caratteristica generalizzata (di uno dei tipi sopradefiniti) determina il grafo, a meno di isomorfismi*?

In questa sede tralasceremo l'esame di questo problema, essendosi qui introdotto il concetto di grado generalizzato al solo scopo di rendere più veloci le considerazioni che faremo sucessivamente sulle colorazioni. Vogliamo, però, per richiamare l'attenzione degli studiosi sul problema, almeno segnalare il seguente

Esempio. La caratteristica (semplice)

$$\{4, 1, 1, 2, 2, 2\} \tag{10}$$

non determina il grafo; difatti vi sono due grafi non isomorfi con questa caratteristica: il grafo G_1 avente per spigoli $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$ (con ciclo di lunghezza 4) ed il grafo G_2 avente per spigoli $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$, $\{2,4\}$, $\{5,6\}$ (con ciclo di lunghezza 3). Tali grafi sono i soli con questa caratteristica; difatti, il vertice di grado 4 può essere collegato o con due dei vertici di grado 1 o con uno soltanto di essi; nel primo caso è facile far vedere che si ha un grafo isomorfo a G_1, mentre nel secondo si ha un grafo isomorfo a G_2. Per contro, le caratteristiche di specie $\{2\}$ dei grafi G_1 e G_2 sono rispettivamente

$$\{1, 3, 3, 3, 3, 1\} \quad \text{per } G_1, \qquad \{1, 1, 3, 3, 2, 2\} \quad \text{per } G_2; \tag{11}$$

da ciò segue che ognuna di esse, insieme con la (10), individua il grafo, a meno di isomorfismi.

La caratteristica doppia di G_1 è $\{5, 4, 4, 5, 5, 3\}$, come si ottiene sommando, per colonne, la (10) e la prima delle (11); tale caratteristica non individua G_1, perchè anche il grafo avente per spigoli $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 5\}$ ha la medesima caratteristica doppia di G_1 ma non è ad esso isomorfo, contenendo un ciclo di lunghezza 5.

2 - Il calcolo del numero cromatico mediante il calcolo del numero s-cromatico

Le considerazioni che seguiranno ci consentono, a mio parere, di asserire che la teoria delle colorazioni generalizzate sta alla teoria delle colorazioni semplici come la teoria degli ipergrafi sta alla teoria dei grafi; come la teoria degli ipergrafi ha il compito non solo di generalizzare ma anche quello di semplificare e di portare nuova luce alla teoria dei grafi [1], la teoria delle colorazioni generalizzate, faremo vedere, può servire per migliorare la teoria delle colorazioni semplici. Rinviamo, per la nomenclatura relativa alle colorazioni generalizzate a [8], [6] e $[1]_2$.

In deroga, probabilmente, alle notazioni ufficiali, diremo, per semplificare la nomeclatura, *potenza n-esima di un grafo G* e la indicheremo, con la stessa deroga, con il simbolo G^n, il grafo che ha gli stessi vertici di G e per spigoli quelli di G e quelli che si ottengono congiungendo i vertici a distanza non maggiore di n in G.

Partiamo dalla seguente

Osservazione A (F. Speranza, [8]). Il numero s-cromatico di un grafo G coincide con il numero cromatico di G^s.

L'osservazione di F. Speranza è intesa, ovviamente, a riportare il calcolo del numero s-cromatico d'un grafo a quello del numero cromatico d'un altro grafo. In questo lavoro, suggeriamo di applicare tale osservazione in direzione contraria, ossia di ricondurre il calcolo del numero cromatico a quello del numero s-

(1) È qui riportata letteralmente una frase di Berge [2].

cromatico; naturalmente, perchè l'operazione suddetta non risulti improduttiva, essa è intesa a ricondurre il calcolo del numero cromatico di un grafo dato a quello del numero s-cromatico di un grafo più semplice oppure tale che, per esso, il suddetto ultimo calcolo sia già stato effettuato.

Cominciamo con il ricordare alcuni risultati.

Teorema A (F. Speranza, [8]). Il numero 2-cromatico di un albero A è dato da

$$\gamma_2(A) = 1 + D_1(A) \tag{12}$$

dove $D_1(A) = \max_{x \in A} d_1(x)$.

