Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 351-361

MARCO BARONTI (*)

Operatori limitati su L^p (R^n) (**)

Introduzione

In questo lavoro si studia la limitatezza di certi operatori definiti su $L^p(R^n)$, con $1 < p < +\infty$, in particolare quelli del tipo $Af(r) = \int a(r, \xi)\hat{f}(\xi) \exp(2\pi i r\xi)\, d\xi$, $f \in L^p(R^n)$, dove $(r, \xi) \in R^n \times R^n$ e $a(\cdot, \cdot)$ è una funzione in $L^\infty(R^n \times R^n)$ soddisfacenti alle seguenti ipotesi di regolarità sulle derivate, intese nel senso delle distribuzioni: per $p = 2$, $\|D^\alpha a(\cdot, \cdot)\|_\infty < +\infty$ per ogni multiindice α t.c. $|\alpha| \leqslant 4n + 4$, per $p \in (1, +\infty)$, $|D^\alpha a(x, y)| \leqslant C_\alpha(1 + x^2 + y^2)^{-|\alpha|/2}$ per ogni $x, y \in R^n$ e per ogni multiindice α t.c. $|\alpha| \leqslant 4n + 4 + \chi$, con χ il primo intero maggiore di $n/2$, (D indica l'usuale operatore di derivazione).

Da tali condizioni si deduce la limitatezza dell'operatore corrispondente. Il teorema, nel caso $p = 2$, fu dimostrato per la prima volta da Calderon-Vaillancourt nel lavoro « On the boundedness of pseudo-differential operators », J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 374-378. In tale lavoro, tuttavia, Calderon e Vaillancourt supponevano l'appartenenza in L^∞ di un numero maggiore di derivate di quello considerato qui.

Nel libro « An delà des operateurs pseudo-differentials », Asterisque **57** (1978), R. Coifman e Y. Meyer estendono il risultato di Calderon e Vaillancourt ottenendo il seguente teorema. « Sia w un modulo di continuità tale che per ogni multiindice $\alpha \in N^n$ esiste $C_\alpha > 0$ t.c.

(1) $|\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C_\alpha(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$,

(2) $|\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) - \partial_\xi^\alpha a(y, \xi)| \leqslant C_\alpha w(|x - y|)(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$,

(3) $\sum_{j=1}^{+\infty} (w(2^{-j}))^2 < +\infty$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-III-1984.

Allora il corrispondente operatore Af risulta limitato su $L^p(R^n)$, con $1 < p < +\infty$. »

Tale enunciato è solo in parte più generale di quello qui presentato perchè le ipotesi considerate riguardano derivate di qualsiasi ordine. Le tecniche dimostrative qui presentate si differenziano sia da quelle di Colderon-Vaillancourt che da quelle di Coifman-Meyer. Infatti, per dimostrare la limitatezza su $L^p(R^n)$ si usa il metodo della trasferenza e come primo passo si mostra che l'operatore A può essere considerato come l'operatore trasferito dell'operatore di convoluzione con una opportuna distribuzione definita sul gruppo di Heisenberg con centro compatto. A tal fine si segue un'idea di R. Howe [**6**] costruendo una partizione particolare dell'unità per potersi ricondurre al caso di distribuzioni a supporto compatto. Si applicano, quindi, un risultato di M. Cowling [**1**] ed un risultato di trasferenza stabilito da G. Mauceri [**7**]. Per il caso $p \in (1, +\infty)$ è necessario ricorrere anche ad un risultato di L. Hormander [**5**] che dà condizioni affinchè una funzione in $L^\infty(R^n \times R^n)$ sia in $M_p^p(R^n \times R^n)$.

1 - Risultati e definizioni preliminari

Si consideri su $(R^n \times R^n) \times (R^n \times R^n)$ il seguente cociclo $w((x, y), (u, v)) = \exp\,(\pi i(yu - xv))$.

Def. 1.1. Si definisce *gruppo di Heisenberg con centro compatto* l'insieme $H = R^n \times R^n \times T$ (dove T è un toro) con l'operazione di gruppo così definita $(x, y, \exp\,(i\theta)) \cdot (u, v, \exp\,(i\psi)) = (x + u,\ y + v,\ \exp\,(i(\theta + \psi))\, w((x, y), (u, v)))$. La misura di Haar sul gruppo H è la misura prodotto della misura di Lebesgue su $R^n \times R^n$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, con la misura di Lebesgue normalizzata su T, $\mathrm{d}\theta$.

