Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 19-29

TIZIANA COLLINI LANZI (*)

Soluzioni periodiche per le disequazioni di Navier-Stokes con condizioni al contorno non lineari (**)

1 – Sia Ω un insieme aperto limitato di R^m, dotato della proprietà di cono, e sia $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ la sua frontiera. Nel seguito, supporremo, per semplicità, Γ_1 e Γ_2 superfici piane.

Le equazioni di Navier-Stokes che governano il moto di un fluido viscoso incomprimibile supposto di densità unitaria sono

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & \frac{\partial \boldsymbol{u}(x,\, t)}{\partial t} - \mu \Delta \boldsymbol{u}(x,\, t) + (\boldsymbol{u}(x,\, t)\cdot \operatorname{grad})\, \boldsymbol{u}(x,\, t) + \operatorname{grad} p(x,\, t) = \boldsymbol{f}(x,\, t) \\ & \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,\, t) = 0\end{aligned}$$

dove μ è il coefficiente di viscosità, $\boldsymbol{u} = \{u_1 \dots u_m\}$ la velocità, p la pressione e $\boldsymbol{f} = \{f_1 \dots f_m\}$ la forza esterna.

Alle equazioni (1.1) associamo le condizioni al contorno

$$(1.2)_1 \quad \boldsymbol{u}(x,\, t) = 0 \quad x \in \Gamma_3 \quad 0 \leqq t \leqq T\,, \quad \boldsymbol{u}(x,\, t) \times \tau = 0 \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad 0 \leqq t \leqq T\,,$$

$$(1.2)_2 \quad p(x,\, t) = \overline{p}(x,\, t) \quad x \in \Gamma_1 \quad 0 \leqq t \leqq T\,,$$

$$(1.2)_3 \quad p = \alpha(x,\, t) - \tfrac{1}{2} |\boldsymbol{u}(x,\, t)|^2 \quad x \in \Gamma_2 \quad 0 \leqq t \leqq T\,,$$

dove con τ si è indicato il versore tangente a Γ.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Facoltà d'Ingegneria del Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del MPI 60%: Problemi di evoluzione e problemi malposti della Fisica Matematica. — Ricevuto: 13-IV-1984.

Si osservi che, se si considera il caso tridimensionale, le (1.1) rappresentano il moto di un fluido viscoso incomprimibile in un tronco di tubo Ω con sezione di ingresso Γ_1, di uscita Γ_2 e superficie laterale Γ_3. In tal caso la prima delle (1.2) equivale ad imporre che la velocità si annulli sulla superficie laterale del tubo, la seconda che si annulli la componente tangenziale della velocità stessa sulla sezione di ingresso ed uscita, la terza assegna la pressione sulla sezione di ingresso Γ_1 e la quarta il valore dell'«energia totale» del fluido sulla sezione di uscita Γ_2.

Ricordiamo che, un problema analogo al problema misto qui descritto, per le equazioni di Navier-Stokes, è stato trattato in $[6]_1$ ove, limitatamente al caso bidimensionale, si è dimostrato un teorema di esistenza e unicità in piccolo della soluzione.

In questo lavoro consideriamo invece il sistema ottenuto dal sistema (1.1) sostituendo la prima equazione con la disequazione ad essa associata; si ottiene così il seguente sistema

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \Big\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}(x,\eta)}{\partial \eta} - \mu \Delta \boldsymbol{u}(x,\eta) + (\boldsymbol{u}(x,\eta)\cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{u}(x,\eta) \\
(1.3)\qquad &\qquad + \mathrm{grad}\, p(x,\eta) - \boldsymbol{f}(x,\eta)\Big\}(\boldsymbol{u}(x,\eta) - \boldsymbol{\varphi}(x,\eta))\, d\Omega\, d\eta \leqq 0 \\
&\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}(x,t) = 0,
\end{aligned}
$$

ove $\boldsymbol{u}(x,t)$ e la test function $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$ appartengono ad un opportuno insieme convesso (per lo studio del legame esistente fra le soluzioni del sistema (1.1) e quelle del sistema (1.3) e per una interpretazione fisica dei risultati ottenuti si rimanda a $[6]_2$ e [7].

