Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 309-315

PAOLO GHELARDONI e PIETRO MARZULLI (*)

Su certi processi iterativi per sistemi lineari (**)

1 - In [**2**] Collatz introduce un processo iterativo per operatori monotoni decomponibili che è stato successivamente trattato anche da altri autori come ad esempio Albrecht [**1**] che ne fa una interessante generalizzazione. Nel caso in cui l'operatore si identifichi con una matrice, il metodo conduce, sotto opportune ipotesi, alla determinazione della soluzione di un sistema algebrico lineare fornendola come media dei limiti di due successioni monotone, una non decrescente e l'altra non crescente.

In questa nota si osserva che tale processo iterativo coincide con una versione per intervalli del metodo di Jacobi e di conseguenza si possono estendere anche al metodo degli operatori monotoni certi teoremi di convergenza del metodo di Jacobi e viceversa.

2 - Richiamiamo alcune definizioni e proprietà necessarie per il seguito.

(a) Una matrice $T \in \boldsymbol{R}_{n\times n}$ si dice *isotona* se, per v e $w \in \boldsymbol{R}_n$, da $v \leqslant w$ (1) segue $Tv \leqslant Tw$; si dice invece *antitona* se da $v \leqslant w$ segue $Tv \geqslant Tw$.

(b) Nell'aritmetica degli intervalli se a, b, c, d sono numeri reali con $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, le operazioni fondamentali sono definite dalle formule

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]\,, \qquad [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]\,,$$

$$[a, b]\cdot[c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]\,,$$

$$[a, b]/[c, d] = [a, b]\cdot[1/d, 1/c] \qquad (0 \notin [c, d])\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Via Bonanno 25/B, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 4-XII-1983.

(1) La relazione $v \leqslant w$ significa $v_i \leqslant w_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.

(c) Con la notazione $v(a_i, b_i)$ si indica *un vettore di intervalli* cioè un vettore le cui componenti sono gli intervalli $v_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(d) Posto $X_i = [a_i, b_i]$, la successione di intervalli $\{X_i\}_{i \in N}$ si dice *monotona* se si ha $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots$.

Una successione monotona di intervalli si dice *convergente ad un punto* se $\lim_{n \to \infty} l(X_n) = 0$, dove $l([a, b]) = b - a$.

Le proprietà di monotonia e di convergenza ad un punto si estendono in modo ovvio alle successioni di vettori di intervalli.

Per il vettore di intervalli $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ si usa la norma $\|X\| = \max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|)$, dove per $X_i = [a_i, b_i]$ si è posto $|X_i| = \max(|a_i|, |b_i|)$.

(e) Per un qualunque intervallo $[a, b]$ ed un qualunque numero reale k non nullo si ha

$$k[a, b] = \begin{cases} [ak, bk] & \text{se } k > 0 , \\ [bk, ak] & \text{se } k < 0 . \end{cases}$$

3 - Sia

$$Ax = b , \tag{1}$$

un sistema algebrico lineare di n equazioni in n incognite, essendo A matrice non degenere. Possiamo sempre supporre che tutti gli elementi diagonali di A siano uguali ad 1 in modo che si possa attuare la decomposizione $A = I - T_1 - T_2$, con T_1 isotona e T_2 antitona: T_1 risulta composta dagli eventuali elementi negativi di A cambiati di segno e dai rimanenti elementi tutti uguali a zero; T_2 dagli eventuali elementi positivi di A (non sulla diagonale principale) cambiati di segno e dai rimanenti elementi tutti uguali a zero. Eventualmente una delle matrici T_1 o T_2 può risultare nulla.

In [2] (Cap. III, 21.2) si considerano, per una fissata coppia di vettori $v^{(0)} \leqslant w^{(0)}$, le iterazioni

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= T_1 v^{(k)} + T_2 w^{(k)} + b \\ w^{(k+1)} &= T_1 w^{(k)} + T_2 v^{(k)} + b \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \dots , \tag{2}$$

che definiscono due successioni di vettori $\{v^{(n)}\}$ e $\{w^{(n)}\}$; si dimostra che se risulta

$$v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} , \tag{3}$$

allora è anche

$$v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant v^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)}; \tag{4}$$

inoltre, posto

$$\lim_{n \to \infty} v^{(n)} = v\,, \qquad \lim_{n \to \infty} w^{(n)} = w\,, \tag{5}$$

si ha $\frac{1}{2}(v + w) = u$, essendo u la soluzione del sistema (1).