Def. 1.2. Si dice *rappresentazione di Schroedinger* l'operatore π, definito sul gruppo additivo $R^n \times R^n$ e agente sullo spazio $L^p(R^n)$, $1 < p < +\infty$, nel modo seguente $\pi((x, y))\, f(r) = \exp\,(2\pi i(yr + \frac{1}{2}xy))\, f(x + r)$ per ogni funzione f in $L^p(R^n)$. Tale operatore non è in senso stretto una rappresentazione di $R^n \times R^n$ non essendo un omomorfismo di $R^n \times R^n$, tuttavia è una rappresentazione proiettiva, cioè $\pi((x, y) + (u, v)) = w((x, y), (u, v))\, \pi(x, y)\pi(u, v)$.

Osservazione 1.3. La rappresentazione proiettiva di Schroedinger π induce una rappresentazione $\tilde{\pi}$ del gruppo di Heisenberg con centro compatto sullo spazio $L^p(R^n)$ nel modo seguente $\tilde{\pi}(x, y, \exp\,(i\theta)) = \exp\,(i\theta)\pi(x, y) f(r)$.

Def. 1.4. Siano f e g due funzioni misurabili su $R^n \times R^n$. Si definisce *convoluzione* di f e g la seguente funzione $f * g((x, y)) = \int\limits_{R^n \times R^n} f((x - u,\ y - v)) \cdot g((u, v))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$, quando l'integrale ha senso.

Def. 1.5. Siano f e g due funzioni misurabili su $R^n\times R^n$. Si definisce *convoluzione storta* di f e g la seguente funzione $f\times g((x,y)) = \int\limits_{R^n\times R^n} f((x-u, y-v))\cdot g((u,v))\,\overline{w}((x,y),(u,v))\,du\,dv$, quando l'integrale ha senso.

Osservazione 1.6. Sia f una funzione definita su $R^n\times R^n$. Si definisce una funzione $f^{\neq}$ su H nel modo seguente $f^{\neq}((x, y, \exp(i\theta))) = \exp(-i\theta)\cdot f((x,y))$. Si può stabilire un legame tra la convoluzione storta sul gruppo additivo $R^n\times R^n$ e la convoluzione ordinaria sul gruppo di Heisenberg H.

Teorema 1.7. «Siano f e g due funzioni misurabili su $R^n\times R^n$. Allora si ha $f^{\neq} * g^{\neq} = (f\times g)^{\neq}$» .

Def. 1.8. Sia f in $L^1(R^n\times R^n)$. Si dice *trasformata di Weyl* della funzione f l'operatore limitato su $L^2(R^n)$, $\pi(f)$, così definito $\pi(f) = \int\limits_{R^n\times R^n} f((x,y))\,\pi((x,y))\,dx\,dy$.

Def. 1.9. Sia M un operatore limitato su $L^2(R^n\times R^n)$. Si dice che M *è un moltiplicatore di Weyl* di $L^p(R^n\times R^n)$ se l'operatore C_M, definito su $L^1(R^n\times R^n)\cap L^p(R^n\times R^n)$ nel modo seguente $\pi(C_M f) = M\pi(f)$, può essere esteso ad un operatore limitato su $L^p(R^n\times R^n)$.

Come nel caso dei moltiplicatori di Fourier non è difficile vedere che un moltiplicatore di Weyl è un operatore di convoluzione storta con una distribuzione temperata su $R^n\times R^n$.

Def. 1.10. Sia H il gruppo di Heisenberg con centro compatto. Si definisce $A_p(H)$ nel modo seguente: $A_p(H) = \{u = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} f_i * g_i;\ f_i, g_i \in C_c(H)$ tali che $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_p\|g_i\|_q < +\infty\}$, dove $(1/p)+(1/q) = 1$. Se u è in $A_p(H)$ si definisce $\|u\|_{A_p} = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\|f_i\|_p\|g_i\|_q;\ f_i, g_i\in C_c(H);\ u = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} f_i * g_i$ e $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\|f_i\|_p\|g_i\|_q < +\infty\}$. Tale spazio relativo ad un generico gruppo G localmente compatto fu introdotto da Figà-Talamanca in [**3**].