In questo lavoro ci proponiamo di studiare per il sistema (1.3), (1.2) il problema delle soluzioni periodiche. Il risultato che si è ottenuto è un teorema di esistenza e unicità della soluzione periodica con opportune ipotesi e in un senso che verrà nel seguito precisato. Ciò è stato possibile in quanto per il sistema (1.3) con le condizioni (1.2) è stato dimostrato in [2] un teorema di esistenza globale e unicità della soluzione debole, soddisfacente la condizione iniziale $\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{a}(x)$, generalizzando un risultato ottenuto in $[6]_2$ nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet omogenee. Ricordiamo che il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche è stato trattato, per le equazioni di Navier-Stoker, da vari autori. In particolare Prodi lo ha studiato nel caso bidimensionale e con condizioni di Dirichlet omogenee [5], Prouse $[6]_3$ e Yudovic [3] hanno generalizzato i risultati di Prodi al caso n-dimensionale; Zaretti ha considerato lo stesso problema con condizioni al contorno non lineari [8]. Per quanto riguarda le disequazioni associate alle equazioni di Navier-Stoker, ricordiamo il teorema di esistenza delle soluzioni periodiche nel caso di condizioni di Dirichlet omogenee, ottenuto da Lions [4] (Cap. 4, Th. 62).

Infine è opportuno ricordare il lavoro di Biroli [1] nel quale viene dimostrato un teorema di esistenza e unicità della soluzione quasi-periodica per le disequazioni di Navier-Stokes, nel caso bidimensionale e per un problema di Dirichlet omogeneo.

2 – Prima di dare la definizione di soluzione periodica è utile introdurre alcune notazioni e spazi funzionali. Sia

$$\tilde{N} = \{\boldsymbol{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{u} = 0 \text{ in un intorno di } \Gamma_3,\ \boldsymbol{u} \times \tau = 0 \text{ su } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\},$$

$$\tilde{N}^s = \text{chiusura di } \tilde{N} \text{ in } H^s(\Omega),\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})_{\tilde{N}^s} = (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) H_0^s(\Omega) \qquad \forall s \geq 0,$$

$$(\tilde{N}^s)' = \text{spazio duale di } \tilde{N}^s,\ (\tilde{N}^0)' = \tilde{N}^0,\ \langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle = \text{dualità fra } (\tilde{N}^1)' \text{ e } \tilde{N}^1.$$

Sia inoltre K l'insieme chiuso convesso di $\tilde{N}^1$ così definito

$$K = \{\boldsymbol{v} \in \tilde{N}^1;\ |\boldsymbol{v}| \leqq M \text{ q.o in } \Omega\}.$$

Poniamo inoltre

$$b(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = ((\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})_{\tilde{N}^0} = \int_\Omega \sum_{j,K=1}^{m} u_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} w_j \, d\Omega.$$

Supposto che $\boldsymbol{f}(t)$, $\alpha(t)$, $\overline{p}(t)$ (1) siano periodiche di periodo T, diremo che $\boldsymbol{u}(t)$ *è una soluzione periodica di periodo T di* (1.3) *soddisfacente le* (1.2) se

(i) $\boldsymbol{u}(t) \in L^2(0,\ T;\ \tilde{N}^1 \cap K) \cap L^\infty(0,\ T;\ \tilde{N}^0)$,

(1) Qui e nel seguito porremo

$$\boldsymbol{u}(t) = \{\boldsymbol{u}(x,\ t),\ x \in \Omega\ \ 0 \leqq t \leqq T\}, \qquad \boldsymbol{u}'(t) = \{\frac{\partial \boldsymbol{u}(t)}{\partial t}, \qquad x \in \Omega\ \ 0 \leqq t \leqq T\},$$

$$\boldsymbol{f}(t) = \{\boldsymbol{f}(x,\ t)\ \ x \in \Omega\ \ 0 \leqq t \leqq T\}, \qquad \overline{p}(t) = \{\overline{p}(x,\ t), \qquad x \in \Gamma\ \ 0 \leqq t \leqq T\},$$