Per il seguito conviene scrivere la (2) nella forma per componenti

$$\begin{aligned} v_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n t'_{ij} v_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n t''_{ij} w_j^{(k)} + b_i \\ w_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n t'_{ij} w_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n t''_{ij} v_j^{(k)} + b_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2'}$$

dove si è posto $T_1 = (t'_{ij})$ e $T_2 = (t''_{ij})$; per il modo in cui si sono definite T_1 e T_2 si ha

$$t'_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } a_{ij} < 0 \\ 0 & \text{se } a_{ij} \geqslant 0 \end{cases} \qquad t''_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } a_{ij} > 0 \quad i \neq j \\ 0 & \text{se } a_{ij} \leqslant 0 \text{ oppure } i = j\,. \end{cases} \tag{6}$$

4 – Consideriamo la seguente decomposizione di A, nell'ipotesi $a_{ii} \neq 0$,

$$A = D - E - F\,,$$

dove $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, E è formata dagli elementi di A al di sotto della diagonale principale cambiati di segno ed ha tutti gli altri elementi uguali a zero; F è formata dagli elementi di A al di sopra della diagonale principale cambiati di segno ed ha tutti gli altri elementi uguali a zero.

Indicando con X un vettore di intervalli, consideriamo come versione per intervalli del metodo di Jacobi per il sistema (1) le iterazioni definite da

$$X^{(k+1)} = MX^{(k)} + N \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{7}$$

dove $M = D^{-1}(E + F)$, $N = D^{-1}b$ e, nell'ipotesi $\|M\| < 1$ [2], si assume come

[2] Si intende che la norma matriciale qui usata sia compatibile con la norma vettoriale $\|v\| = \max_i |v_i|$ in $\boldsymbol{R}_n$ e quindi anche con la norma introdotta in **2** (d).

vettore di intervalli iniziale quello dei componenti $X_i^{(0)} = [-1, 1]\|N\|/(1 - \|M\|)$ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, in tal modo si è sicuri che la soluzione u del sistema (1) appartiene a $X^{(0)}$ (cf. [**3**], pag. 61).

Per dimostrare un teorema di convergenza del processo iterativo (7) premettiamo due proposizioni.

Lemma 1. *Data una successione di intervalli* $\{T_n\}_{n\in N}$, se $0 \in T_n$ $\forall n \in N$ *e se* $\{T_n\}_{n\in N}$ *converge a zero, allora, per qualunque numero reale* a, *la successione di intervalli* $\{X_n\}_{n\in N} = \{T_n + a\}_{n\in N}$ *converge ad* a.

Dim. Detti t_n' e t_n'' rispettivamente il primo ed il secondo estremo di T_n, per ipotesi si ha $t_n' \leqslant 0 \leqslant t_n''$ $\forall n \in N$, ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} t_n' = \lim_{n\to\infty} t_n'' = 0 . \tag{8}$$

Posto $T_n + a = X_n$ e $X_n = [x_n', x_n'']$, si ha

$$x_n' = t_n' + a , \quad x_n'' = t_n'' + a \qquad n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{9}$$

quindi da $t_n' \leqslant 0$ e $t_n'' \geqslant 0$ seguono rispettivamente

$$x_n' \leqslant a \quad \text{e} \quad x_n'' \geqslant a \quad \text{ossia} \quad x_n' \leqslant a \leqslant x_n'' \qquad \forall n \in N ;$$

inoltre dal confronto delle (8) con le (9) si ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = a .$$

Lemma 2. *Data una successione di vettori di intervalli* $\{V^{(n)}\}_{n\in N}$, *se* $\forall n \in N$ *si ha* $O \subset V^{(n)}$ *(essendo* O *il vettore nullo) e se* $\{V^{(n)}\}_{n\in N}$ *converge al vettore nullo, allora per qualunque vettore reale* α *la successione di vettori di intervalli* $\{X^{(n)}\}_{n\in N} = \{V^{(n)} + \alpha\}_{n\in N}$ *converge ad* α.

Dim. È una immediata estensione di quella del Lemma 1.

Teorema. *Dato il sistema a matrice non singolare* $Ax = b$, *sia* $\|M\| < 1$ *in modo che l'ordinario metodo di Jacobi*

$$x_{k+1} = Mx_k + N$$

converga alla soluzione u *del sistema dato; si consideri la successione di intervalli*

$\{X^{(n)}\}_{n\in N}$ *generata dal processo iterativo* (7); *allora, se* $X^{(0)}$ *è un qualunque vettore di intervalli contenente* u, *ogni* $X^{(n)}$ *contiene* u *e la successione* $\{X^{(n)}\}_{n\in N}$ *converge ad* u.

Dim. Poichè per ipotesi $u\subset X^{(0)}$, per la prima parte della tesi basta mostrare che da $u\subset X^{(n)}$ segue $u\subset X^{(n+1)}$. Infatti essendo $u=Mu+N$, sottraendo membro a membro dalla (7) si ha $X^{(k+1)}-u=M(X^{(k)}-u)$, da cui, ponendo $X^{(k)}-u=V^{(k)}$,

$$V^{(k+1)}=MV^{(k)}\,. \tag{10}$$

Se $X^{(k)}$ contiene u allora $V^{(k)}$ contiene il vettore nullo e perciò, qualunque sia M, anche $V^{(k+1)}$ contiene il vettore nullo, cioè $X^{(k+1)}$ contiene u.