È noto che $A_p(H)$ è un'algebra di Banach ed anche che $A_p(H)\subset C_0(G)$ e che $A_1(H) = C_0(G)$.

Se si indica con $\mathrm{Conv}_p(H)$ l'algebra degli operatori su $L^p(H)$ che commutano con le traslazioni destre, allora si ha il seguente risultato.

Teorema 1.11. « Lo spazio di Banach $\mathrm{Conv}_p(H)$ è isometricamente isomorfo allo spazio duale di $A_p(H)$. »

È opportuno sottolineare che l'isomorfismo tra $\mathrm{Conv}_p(H)$ e $(A_p(H))^*$ è un isomorfismo tra spazi di Banach e non tra algebre di Banach.

Def. 1.12. Sia $A_{\tilde{\pi}}^p(H)$ lo spazio dei coefficienti della rappresentazione $\tilde{\pi}$ così definito $A_{\tilde{\pi}}^p(H) = \{f \in C(H) \colon f = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(\cdot)g_i, h_i)$ con g_i in $L^p(R^n)$ e h_i in $L^q(R^n)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_p \|h_i\|_q < +\infty\}$ con $(1/p) + (1/q) = 1$. Se f è in $A_{\tilde{\pi}}^p(H)$ si definisce $\|f\|_{A_{\tilde{\pi}}^p} = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_p \|h_i\|_q \; f = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(\cdot)g_i, h_i)\}$.

In [7] G. Mauceri stabilisce i seguenti risultati.

Teorema 1.13. « $A_{\tilde{\pi}}^p(H) \subset A_p(H)$. »

Tale risultato si basa essenzialmente sul fatto che $L^p(H)$ è un p-spazio da cui segue, per un risultato di C. Herz ([4], Teorema A), che $A_{\tilde{\pi}}^p(H)$ è contenuto nell'algebra di Banach dei moltiplicatori di $A_p(H)$. In particolare, se f e g sono in $L^p(R^n)$ e in $L^q(R^n)$ rispettivamente, con $(1/p) + (1/q) = 1$, la funzione $u_{f,g}(\cdot) = (\tilde{\pi}(\cdot)f, g)$ è in $A_p(H)$ e $\|u_{f,g}\|_{A_p} \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, dove $(\cdot,\cdot)$ indica la dualità tra L^p e L^q.

Tenendo conto della dualità come spazi di Banach fra $A_p(H)$ e $\mathrm{Conv}_p(H)$ è possibile definire l'operatore trasferito $\tilde{\pi}(T)$ di $T \in \mathrm{Conv}_p(H)$.

Def. 1.14. Sia T in $\mathrm{Conv}_p(H)$. Si definisce *operatore trasferito* di T l'operatore $\tilde{\pi}(T)$ che agisce su $L^p(R^n)$ nel modo seguente $(\tilde{\pi}(T)f, g) = (T, u_{f,g})$, dove $(\cdot,\cdot)$ nel secondo membro indica la dualità fra $A_p(H)$ e $\mathrm{Conv}_p(H)$.

Tale definizione è ben posta poichè la funzione $u_{f,g}$ per il Teorema 1.13 è in $A_p(H)$. Si ha anche che $\tilde{\pi}(T)$ è un operatore limitato su $L^p(R^n)$ la cui norma non supera $|\!|\!| T |\!|\!|_{\mathrm{Conv}_p}$.

Sia K una distribuzione su $R^n \times R^n$. Si indica con $\tilde{K}^{\neq}$ la seguente distribuzione $\tilde{K}^{\neq}(x, y, \exp(i\theta)) = \exp(-i\theta)\tilde{K}(x, y)$, dove $\tilde{K}(x, y) = \exp(-i\pi xy) \cdot K(x, y)$, e con $F_i K$ la trasformata di Fourier di K rispetto alla i-esima variabile. Siano f in $L^p(R^n)$ e g in $L^q(R^n)$ con $(1/p) + (1/q) = 1$.