$$\alpha(t) = \{\alpha(x,\ t)\ \ x \in \Gamma \qquad 0 \leqq t \leqq T\}.$$

(ii) $\boldsymbol{u}(t)$ soddisfa q.o in $[0, T]$, la disequazione

$$\int_0^T \{(\boldsymbol{\varphi}'(t),\ \boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t))_{N^0}+\mu(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t))_{\tilde{N}^1}-\langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle$$

$$+\,b(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t))+\int_{\Gamma_1}\overline{p}(t)\,(\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t))\times \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma_1$$

$$+\int_{\Gamma_2}(\alpha(t)-\tfrac{1}{2}\,|\,\boldsymbol{u}(t)\,|^2)\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t))\times \boldsymbol{\nu}\mathrm{d}\Gamma_2\}\,\mathrm{d}t\leqq 0$$

$\forall\boldsymbol{\varphi}(t)\ L^2(0,\ T;\ K\cap\tilde{N}^1)$ con $\boldsymbol{\varphi}'(t)\in L^2(0,\ T;\ \tilde{N}^0)$. Con $\boldsymbol{\nu}$ si è indicato il versore della normale a Γ (diretto verso l'esterno).

3 - Dimostriamo ora il seguente

Teorema 1. *Se le funzioni* $\boldsymbol{f}(t)$, $\alpha(t)$, $\overline{p}(t)$ *sono periodiche di periodo* T *e tali che* $\boldsymbol{f}(t)\in L^2(0,\ T,\ (N^1)')$, $\alpha(t)\in L^2(\Gamma_2\times(0,\ T))$, $\overline{p}(t)\in L^2(\Gamma_2\times(0,\ T))$, *allora esiste almeno una soluzione periodica di periodo* T *di* (1.3) *con le condizioni al contorno* (1.2) *nel senso precisato in* **2**.

Il metodo che viene seguito per la dimostrazione consiste nel far vedere dapprima, mediante un teorema di punto unito di Tychonoff, che un sistema di equazioni differenziali ordinarie approssimanti, associato alle (1.3), ammette almeno una soluzione periodica; si dimostrerà poi che dalla successione delle soluzioni approssimate periodiche si può estrarre una sottosuccessione che converge debolmente verso una soluzione pure periodica del problema considerato.

Sia β un operatore di penalizzazione relativo al convesso K, definito in **1**, e P l'operatore di proiezione relativo al convesso K; sia $\{\boldsymbol{g}_j\}$ una base di $\tilde{N}^s$ ortonormale in $\tilde{N}^0$ (con $s>m/2$) e Π_n l'operatore di proiezione sul sottospazio definito da $\{\boldsymbol{g}_1\ \dots\ \boldsymbol{g}_n\}$. Poniamo $\boldsymbol{v}_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j,n}(t)\,\boldsymbol{g}_j$, $\boldsymbol{f}_n(t)=\Pi_n\,\boldsymbol{f}(t)$, $\beta(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}-P\boldsymbol{z}$ e consideriamo il seguente sistema penalizzato di equazioni differenziali approssimanti dedotto da (1.3)

$$(3.1)\qquad (\boldsymbol{v}_n'(t)-\mu\Delta\boldsymbol{v}_n(t)+n\beta(\boldsymbol{v}_n(t))-\boldsymbol{f}_n(t),\ \boldsymbol{g}_j)_{N^0}+b(P\boldsymbol{v}_n(t),\ P\boldsymbol{v}_n(t),\ \boldsymbol{g}_j)$$

$$+\,(\overline{p}(t)\cdot\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{g}_j)_{L^2(\Gamma_1)}+((\alpha(t)-\tfrac{1}{2}\,|P\boldsymbol{v}_n(t)|^2)\cdot\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{g}_j)_{L^2(\Gamma_2)}=0$$

dove $j=1,\ \dots,\ n$, con la condizione iniziale $\boldsymbol{v}_n(0)=\Pi_n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n$.