Teorema B (F. Speranza, [8]). G sia un ciclo di lunghezze $n \geqslant s + 1$. Se $R(a, b)$ e $Q(a, b)$ denotano il resto ed il quoziente (interi) degli interi a e b, si ha

$$\begin{aligned} &\gamma_s(G) = s + 1 && \text{se} \quad R(n, s + 1) = 0\,, \\ &\gamma_s(G) = s + 2 && \text{se} \quad 0 < R(n, s + 1) \leqslant Q(n, s + 1)\,, \\ &\gamma_s(G) \geqslant s + 3 && \text{se} \quad R(n, s + 1) > Q(n, s + 1)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

In particolare, il solo valore di n tale che $\gamma_2(G) > 5$ è 5.

Teorema C (S. Antonucci [1]$_2$). Se A è un albero, si ha

$$\gamma_s(A) = 1 + D_{[(s+1)/2]}(A)\,. \tag{14}$$

Teorema D. (G. Szekeres e H. S. Wilf [9], R. L. Brooks [3]). Per ogni grafo G si ha [9]

$$\gamma_1(G) \leqslant 1 + D_1(G)\,; \tag{15}$$

inoltre [3], se $D_1(G) = n \geqslant 2$, si ha

$$\gamma_1(G) \leqslant D_1(G) \tag{16}$$

se non è: (u) $n = 2$ e G ha per componente un ciclo di lunghezza dispari, ovvero (uu) $n > 2$ e G ha per componente la clique K_{n+1}.

Ciò premesso, si ha il seguente

Teorema 1. *Se G è il quadrato di un albero A, si ha*

$$\gamma_1(G) = 1 + D_1(A). \tag{17}$$

La dimostrazione segue dall'osservare che $\gamma_1(G) = \gamma_2(A)$, tenuto conto dell'Osservazione A, per poi richiamare la (12).

Ci preme qui far notare che il Teorema D ci dice che, al più, $\gamma_1(G) \leq D_1(G)$ e, poichè $D_1(G) = \max_{x \in G} d_1(x) = \max_{x \in A} d_2(x) = D_2(A)$ e $D_1(A) < D_2(A)$, ne risulta, nel caso dell'ipotesi del Teorema 1, un ovvio miglioramento del Teorema D.

È allora evidente che può essere utile conoscere, per la ricerca del numero cromatico di un dato grafo, se esso può essere considerato il quadrato di qualche albero. Vale, all'uopo, il seguente

Teorema 2. *Un grafo G è il quadrato di un albero sse esso è costituito da cliques soddisfacenti alle condizioni:*

(a) *due cliques hanno al più due vertici collegati tra loro in comune; l'eventuale spigolo comune non appartiene ad altre cliques;*

(b) *il numero di cliques che hanno in comune con una data clique uno spigolo è minore dell'ordine di quest'ultima;*

(c) *il grafo avente per vertici le cliques di G, tale che due vertici-cliques sono collegati da uno spigolo se essi hanno in comune uno spigolo, è un albero;*

(d) *due cliques possono avere un solo vertice in comune sse esiste una clique avente uno spigolo in comune con una di esse ed un altro con l'altra, il vertice essendo quello comune ai due spigoli.*

Difatti, se G è il quadrato di un albero A, si ha che se y è un vertice di grado p (>1) in A e se $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sono i vertici adiacenti a y (in A), nel grafo G i vertici x_i vengono tutti ad essere collegati tra loro, per cui al vertice y in A corrisponde, in G, la clique Y (di ordine $p+1$) avente per vertici y e gli x_i. La condizione (b) segue immediatamente. La condizione (a) segue dall'osservare che

(i) se y_1 e y_2 sono due vertici di grado maggiore di 1 (in A) tra loro collegati, le cliques Y_1 e Y_1 (in G) hanno in comune lo spigolo $\{y_1, y_2\}$;

(ii) se x_i è adiacente a y_1 e x'_j è adiacente a y_2, esiste la catena $x_i y_1 y_2 x'_j$, per cui, essendo A un albero, la distanza tra x_i e x'_j è 3 e pertanto x_i e x'_j non potranno essere collegati in G.

Le condizioni (c) e (d) sono, poi, un'immediata conseguenza del fatto che A sia un albero.

Inversamente, se G è un grafo costituito da cliques, soddisfacenti alle condizioni (a), (b), (c) e (d), si consideri l'albero avente per vertici le suddette cliques e per spigoli quelli che uniscono le cliques-vertici aventi uno spigolo in comune; all'albero ottenuto si aggiungano, per ogni vertice-clique, tanti vertici (da collegare con il vertice-clique stesso) in modo che il grado del vertice-clique sia uguale al numero dei vertici, meno uno, della clique in G. È immediato che G è il quadrato dell'albero così costruito.