$$\int_{R^n \times R^n} \tilde{K}(x,y)\pi(x, y) f(r)\, dx\, dy = \int_{R^n \times R^n} K(x, y) f(x + r) \exp(2\pi i y r)\, dx\, dy$$

$$= \int_{R^n} F_2 K(x, -r) f(x + r)\, dx = \int_{R^n} F_1(F_2 K(-\cdot, -r) * f)(\xi) \exp(2\pi i \xi r)\, d\xi$$

$$= \int_{R^n} F_1 F_2 K(-\cdot, -r)(\xi) \hat{f}(\xi) \exp(2\pi i \xi r)\, d\xi = \int_{R^n} \hat{K}(-\xi, -r) \hat{f}(\xi) \exp(2\pi i \xi r)\, d\xi\,.$$

Sia $u_{f,g}(\cdot) = (\tilde{\pi}(\cdot)f, g)$. Allora, per il Teorema 1.13, $u_{f,g} \in A_p(H)$, e poichè $\tilde{K}^{\neq}$

è un convolutore si ha pure che $\tilde{K}^{\neq} \in (A_p(H))^*$; quindi

$$(\tilde{K}^{\neq}, u_{f,g}) = \int_H \tilde{K}^{\neq}(x, y, \exp(i\theta))\, u_{f,g}(x, y, \exp(i\theta))\, dx\, dy\, d\theta$$

$$= \int_{R^n}\Big(\int_{R^n} \tilde{K}(x, y)\pi(x, y) f(r)\, dx\, dy\Big(g(r)\, dr = \int_{R^n \times R^n} \tilde{K}(x, y)\pi(x, y) f\Big) dx\, dy,\ g(\cdot)\Big)\,,$$

e poichè per definizione di operatore trasferito si ha $(\tilde{K}^{\neq}, u_{f,g}) = (\tilde{\pi}(\tilde{K}^{\neq}) f, g)$, segue che

$$\tilde{\pi}(\tilde{K}^{\#}) f(\cdot) = \int_{R^n \times R^n} \tilde{K}(x, y)\pi(x, y) f(\cdot)\, dx\, dy\,.$$

Sempre in [**7**] Mauceri prova il seguente risultato di trasferenza.

Teorema 1.15. « Sia M un moltiplicatore di Weyl di $L^p(R^n \times R^n)$. Allora M è un operatore limitato su $L^p(R^n)$. »

In [**1**] M. Cowling stabilisce il seguente teorema.

Teorema 1.16. « Sia K una distribuzione a supporto compatto su $R^n \times R^n$ e sia $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Allora l'operatore di convoluzione $f \mapsto K * f$ è limitato su $L^p(R^n \times R^n)$ se e solo se l'operatore di convoluzione storta $f \mapsto K \times f$ è limitato su $L^p(R^n \times R^n)$. »

In particolare, dalla dimostrazione del teorema si vede che esiste una costante c che dipende dal compatto tale che se l'operatore di convoluzione $f \mapsto K * f$ è limitato su $L^p(R^n \times R^n)$ e se la sua norma è $|||K *|||_p$ allora, se si indica con $|||K \times|||_p$ la norma di K come operatore di convoluzione storta, si ha $|||K \times|||_p \leqslant c|||K *|||_p$.

In [**5**] L. Hormander prova il seguente risultato.

Teorema 1.17. « Sia $h(\cdot,\cdot)$ una funzione in $L^\infty(R^n \times R^n)$ e si supponga che $\int_{R^2/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4R^2} |D^\alpha h(x, y)|^2\, dx\, dy \leqslant cR^{n-2|\alpha|}$, dove c è una costante, $0 < R < +\infty$, α un multiindice: $|\alpha| \leqslant \chi$, essendo χ il primo intero maggiore di $n/2$. Allora per ogni p in $(1, +\infty)$ si ha che $h \in M_p^p$, dove con M_p^p si indica l'insieme delle trasformate di Fourier $\hat{T}$ di distribuzioni T in Conv_p. »

Infine si consideri il seguente risultato di M. Cowling e A. Mantero attestante che una distribuzione su $R^n \times R^n$, supportata in R^n è limitata come operatore di convoluzione su $L^p(R^n)$ se e solo se è limitata come operatore di convoluzione storta su $L^p(R^n \times R^n)$ e precisamente

Teorema 1.18. « Sia K una distribuzione su R^n. Sia K' la distribuzione definita su $R^n \times R^n$ nel modo seguente $(K', u) = (K, u|_{R^n})$ per ogni $u \in C_c^\infty(R^n \times R^n)$. Allora $|||K *|||_p$ e $|||K' \times|||_p$ sono uguali. »

2 - Risultato principale

Teorema 2.1. *Sia* $a(\cdot,\cdot)$ *una funzione in* $L^\infty(R^n \times R^n)$ *e sia* A *il seguente operatore* $Af(r) = \int_{R^n} a(r, \xi)\hat{f}(\xi) \exp(2\pi i r\xi)\, d\xi$.