Ricordando la relazione

$$b(v(t),\ v(t),\ \varphi(t)) = -\,b(v(t),\ \varphi(t),\ v(t)) + \int_\Gamma \sum_{ik=1}^m v_i(t)\, v_k(t)\, \varphi_k(t) \cos \nu x_i\, d\Gamma ,$$

la (3.1) si può scrivere nella forma

$$(3.2)\qquad (v_n'(t) - \mu\,\Delta v_n(t) + n\beta(v_n(t)) - f_n(t),\ g_j)_{\tilde N^0} + b(Pv_n(t),\ g_j,\ Pv_n(t))$$
$$+ \int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m Pv_{ni}(t)\, Pv_{nk}(t)\, g_{jk} \cos \nu x_i\, d\Gamma + (\overline{p}(t)\cdot \nu,\ g_j)_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$+ ((\alpha(t) - \tfrac12 |Pv_n(t)|^2)\cdot \nu,\ g_j)_{L^2(\Gamma_2)} = 0 .$$

Questo sistema ammette una soluzione in $[0,\ T]$ (cfr. [2]).

Moltiplicando le (3.2) per $\alpha_{jn}(t)$ e sommando rispetto a j si ottiene

$$(3.3)\qquad (v_n'(t),\ v_n(t))_{\tilde N^0} + \mu(v_n(t),\ v_n(t))_{\tilde N^1} - b(Pv_n(t),\ v_n(t),\ Pv_n(t))$$
$$+ (\overline{p}(t)\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_1)} + \int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m Pv_{ni}(t)\, Pv_{nk}(t)\, v_{nk}(t) \cos \nu x_i\, d\Gamma$$
$$+ ((\alpha(t) - \tfrac12 |Pv_n(t)|^2)\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_2)} + n(\beta(v_n(t)),\ v_n(t))_{\tilde N^0} - (f_n(t),\ v_n(t))_{\tilde N^0} = 0 .$$

Ricordando che $(\beta(v_n(t)),\ v_n(t))_{\tilde N^0} \geqq 0$, l'uguaglianza precedente diviene

$$(3.4)\qquad \frac12 \frac{d}{dt} \|v_n(t)\|^2_{\tilde N^0} + \mu \|v_n(t)\|^2_{\tilde N^1} - b(Pv_n(t),\ v_n(t),\ Pv_n(t)) + (\overline{p}(t)\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$+ \int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m Pv_{ni}(t)\, Pv_{nk}(t)\, v_{nk}(t) \cos \nu x_i\, d\Gamma + ((\alpha(t) - \tfrac12 |Pv_n(t)|^2)\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_2)}$$
$$- (f_n(t),\ v_n(t))_{\tilde N^0} \leqq 0 .$$

Valgono d'altra parte, per la definizione di P e per ben noti teoremi di traccia, le seguenti disuguaglianze

$$(3.5)_{1,2}\qquad |b(Pv_n(t),\ v_n(t),\ Pv_n(t)| \leqq M^2 C \|v_n\|_{\tilde N^1} , \qquad |(\overline{p}\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_1)}| \leqq C_3 \|v_n(t)\|_{\tilde N^1} ,$$

$$(3.5)_3\qquad \Big| \int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m Pv_{ni}(t)\, Pv_{nk}(t) v_{nk}(t) \cos \nu x_i)\, d\Gamma \Big| \leqq C_2 \|v_n(t)\|_{\tilde N^1} ,$$

$$(3.5)_{4,5}\ |(\alpha(t)\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_2)}| \leqq C_4 \|v_n(t)\|_{\tilde N^1} , \qquad |(\tfrac12 |Pv_n(t)|\cdot \nu,\ v_n(t))_{L^2(\Gamma_2)}| \leqq C_5 \|v_n(t)\|_{\tilde N^1} .$$

La (3.4) diventa quindi

$$\frac12 \frac{d}{dt} \|v_n(t)\|^2_{\tilde N^0} + \mu \|v_n(t)\|^2_{\tilde N^1} \leqq \|v_n(t)\|_{\tilde N^1} \{C_1 \|f_n(t)\|_{\tilde N^0} + K\} ,$$

dove $K = M^2 C + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$. Da cui integrando fra 0 e t $(0 \leqq t \leqq T)$ si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_n(t)\|^2_{\tilde N^0} - \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_n(0)\|^2_{\tilde N^0} + \mu \int_0^t \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^0}\,\mathrm{d}\tau \leqq \int_0^t \|v_n(\tau)\|_{\tilde N^1}\{C_1\|f(\tau)\|_{\tilde N^0} + K\}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqq \{\int_0^t \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\mathrm{d}\tau\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{2\int_0^t C_1^2\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{\tilde N^0} + K^2)\,\mathrm{d}\tau\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ponendo $t = T$ segue