Osservazione B. Ogni grafo G è sempre contenuto in modo banale nel quadrato di un albero: basta aggiungere a G tutti gli spigoli possibili in modo da avere una clique dello stesso ordine n di G che, per quanto dimostrato, risulta essere il quadrato di un albero (stella) avente un vertice di grado n-1 e gli altri di grado 1. Si potrebbe, allora, pensare di applicare, in ogni caso, il Teorema 1, sostituendo una disuguaglianza alla (17); invero, se G è contenuto nel quadrato di un albero A, si ha $\gamma_1(G) \leqslant \gamma_1(A^2)$, da cui segue

$$\gamma_1(G) \leqslant 1 + D_1(A); \tag{18}$$

tuttavia è immediato osservare che la (18) (a meno che G non contenga un vertice collegato con tutti gli altri, nel qual caso non è altro che il Teorema D) risulta una disuguaglianza più larga del Teorema D.

Il Teorema C, l'Osservazione A e quanto osservato qui sopra consentono di enunciare il seguente

Teorema 3. *Se un grafo G è compreso (nel senso dell'inclusione degli insiemi degli spigoli) tra le potenze s-esima e $(s+1)$-esima di un albero A, si ha*

$$1 + D_{[(s+1)/2]}(A) \leqslant \gamma_1(G) \leqslant 1 + D_{[(s+2)/2]}(A). \tag{19}$$

La dimostrazione è ovvia, come pure è evidente che, nel caso che G coincida con la potenza s-esima di A, si ha

$$\gamma_1(G) = 1 + D_{[(s+1)/2]}(A). \tag{20}$$

Si ripropone, allora, il problema di vedere quando un grafo G si possa considerare la potenza s-esima di un albero (oppure essere contenuto, in modo non banale, nella potenza s-esima di un albero). A questo proposito, qui ci terremo lontani da una formalizzazione piuttosto noiosa delle condizioni alle quali deve soddisfare il grafo G, limitandoci a segnalare certi fatti che potranno essere utili ad accertare dette condizioni. Questi sono contenuti nella seguente

Osservazione C. Limitiamoci a considerare il caso $s = 3$, facili estensioni essendo consentite per $s > 3$. Se A è un albero e se G è il cubo di A, detti y_1 e y_2

due vertici di grado maggiore di 1 adiacenti in A, nel grafo G formano una clique $Y(y_1, y_2)$ i vertici y_1 e y_2 e tutti i vertici ad essi adiacenti; allora se y_1, y_2 e y_3 sono tre vertici di grado maggiore di 1 tali che siano adiacenti i vertici delle coppie y_1, y_2 e y_2, y_3 (in A), nel grafo G le cliques $Y(y_1, y_2)$ e $Y(y_2, y_3)$ hanno in comune la clique Y_2 (quella, cioè, avente per vertici y_2 ed i vertici ad esso adiacenti); se si considera il grafo avente per vertici le cliques di G e per spigoli quelli che uniscono le cliques aventi una clique in comune, si nota subito che questo grafo è un albero; infine per la clique che è comune a due cliques di G sussistono limitazioni analoghe (facilmente intuibili) a quelle indicate per gli spigoli nelle condizioni (a), (b) e (d) del Teorema 2.

Passiamo, ora, ad esaminare i grafi che sono potenze s-esime di cicli (oppure sono in esse contenuti, nel senso dell'inclusione degli spigoli). Esaminiamo il caso $s = 2$.

Osservazione D. Sia C_n un ciclo di lunghezza n. Il quadrato di C_n è un grafo regolare $R_{n,4}$ (di ordine n e di valenza 4), costituito da due H-cicli (cicli hamiltoniani), cioè da C_n e da quello che si ottiene congiungendo i vertici a distanza due su C_n, se n è dispari, oppure, se n è pari, da C_n e da un fattore costituito da due cicli disgiunti di uguale lunghezza $n/2$; in quest'ultimo caso, gli spigoli del fattore sono in numero di n e congiungono le n coppie di vertici di C_n a distanza 2. Reciprocamente, è noto [2] che ogni grafo regolare $R_{n,4}$ è la somma di due fattori disgiunti (nel senso che l'insieme degli spigoli può essere ripartito in due fattori); allora, $R_{n,4}$ risulterà il quadrato di un ciclo se contiene un H-ciclo e se l'ulteriore fattore di cui è costituito non contiene spigolo alcuno che unisca vertici a distanza maggiore di due sull'H-ciclo. È bene, pure, avvertire che, poichè un grafo $R_{n,4}$ può contenere più di un H-ciclo, è possibile che per un dato H-ciclo non si verifichi la condizione suddetta mentre ciò si abbia, invece, per un altro H-ciclo.