(a) Se $\|D^\alpha a(\cdot,\cdot)\|_\infty < +\infty$ *per ogni multiindice* α *tale che* $|a| \leqslant 4n + 4$, *allora esiste una costante* c_2 *tale che* $\|Af\|_2 \leqslant c_2 \|f\|_2$ *per ogni* f *in* $L^2(R^n)$,

(b) *se* $|D^\alpha a(x, y)| \leqslant c_\alpha(1 + x^2 + y^2)^{-|\alpha|/2}$ *per ogni* x, y *in* R^n *e per ogni multiindice* α *tale che* $|\alpha| \leqslant 4n + 4 + \chi$ *con* χ *il primo intero maggiore di* $n/2$, *allora esiste una costante* c_p *tale che* $\|Af\|_p \leqslant c_p \|f\|_p$ *per ogni* $f \in L^p(R^n)$ *con* $1 < p < +\infty$.

Dim. Sia K la distribuzione su $R^n \times R^n$ tale che $a(r, \xi) = \hat{K}(-\xi, -r)$. Sia $\tilde{K}^{\neq}(x, y, \exp(i\theta)) = \exp(-i\theta)\tilde{K}(x, y)$, dove $\tilde{K}(x, y) = \exp(-\pi i x y)\, K(x, y)$. Allora, per quanto visto nella sezione precedente, si ha $Af = \tilde{\pi}(\tilde{K}^{\neq})f$. Si dimostrerà allora la limitatezza dell'operatore A su $L^p(R^n)$ provando che $\tilde{K}^{\neq}$ è un convolutore su $L^p(H)$. Per dimostrare che $\tilde{K}^{\neq} \in \mathrm{Conv}_p(H)$ si proverà, per il risultato di M. Cowling e A. Mantero ([2]), che $\tilde{K}$ è limitato su $L^p(R^n \times R^n)$ per la convoluzione sorta. A tal fine si costruisce una particolare partizione dell'unità per potersi ricondurre al caso di distribuzioni a supporto compatto per le quali è sufficiente, in virtù del Teorema 1.16, dimostrare la limitatezza su $L^p(R^n \times R^n)$ per la convoluzione ordinaria. Sia $u \in C_c^\infty(R^n R^n)$ tale che

(a) $\operatorname{supp} u \subset ((-1, -1) \times (-1, -1))^n$,

(b) $\|u\|_\infty = 1$,

(c) $u(x, y) = 1$ per $(x, y) \in ((-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}))^n$,

ed inoltre se si definisce $u_{\lambda\mu}(x, y) = u(x + \lambda, y + \mu)$ per $\lambda, \mu \in Z^n$, sia verificata la seguente condizione

(d) $\sum_{\lambda,\mu} u_{\lambda\mu} = 1$.

Evidentemente, $u_{\lambda\mu} \in C_c^\infty(R^n \times R^n)$ e $\operatorname{supp} u_{\lambda\mu} \subset (-1 - \lambda, 1 - \lambda) \times (-1 - \mu, 1 - \mu)$, dove $x \in (-1 - \lambda, 1 - \lambda)$ significa che $x_i \in (-1 - \lambda_i, 1 - \lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sia $K_{\lambda\mu} = u_{\lambda\mu} \cdot \tilde{K}$ e sia $\tilde{u}_{\lambda\mu}(x, y) = u_{\lambda\mu}(x, y) \exp(-\pi i x y)$. Sia $\delta_{\lambda\mu}$ la misura di