$$\|\boldsymbol{v}_n(T)\|^2_{\tilde N^0} \leqq \|\boldsymbol{v}_n(0)\|^2_{\tilde N^0} - 2\mu \int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^0}\,\mathrm{d}\tau + 2K_1\{\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^0}\,\mathrm{d}\tau\}^{1/2}$$

dove si è posto $K_1 = 2\{\int_0^T (C_1^2\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{\tilde N^0} + K^2)\,\mathrm{d}\tau\}^{\frac{1}{2}}$. Risulta quindi

$$\|\boldsymbol{v}_n(T)\|^2_{\tilde N^0} \leqq \|\boldsymbol{v}_n(0)\|^2_{\tilde N^0} + 2\{K_1 - \mu(\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\,\mathrm{d}\tau)^{1/2}\}\,\{\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\,\mathrm{d}\tau\}^{1/2}. \tag{3.6}$$

Ora se $K_1 - \mu\{\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\,\mathrm{d}\tau\}^{\frac{1}{2}} \leqq 0$, cioè se $\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^0}\,\mathrm{d}\tau \geq K_1^2/\mu^2$, segue dalla (3.6)

$$\|\boldsymbol{v}_n(T)\|^2_{\tilde N^0} \leq \|\boldsymbol{v}_n(0)\|^2_{\tilde N^0}.$$

Se invece $\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\mathrm{d}\tau < K_1^2/\mu^2$, allora esiste un $\bar t \in [0, T]$ tale che

$$\|\boldsymbol{v}_n(\bar t)\|^2_{\tilde N^0} \leq K_2\|\boldsymbol{v}_n(\bar t)\|^2_{\tilde N^1} \leq K_2(1/T)(K_1^2/\mu^2).$$

Dalla (3.6) scritta per l'intervallo $(t, \bar t)$ con $0 \leq t \leq T$ si ottiene allora

$$\|\boldsymbol{v}_n(t)\|^2_{\tilde N^0} \leq \|\boldsymbol{v}_n(\bar t)\|^2_{\tilde N^0} + 2K_1\{|\int_{\bar t}^t \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\,\mathrm{d}\tau|\}^{1/2} \tag{3.7}$$

$$\leq K_2(K_1^2/\mu^2)(1/T) + 2K_1^2/\mu = C_6.$$

Si deduce che, se è $\|\boldsymbol{v}_n(0)\|^{2BQ9}_{\tilde N^1} \geq C_6$, deve necessariamente risultare $\int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(\tau)\|^2_{\tilde N^1}\,\mathrm{d}\tau \geq K_1^2/\mu^2$ e di conseguenza

$$\|\boldsymbol{v}_n(T)\|_{\tilde N^0} \leq \|\boldsymbol{v}_n(0)\|_{\tilde N^0}. \tag{3.8}$$

Definiamo ora una trasformazione S mediante la relazione

$$S\boldsymbol{v}_n(0) = \boldsymbol{v}_n(T) \tag{3.9}$$

dove $\tilde v_n(t)$ è una soluzione (che esiste in [0, T]) del sistema (3.1). La trasformazione S definita dalle (3.9) è come noto continua. Inoltre per le (3.8), (3.7), (3.6), muta in sé ogni sfera dello spazio euclideo S^n con centro nell'origine e $R \geq \sqrt{C_6}$. Da un teorema di punto unito di Tychonoff si deduce allora l'esistenza di almeno una soluzione $\bar{v}_n(t)$ per il sistema (3.1) tale che $\bar{v}_n(T) = \bar{v}_n(0)$. Se i dati sono periodici di periodo T, tale soluzione risulta ovviamente periodica e per essa vale la relazione

$$\|\bar{v}_n(t)\|_{\bar{N}^0} \leq \sqrt{C_6}. \tag{3.10}$$

Mostriamo ora che è possibile estrarre dalla successione $\{\bar{v}_n(t)\}$ delle soluzioni approssimate periodiche, una sottosuccesione debolmente convergente verso una soluzione periodica del sistema (1.3), ossia verso una funzione $\bar{v}(t)$ soddisfacente le (i) (ii) di 2.