Quanto contenuto nell'Osservazione D può essere utile per il riconoscimento dei grafi $R_{n,4}$ che sono (o sono contenuti in) quadrati di cicli. L'osservazione, allora, insieme al teorema che segue, possono essere utili alla ricerca del numero cromatico di un grafo $R_{n,4}$.

Teorema 4. *Il numero cromatico di un grafo $R_{n,4}$, $n > 5$, quadrato di un ciclo, è 3 o 4, a seconda che n sia o nò multiplo di 3.*

Infatti, sia n multiplo di 3; detto C_n il ciclo di cui $R_{n,4}$ è il quadrato, si ha, per l'Osservazione A e per il Teorema B, $\gamma_1(R_{n,4}) = \gamma_2(C_n) = 3$. Se invece n non è multiplo di 3, essendo $n > 5$, si ha sempre $0 < R(n,3) \leqslant Q(n,3)$ per cui, sempre in base all'Osservazione A e al Teorema B, si ha $\gamma_1(R_{n,4}) = \gamma_2(C_n) = 4$.

Anche in questo caso, il Teorema D risulta migliorato, non potendo esso assicurare altro che $\gamma_1(R_{n,4}) \leqslant 4$. Inoltre, a questo proposito, notiamo pure che nemmeno le limitazioni inferiori fornite dal teorema ([2], [7])

$$\gamma_1(G) \geqslant n/\beta_0 \tag{21}$$

(β_0 è il massimo numero di punti indipendenti di G) oppure dal teorema

$$\gamma_1(G) \leqslant n^2/(n^2 - 2m) \tag{22}$$

(m è il numero degli spigoli di G), valide per ogni grafo G, sono utili per ottenere il Teorema 4; infatti, nel caso in questione, è $\beta_0 = [n/3]$ e $m = 2n$, per cui i secondi membri di (21) e (22) tendono a 1, al divergere di n.

Osservazione E. Si può, poi, passare a considerare il caso in cui si abbia la potenza s-esima di un ciclo; ovvio è che, in tal caso, si ha un grafo $R_{n,2s}$ regolare di valenza $2s$; si può considerare quando un dato grafo regolare di valenza $2s$ si possa ottenere come potenza s-esima di un ciclo; si possono riapplicare l'Osservazione A ed il Teorema B, ottenendo risultati analoghi al Teorema 4 ed, in ogni caso, migliori del Teorema D.

Segnaliamo, infine, nell'ottica del Teorema 3, il seguente

Teorema 5. *Se G è un grafo di ordine multiplo di 4 contenuto nel cubo di un ciclo, si ha $\gamma_1(G) \leqslant 4$, valendo il segno di uguaglianza nel caso che G coincida con il cubo di un ciclo.*

Infatti, si ha, se G è contenuto nel cubo di C_n, $\gamma_1(G) \leqslant \gamma_1(C_n^3) = \gamma_3(C_n)$, da cui segue l'asserto, sempre in base al Teorema B.

Ovviamente il Teorema 5 è, in molti casi, un altro miglioramento del Teorema D, specie se si tiene conto che, nel caso che G sia il cubo di un ciclo, è, per il Teorema D, soltanto $\gamma_1(G) \leqslant 6$.

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI: $[\bullet]_1$ *Sull'isomorfismo tra N-grafi e sulla loro caratteristica*, Rend. Accad. Naz. dei XL (IV) **XXII** (1972), 3-15; $[\bullet]_2$ *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) 15-B (1978), 20-31; $[\bullet]_3$ *Sur les colorations généralisées des hyperarbres et sur les multicolorations des graphes*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 235-242.

[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[3] R. L. BROOKS, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37** (1941), 194-197.

[4] M. FERRO, *Caratteristiche dei singrammi orientati*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **2** (1973), 159-173.

[5] A. M. GHIRLANDA, *Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **11** (1964), 93-106.

[6] M. GIONFRIDDO, *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454.

[7] F. HARARY, *Graph theory*, Addison-Wesley Publ. Com., Reading, Massachusetts, 1972.

[8] F. SPERANZA, *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, Suppl. fasc. 3 (1975), 53-62.

[9] G. SZEKERES and H.S. WILF, *An inequality for the chromatic number of a graph*, J. Combin. Theory 4 (1968), 1-3.

Summary

We introduce generalized degree of a vertex of a graph and observe something about generalized characteristic and related problems. Then we give some results which make use of the notion of generalized degree and allow to improve the theorems of Szekeres, Wilf and Brooks on classical colourings. We obtain these results by means of other ones on generalized colourings.

* * *