Dirac in $(-\lambda, -\mu)$. Ricordando che la convoluzione storta e la convoluzione a destra sono isometrie di $L^p(R^n \times R^n)$, si ha $|||K\times|||_p = |||(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu})\times|||_p$. Poichè per ogni λ e μ, $K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}$ è supportata in uno stesso compatto, per il Teorema I.14, esiste una costante positiva c non dipendente da λ e μ tale che $|||K\times|||_p = |||(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu})x|||_p \leqslant c|||(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) *|||_p = c|||(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} *|||_p$. È facile verificare che $(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu}(x, y) = \exp(\pi i(\lambda y - x\mu))K_{\lambda\mu}(x, y)$; e poichè

$$|||(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} * |||_p = \sup\{\|(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} * g\|_p : g\in L^p(R^n\times R^n)\|g\|_p \leqslant 1\}$$

$$= \sup\{\|(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} * g'\|_p : g'\in L^p(R^n\times R^n) \text{ con } g'(u, v)$$

$$= g(u, v)\exp(\pi i(\lambda v - \mu u)),\ g\in L^p(R^n\times R^n)\|g\|_p\leqslant 1\}$$

ed anche $(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} * g'(x, y) = (K_{\lambda\mu} * g)(x, y)\exp(\pi i(\lambda y - \mu x))$, si ha

$$\|(K_{\lambda\mu}\times\delta_{\lambda\mu}) * \delta_{-\lambda-\mu} * g'\|_p = \|K_{\lambda\mu}\times g\|_p \leqslant |||K_{\lambda\mu} * |||_p .$$

Quindi esiste una costante positiva c non dipendente da λ e μ tale che $|||K_{\lambda\mu}x|||_p \leqslant c|||K_{\lambda\mu} *|||_p$. Si scinde ora la dimostrazione in due parti. Nella prima, sfruttanto l'ipotesi (a) del Teorema 2.1, si prova che la convoluzione storta con $K_{\lambda\mu}$ porta $L^2(R^n\times R^n)$ in sè e per dimostrare tale risultato si fa uso del fatto che se $\|\hat{K}_{\lambda\mu}\|_\infty \leqslant C_{(\lambda\mu)}$, allora si ha $|||K_{\lambda\mu} *|||_2 \leqslant C_{(\lambda\mu)}$. Nella seconda parte, sfruttando l'ipotesi (b) del Teorema 2.1, si prova che la convoluzione storta con $K_{\lambda\mu}$ porta $L^p(R^n\times R^n)$ in sè e per dimostrare tale risultato, non potendo procedere come prima, si usa il risultato contenuto nel teorema di L. Hormander [**5**].

Sia $b(r, \xi) = a(-\xi, -r)$. Evidentemente, b verifica le stesse ipotesi di a. Si supponga dapprima che $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant 3$, dove con $\lambda^2+\mu^2$ si intende $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \mu_i^2$. Poichè $\tilde{u}_{\lambda\mu}\in C_c^\infty(R^n\times R^n)$ si ha che $\tilde{u}_{\lambda\mu}\in L^1(R^n\times R^n)$ e inoltre $b\in L^\infty(R^n\times R^n)$, $\hat{K}_{\lambda\mu} = (u_{\lambda\mu}\tilde{K})^\wedge = \hat{\tilde{u}}_{\lambda\mu} * \hat{K} = \hat{\tilde{u}}_{\lambda\mu} * b$. Quindi $\|\hat{K}_{\lambda\mu}\|_\infty \leqslant \|b\|_\infty \|\hat{\tilde{u}}_{\lambda\mu}\|_1$. Siano ora λ, μ tali che $\lambda^2+\mu^2 > 3$.

$$\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y) = (\hat{\tilde{u}}_{\lambda\mu} * b)(x, y) = \int_{R^n\times R^n} b(x-s, y-t)\hat{\tilde{u}}_{\lambda\mu}(s, t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{R^n\times R^n} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\, b(x-s, y-t)\int_{R^n\times R^n}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)\exp(-2\pi i(p, q)(s, t))\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q.$$

Sia

$$I(s, t) = \int_{R^n\times R^n}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)\exp(-2\pi i(p, q)(s, t))\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q .$$

Sia

$$D^n_{p,q} = (2\pi)^{2n} + (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}))^n .$$

$$D^n_{p,q} \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) = (2\pi)^{2n}(1 + (s^2 + t^2)^n) \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) .$$

$$I(s, t) = \int_{R^n \times R^n} \tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q) D^n_{p,q} \exp(-2\pi i(p, q)(s, t))/(2\pi)^{2n} (1 + (s^2 + t^2)^n) \, dp \, dq$$

$$= (1/(2\pi)^{2n}(1 + (s^2 + t^2)^n)) \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} D^n_{p,q} \tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q) \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) \, dp \, dq .$$