A questo scopo osserviamo che dalla (3.3) (scritta per le $\bar{v}_n(t)$) si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{v}_n(t),\ v_n(t)_{\bar{N}^0} + \mu(\bar{v}_n(t),\ \bar{v}_n(t))_{\bar{N}^1} + n(\beta(\bar{v}_n(t),\ \bar{v}_n(t))_{\bar{N}^0}$$
$$+ b(Pv_n(t),\ \bar{v}_n(t),\ Pv_n(t)) - (f_n(t),\ \bar{v}_n(t))_{\bar{N}^0} + (P(t)\cdot \mathbf{v},\ \bar{v}_n(t))_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$+ ((\alpha(t) - \tfrac{1}{2}|P\bar{v}_n(t)|^2)\cdot \mathbf{v}\bar{v}_n(t))_{L^2(\Gamma_2)} + \int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m P\bar{v}_{ni}(t)\,P\bar{v}_{nk}(t)\,\bar{v}_{nk}(t)\cos \mathbf{v}x_i \mathrm{d}\Gamma = 0\,.$$

Integrando su [0, T] si ottiene

$$\mu\int_0^T \|v_n(\tau)\|^2_{\bar{N}^1}\mathrm{d}\tau + n\int_0^T \{(\beta(\bar{v}_n(\tau),\ \bar{v}_n(\tau))_{\bar{N}^0} - b(Pv_n(\tau),\ \bar{v}_n(\tau),\ Pv_n(\tau))$$
$$-(f_n(t),\ \bar{v}_n(\tau))_{\bar{N}^0}\}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^T (\overline{p}\cdot \mathbf{v},\ \bar{v}_n(\tau))_{L^2(\Gamma_1)} + \int_0^T (\alpha(\tau - \tfrac{1}{2}|P\bar{v}_n(\tau)|^2)\cdot \mathbf{v},\ \bar{v}_n(\tau))_{L^2(\Gamma_2)}\mathrm{d}\tau$$
$$+ \int_0^T\int_\Gamma \sum_{i,k=1}^m (P\bar{v}_{ni}(\tau)\,P\bar{v}_{nk}(\tau)\,\bar{v}_{nk}(\tau)\cos \mathbf{v}x_i\,\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Tenendo presente la monotonia dell'operatore β e le (3.5), si deduce che

$$\int_0^T \|v_n(t)\|^2_{\bar{N}^1}\mathrm{d}\tau \leqq M_1\,. \tag{3.11}$$

Dalle (3.10) (3.11) si deduce, seguendo uno procedimento classico, che è possibile estrarre da $\{\bar{v}_n(t)\}$ una sottosuccessione convergente debolmente verso una funzione $\bar{v}(t)$, che soddisfa le condizioni (i) (ii) di 2. Il teorema è così completamente dimostrato.

4 – Dimostriamo ora l'unicità della soluzione del problema considerato in **1**.

Teorema 2. *Nelle stesse ipotesi del Teorema* 1 *e sotto ulteriori opportune condizioni su* $\boldsymbol{f}$, μ e M ([2]) *la soluzione del problema* (1.2) (1.3) *è unica.*

Supponiamo infatti, per assurdo, che $\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{v}(t)$ siano due soluzioni periodiche di periodo T, soddisfacenti il sistema (1.3) con le condizioni al contorno (1.2), nel senso precisato in **2**.

Poniamo

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t)}{2}\,.$$

Fissiamo arbitrariamente t_1 e t_2 in $[0\,T]$ e definiamo $\boldsymbol{w}_j(t)$ mediante la relazione

$$\frac{1}{j}\,\boldsymbol{w}_j'(t)+\boldsymbol{w}_j(t)=\boldsymbol{w}(t)$$

con $\quad \boldsymbol{w}_j(t_1)=\boldsymbol{w}(t_1),\ \ \boldsymbol{w}_j(t)\in H^1(0,T;N^1)\,,\ \ \boldsymbol{w}_j(t)\to\boldsymbol{w}(t)\ \text{ in } L^2(0,T;N^1),$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{w}'_j(t),\boldsymbol{w}(t)-\boldsymbol{w}_j(t))_{N^0}\,\mathrm{d}\geqslant 0\qquad \forall t\in[t_1,t_2]\,, \tag{4.1}$$