Dalla (10) segue poi (vedi nota (3))

$$\|V^{(k+1)}\|\leqslant\|M\|\,\|V^{(k)}\|\,,\qquad \text{da cui}\qquad \|V^{(k+1)}\|\leqslant\|M\|^{k+1}\|V^{(0)}\|\,,$$

ed essendo $\|M\|<1$ la successione di vettori di intervalli $\{V^{(n)}\}_{n\in N}$, in cui ogni $V^{(n)}$ contiene il vettore nullo, converge al vettore nullo; d'altra parte si ha, per ogni n, $X^{(n)}=V^{(n)}+u$, perciò, per il Lemma 2, segue che la successione di vettori di intervalli $\{X^{(n)}\}_{n\in N}$ converge al vettore u.

Dalla teoria dei metodi iterativi ordinari si ha poi il seguente

Corollario. *Se la matrice* A *del sistema* (1) *ha predominanza diagonale forte oppure se è irriducibile ed ha predominanza diagonale debole, allora vale la tesi del teorema precedente.*

5 – In questo numero mostriamo la coincidenza formale delle iterazioni (2) e delle iterazioni (7).

Torniamo a considerare la decomposizione $A=I-T_1-T_2$ definita in **3** ed esplicitiamo le iterazioni (2): per $k=0$ si ha dalle (2')

$$\begin{aligned} v_i^{(1)} &= \sum_{j=1}^{n} t'_{ij}v_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{n} t''_{ij}w_j^{(0)}+b_i \\ w_i^{(1)} &= \sum_{j=1}^{n} t'_{ij}w_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{n} t''_{ij}v_j^{(0)}+b_i\,. \end{aligned}\qquad i=1,2,\dots,n \tag{11}$$

Operiamo ora sul sistema $Ax=b$ con il metodo di Jacobi per intervalli prendendo come vettore iniziale il vettore di intervalli $Z^{(0)}(v_i^{(0)},w_i^{(0)})$.

Se A è ad elementi diagonali unitari, come abbiamo supposto, risulta

$M = E + F$ ed il primo passo del metodo di Jacobi produce un vettore di intervalli $Z^{(1)}(e_i, f_i)$ dato da

$$Z^{(1)}(e_i, f_i) = (E + F)Z^{(0)}(v_i^{(0)}, w_i^{(0)}) + b;$$

scrivendo questa uguaglianza per componenti si ha

$$[e_i, f_i] = \sum_{j=1}^{n} (E + F)_{ij}[v_j^{(0)}, w_j^{(0)}] + b_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n\,, \qquad \text{ossia}$$

$$[e_i, f_i] = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} - a_{ij}[v_j^{(0)}, w_j^{(0)}] + b_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n\,,$$

da cui ancora, per la proprietà (e) di **2** e per le (6)

$$[e_i, f_i] = [\sum_{j=1}^{n} t'_{ij}v_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} t''_{ij}w_j^{(0)} + b_i, \sum_{j=1}^{n} t'_{ij}w_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} t''_{ij}v_j^{(0)} + b_i] \qquad i = 1, 2, \dots, n;$$

basta quindi confrontare con le (11) per concludere che

$$e_i = v_i^{(1)}\,, \qquad f_i = w_i^{(1)} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n\,.$$

6 – Da quanto dimostrato in **5** e dal Corollario alla fine di **4** si deduce che, per il metodo di decomposizione (2), l'ipotesi (3) può essere sostituita dall'ipotesi che A sia a predominanza diagonale forte oppure irriducibile ed a predominanza diagonale debole; con tale sostituzione non è più possibile asserire in generale la validità delle relazioni (4) ma restano pur sempre valide le (5) dove si deve ammettere che sia $v = w = u$.

Il discorso può anche rovesciarsi permettendo di affermare che se nel metodo (7) di Jacobi gli estremi dei primi due intervalli $X^{(0)}$ e $X^{(1)}$ verificano l'ipotesi (3), allora per gli estremi degli intervalli successivi generati dal metodo valgono le relazioni (4) e (5). In tal caso, se il metodo di Jacobi non fosse convergente, la soluzione u potrebbe ugualmente ottenersi come valore medio dei due limiti (5).

Bibliografia

[1] J. Albrecht, *Monotone Iterationsfolgen und ihre Verwendung zur Lösung Linearer Gleichungssysteme,* Numer. Math. **3** (1961), 345-358.

[2] L. COLLATZ, *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Press, New York 1966.

[3] R. E. MOORE, *Methods and applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia 1979.

Abstract

A method for algebraic linear systems based on a suitable decomposition of a matrix operator [2] *is compared with an interval version of Jacobi method. The result is the coincidence of the methods. That allows to extend some known convergence conditions.*

* * *