Quindi si ha

$$\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)$$

$$= \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} dp \, dq \, D^n_{p,q} \tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q) \int_{R^n \times R^n} b(x - s, y - t)/(2\pi)^{2n}(1 + (s^2 + t^2)^n) \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) \, ds \, dt.$$

Sia

$$I(p, q) = \int b(x - s, y - t)/(2\pi)^{2n}(1 + (s^2 + t^2)^n) \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) \, ds \, dt .$$

Sia

$$D^{2n+2}_{s,t} = (2\pi)^{4n+2} + (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_i^2}))^{2n+2} .$$

$$D^{2n+2}_{s,t} \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) = (2\pi)^{4n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2}) \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) .$$

Allora

$$I(p, q)$$

$$= \int_{R^n \times R^n} 1/((2\pi)^{4n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2})) D^{2n+2}_{s,t}[b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)] \cdot \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) \, ds \, dt .$$

Quindi si ha

$$\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y) = \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} dp \, dq \, D^n_{p,q} \tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)/((2\pi)^{6n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2}))$$

$$\cdot \int_{R^n \times R^n} D^{2n+2}_{s,t}[b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)] \exp(-2\pi i(p, q)(s, t)) \, ds \, dt .$$

Sviluppando il termine $D^{2n+2}_{s,t}[b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)]$ e tenendo conto delle ipotesi su b, si ha che esiste una costante positiva c' tale che

$$|\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)| \leqslant c' \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} D^n_{p,q} \tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)/(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2}) \, dp \, dq .$$

Nello sviluppo di $D^n_{p,q}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q) = D^n_{p,q}(\exp(-\pi ipq)u_{\lambda\mu}(p, q))$ il termine contenente p e q elevato all'esponente più alto è il seguente $(2\pi)^{2n}(1 + (p^2 + q^2)^n)$ $\exp(-\pi ipq)u_{\lambda\mu}(p, q)$. Esiste quindi una costante positiva c'' tale che

$$|\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)| \leqslant c'' \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} 1/(1 + (p^2 + q^2)^{n+2})\, dp\, dq$$

$$\leqslant c'' \int_{((-1,1)\times(-1,1))^n} 1/(1 + ((p - \lambda)^2 + (q - \mu)^2)^{n+2})\, dp\, dq\,.$$

Poichè per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha $-1 \leqslant p_i;\ q_i \leqslant 1$ ed inoltre $\lambda^2 + \mu^2 > 3$, con semplici considerazioni geometriche si ha che esiste una costante positiva $\tilde{c}$ tale che $1/(1 + ((p - \lambda)^2 + (q - \mu)^2)^{n+2}) \leqslant \tilde{c}/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{n+2})$. Esiste quindi una costante positiva c, non dipendente da λ e μ tale che $|||K_{\lambda\mu}\times|||_2 \leqslant c|||K_{\lambda\mu}*|||_2$ $\leqslant c/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{n+2})$. Poichè $\tilde{K} = \sum_{\lambda,\mu} K_{\lambda\mu}$, si ha che

$$|||\tilde{K}\times|||_2 \leqslant \sum_{\lambda^2+\mu^2\leqslant 3} |||K_{\lambda\mu}\times|||_2 + \sum_{\lambda^2+\mu^2>3} |||K_{\lambda\mu}\times|||_2 < +\infty\,.$$

Quindi $\tilde{K}^{\neq} \in \operatorname{Conv}_2(H)$ e, per quanto visto in precedenza, esiste una costante positiva c_2 tale che $\|Af\|_2 \leqslant c_2\|f\|_2$ per ogni f in $L^2(R^n)$.

Si è visto in precedenza che

$$\hat{K}_{\lambda\mu}(x, y) = \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} dp\, dq\, D^n_{p,q}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)/((2\pi)^{6n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2}))$$

$$\cdot \int_{R^n\times R^n} b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)\, D^{2n+2}_{s,t} \exp(-2\pi i(p, q)(s, t))\, ds\, dt\,.$$

Sia α un multiindice tale che $|\alpha| \leqslant \chi$, essendo χ il primo intero maggiore di $n/2$.