$$|\boldsymbol{w}_j(x,t)|\leqq M\ \text{ q.o. in } \Omega\times[t_1,t_2]\,.$$

Consideriamo ora la disequazioone (ii) relativa all'intervallo $[t_1,t_2]$ con $t_1,t_2\in[0\,T]$ e scriviamola per $\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{v}(t)$ con $\varphi(t)=\boldsymbol{w}_j(t)$ (quest'ultima uguaglianza è possibile per la definizione delle $\boldsymbol{w}_j(t)$); sommiamo poi membro a membro. Ora ricordando la proprietà (4.1) e passando al limite per $j\to\infty$ otteniamo la disequazione

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\boldsymbol{v}(t_2)-\boldsymbol{u}(t_2)}{2}\right\|^2_{N^0}-\left\|\frac{\boldsymbol{v}(t_1)-\boldsymbol{u}(t_1)}{2}\right\|^2_{N^0}\leqq\int_{t_1}^{t}\Big\{&-\frac{\mu}{2}(\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t))_{\tilde N^0}\\ &-\tfrac12 b(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t))-\tfrac12 b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t\\ &-\tfrac12\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma 2}\{(|\boldsymbol{v}(t)|^2-|\boldsymbol{u}(t)|^2)(\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t))\}\cdot\mathrm{v}\,\mathrm{d}\Gamma_2\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}\tag{4.2}$$

([2]) Tali ipotesi verranno esplicitamente indicate nel corso della dimostrazione. Esse consistono comunque nel supporre $\boldsymbol{f}$, M sufficientemente «piccoli» o μ sufficientemente «grande».

Ricordiamo ora che

$$(4.3)\qquad |b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})| = |b(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})|$$

$$= |-b(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})| + \int_\Gamma \{\sum_{i,j=1}^{m} (v-u)_i (v-u)_j u_j \cos \nu x_i\}\, d\Gamma$$

$$\leqq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1} \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{L^{2m/m-2}} \|\boldsymbol{u}\|_{L^m} + \int_\Gamma \{\operatorname{Sup}|u_j|\, |(v-u)_i|\, |(v-u)_j|\}\, d\Gamma$$

$$\leqq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1} \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{L^{2m/m-2}} \|\boldsymbol{u}\|_{L^m} + MC\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^0}\,.$$

Inoltre, poichè $N^1 \subset L^{2m/m-2}$, si ha $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{L^{2m/m-2}} \leqq (1/C')\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1}$ ed inoltre $\|\boldsymbol{u}\|_{L^m} \leqq C''\|\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^0}^{2/m} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}^{1-2/m}$.

La (4.3) diventa

$$(4.4)\qquad |b(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})| \leqq C''/C'\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1}^2 \|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2/m} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}^{1-2/m} + MC\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1}^2\,.$$

Inoltre si ha

$$(4.5)\qquad (|\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2)\cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{L^2(\Gamma_2)}| = |(|\boldsymbol{v}| - |\boldsymbol{u}|)(|\boldsymbol{v}| - |\boldsymbol{u}|)\cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{L^2(\Gamma_2)}|$$

$$\leqq 2M(||\boldsymbol{v}| - |\boldsymbol{u}||\cdot \nu, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{L^2(\Gamma_2)} \leqq 2M(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|\cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{L^2(\Gamma_2)})$$

$$\leqq 2M\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \leqq dM\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^0}\,.$$

Sostituendo le (4.3), (4.4) e (4.5) nella (4.2) si ottiene

$$(4.6)\qquad \|\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{u}(t_2)\|_{\tilde{N}^0} - \|\boldsymbol{v}(t_1) - \boldsymbol{u}(t_1)\|_{\tilde{N}^1}^2$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} \{-\mu + C''/C'\|\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^0}^{2/m} \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}^{1-2/m} + MC + dM\}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1}^2\, dt\,.$$

Ricordando che per la (3.10) $\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\tilde{N}^0}\sqrt{C_6}$ dove C_6 è dato dalla (3.7), e che $\boldsymbol{u}(t) \in K$, la (4.6) si può scrivere nel seguente modo

$$\|\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{u}(t_2)\|_{\tilde{N}^0}^2 - \|\boldsymbol{v}(t_1) - \boldsymbol{u}(t_1)\|_{\tilde{N}^0}^2$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} \{-\mu + C''/C'(\sqrt{C_6})^{2/m} (M)^{1-2/m} + MC + dM\}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\tilde{N}^1}^2$$

dove C'', C', C e d sono costanti di immersione.