$$D^\alpha \hat{K}_{\lambda\mu}(x, y) = \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} dp\, dq\, D^n_{p,q}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)/((2\pi)^{6n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2}))$$

$$\cdot \int_{R^n\times R^n} D^\alpha b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)\, D^{2n+2}_{s,t} \exp(-2\pi i(p, q)(s, t))\, ds\, dt$$

$$= \int_{\operatorname{supp} u_{\lambda\mu}} dp\, dq\, D^n_{p,q}\tilde{u}_{\lambda\mu}(p, q)/((2\pi)^{6n+2}(1 + (p^2 + q^2)^{2n+2})$$

$$\cdot \int_{R^n\times R^n} D^{2n+2}_{s,t}[D^\alpha b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)] \exp(-2\pi i(p, q)(s, t))\, ds\, dt\,.$$

Tenendo conto delle ipotesi considerate su b, sviluppando il termine $D^{2n+2}_{s,t}[D^\alpha b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)]$ è facile verificare che esiste una costante positiva c_α dipendente dal multiindice α tale che

$$|D^{2n+2}_{s,t}[D^\alpha b(x - s, y - t)/(1 + (s^2 + t^2)^n)]|$$

$$\leqslant c_\alpha(1 + (x - s)^2 + (y - t)^2)^{-|\alpha|/2}/(1 + (s^2 + t^2)^n)^2\,.$$

È dunque possibile trovare una costante positiva $\tilde{c}_\alpha$ dipendente da α tale che

$$|D^\alpha \hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)|^2 \leqslant \tilde{c}_\alpha/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4}(1 + x^2 + y^2)^{|\alpha|}) .$$

Allora esiste una costante c'_α positiva dipendente dal multiindice α tale che

$$\int_{r^2/4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4r^2} |D^\alpha \hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)|^2 \, dx \, dy \leqslant c'_\alpha r^{n-2|\alpha|}/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4}) .$$

Poichè i multiindici in questione sono in numero finito, ponendo $c = \max \{c'_\alpha : \alpha \text{ multiindice}\}$, si ha

$$\int_{r^2/4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4r^2} |D^\alpha \hat{K}_{\lambda\mu}(x, y)|^2 \, dx \, dy \leqslant c r^{n-2|\alpha|}/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4}) .$$

Allora, per il Teorema 1.17, $K_{\lambda\mu}$ è limitata su $L^p(R^n \times R^n)$ per la convoluzione ordinaria e, come risulta dalla dimostrazione del Teorema 1.15, si ha pure che esiste una costante positiva $\tilde{c}_p$ tale che $|||K_{\lambda\mu} *|||_p \leqslant \tilde{c}_p/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4})$. Per quanto visto in precedenza si ha che esiste un'altra costante c'_p positiva tale che $|||K_{\lambda\mu} \times |||_p \leqslant c'_p/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4})$. Poichè $K = \sum_{\lambda,\mu} K_{\lambda\mu}$, si ha pure che $|||K \times |||_p \leqslant \sum_{\lambda,\mu} c'_p/(1 + (\lambda^2 + \mu^2)^{2n+4}) < +\infty$. Esiste quindi una costante positiva c_p tale che $\|Af\|_p \leqslant c_p \|f\|_p$ per ogni $f \in L^p(R^n)$.

Bibliografia

[1] M. Cowling, *A Remsark on twisted-convolution*, Rend. Circ. Mat. Palermo **4** suppl. (1981), 203-209.

[2] M. Cowling and A. Mantero, *Example of twisted-convolution operators* (accettato per la pubblicazione su Lecture Notes in Mathematics).

[3] A. Figà-Talamanca, *Translation invariant operators in L^p*, Duke Math. J. **32** (1965), 495-502.

[4] C. Herz, *The theory of p-spaces with an application to convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 69-82.

[5] L. Hormander, *Estimates for translation invariant operators in L^p-spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93-139.

[6] R. Howe, *Quantum mechanics and partial differential equations*, J. Funct. Anal. **8** (1980), 188-254.

[7] G. Mauceri, *The Wey transform and bounded operators on $L^p(R^n)$*, J. Funct. Anal. **39** (1980), 408-429.

Abstract

The purpose of this paper is to derive sufficient conditions for the boundedness of general operators in the spaces $L^p(R^n)$, $1 < p < +\infty$. *In order to obtain estimates for the norm of operators on* $L^p(R^n)$ *from the corresponding estimates for operators of twisted-convolution on* $L^p(R^n \times R^n)$ *we use the method of transference.*

* * *