Ora, se vale la relazione

$$(4.7) \qquad -\mu + C''/C'(\sqrt{C_6})^{2/m}(M)^{1-2/m} + MC + dM < 0 \ ,$$

allora il secondo membro della (4.6) è negativo e quindi la $\|v(t) - u(t)\|_{\tilde{N}^0}$ risulterebbe non crescente. Ciò è assurdo essendo essa una funzione periodica; deve perciò necessariamente risultare $\|v(t) - u(t)\|_{\tilde{N}^0} = 0 \ \forall t$ da cui segue la tesi.

Osservazione. Ricordando che

$$C_6 = K_1^2/\mu(K_2/\mu T + 2) \qquad K_1^2 = 2\int_0^T (C_1^2\|f(\tau)\|^2_{\tilde{N}^0} + K^2)\,d\tau$$

dove K_2, C_1 e K sono delle costanti di immersione, possiamo scrivere la (4.7) nel seguente modo

$$(4.8) \quad -\mu + MC + C''/C'\left\{\left(\frac{2\int_0^T (C_1^2\|f(\tau)\|^2_{\tilde{N}^0} + K^2)}{\mu}\right)\left(\frac{K_2}{\mu T} + 2\right)\right\}^{1/m}(M)^{1-2/m} + dM < 0 \ .$$

Notiamo che il primo membro della (4.8) è una funzione crescente rispetto a $\|f\|$ e ad M e decrescente rispetto a μ; di conseguenza la disuguaglianza è verificata purchè μ sia sufficientemente «grande», o f ed M siano sufficientemente «piccoli».

Qualora in particolare, fosse $\sqrt{C_6} \geq M(\text{mis}\,\Omega)$ allora dalla (4.8) si deduce una relazione nella quale non compare più esplicitamente la forza esterna.

Bibliografia

[1] M. Biroli, *Sur l'inéquation d'évolution de Navier-Stokes*, (I), (II), (III), Atti Acc. Naz. Lincei Rend. 52 (1972), 457-460, 591-598, 811-813.

[2] T. Collini, *Un problema misto non lineare per una disequazione associata alle equazioni di Navier-Stokes*, Istit. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A,**116**, (1985), 167-177.

[3] V. T. Judovic, *Periodic motions of a viscous incompressible fluid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **130** (1960), 38-52.

[4] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunad, Paris 1969.

[5] G. Prodi, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes*, Ann. Mat. Pura Appl. 48 (1959), 1-15.

[6] G. Prouse: $[\bullet]_1$ *Su alcuni problemi per l'equazioni di Navier-Stokes*, Simposia Mathematica 7 (1971), 43-83; $[\bullet]_2$ *On an inequality related to the motion, in any dimension, of viscous, incompressible fluids*, (I), (II), Atti Acc. Naz.

Lincei **67** (1979), 191-196, 282-288; [•]$_3$ *Soluzioni periodiche delle equazioni di Navier-Stokes*, Atti Acc. Lincei Rend. **35** (1963), 443-447.

[7] G. PROUSE and A. ZARETTI: [•]$_1$ *On the inequalities associated to a model of Graffi for the motion of a mixture of two viscous, incompressible fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. (in corso di stampa).

[8] A. ZARETTI, *Soluzioni periodiche di un problema misto non lineare per le equazioni di Navier-Stokes*, Atti Acc. Naz. Lincei **51** (1971), 84-91.

Summary

In the present note we consider an inequality related to the motion, in any dimension, of viscous, incompressible fluids and we prove an existence and uniqueness theorem for a periodic solution satisfying non-linear boundary conditions.

* * *