Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 265-274

PAOLA MAGNAGHI DELFINO (*)

Soluzioni periodiche per i fluidi di Bingham non omogenei (**)

Introduzione

Nella presente nota si dimostra che la disequazione variazionale che rappresenta il moto di un fluido di Bingham non omogeneo (cioè con densità non costante) in un insieme aperto e limitato di R^3 ammette una soluzione periodica.

Questo lavoro generalizza un risultato di R. Salvi $[4]_2$, dove viene dimostrata l'esistenza di una soluzione periodica per fluidi viscosi incomprimibili non omogenei.

Il metodo che useremo è lo stesso usato da R. Salvi $[4]_1$.

In **1** si formula il problema. In **2** si dà il quadro funzionale e si enuncia il teorema principale. In **3** si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica di un sistema d'equazioni ausiliarie. Infine in **4** si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica della disequazione variazionale associata ai fluidi di Bingham.

1 - Formulazione del problema

Sia $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ un insieme aperto e limitato con frontiera Γ e sia $Q = \Gamma \times (0, T)$.

Il moto di un fluido di Bingham non omogeneo con densità $\varrho = \varrho(x, t)$ soddisfacente la condizione al contorno $u(x, t) = 0$ per $x \in \Gamma$ e sottoposto a

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Ricevuto: 23-XI-1983.

una forza esterna f, è descritto (cfr. [3]) dalla disequazione variazionale

$$(1.1)\qquad (\varrho \frac{\partial u}{\partial t}, v-u)+(\varrho(u\cdot\nabla)u, v-u)+a(u, v-u)+J(v)-J(u)\geqslant(\varrho f, v-u)$$

e dalla equazione di continuità

$$(1.2)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+u\cdot\nabla\varrho=0,$$

dove

$$(1.3)\qquad J(v)=g\int_\Omega (D_{II}(v)^{\frac12}\,dx)\,,$$

$$(1.4)\qquad a(u,v)=2\mu\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}D_{i,j}(u)\,D_{i,j}(v)\,dx\,,\qquad D_{II}(v)=\sum_{j,i=1}^{3}\tfrac12 D_{i,j}(v)\,D_{i,j}(v),$$

$$D_{i,j}(v)=\tfrac12(v_{i,j}+v_{j,i})\,,\qquad v_{i,j}=\partial v_i/\partial x_j\,,\qquad v_{j,i}=\partial v_j/\partial x_i\,.$$

Le costanti g e μ sono rispettivamente la soglia di plasticità e la viscosità del fluido di Bingham non omogeneo.

Noi considereremo la disequazione variazionale (1.1) e l'equazione di continuità (1.2) con le seguenti condizioni iniziali

$$(1.5)\qquad u(x,0)=u^0(x)\,,$$

$$(1.6)\qquad \varrho(x,0)=\varrho^0(x)\qquad \text{con } 0<\alpha\leqslant\varrho^0(x)\leqslant\beta<\infty \text{ ed } \alpha,\beta \text{ costanti}\,.$$

2 - Definizione di soluzione debole

Per dare la definizione di soluzione debole della disequazione variazionale (1.1) introduciamo i seguenti spazi funzionali

$$\mathscr{V}=\{\varphi\,|\,\varphi\in(\mathscr{D}(\Omega))^3\colon \operatorname{div}\varphi=0\}\ (^1)\,,$$

V è l'aderenza di $\mathscr{V}$ in $(H^1(\Omega))^3$ e H è l'aderenza di $\mathscr{V}$ in $(L^2(\Omega))^3$ V è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $((v,u))=\sum_{i=1}^{3}(\nabla v_i,\nabla u_i)$, dove (v,u) è il prodotto scalare in $(L^2(\Omega))^3$.

Poniamo inoltre $\|v\|=((v,v))$ e $|v|=(v,v)$ e indichiamo con V' il duale di V.

---

(1) $(\mathscr{D}(\Omega))^3=$ spazio delle funzioni di C^∞ a supporto compatto. Tutte le funzioni sono reali.

$(H^1(\Omega))^3$ è il classico spazio di Sobolev di ordine uno su $(L^2(\Omega))^3$.

Inoltre consideriamo $W = \{\psi \in H^2(\Omega)\colon \partial\psi/\partial n = 0\}$, dove n è la normale esterna ad Ω e

$$\Phi = \{v \,|\, v \in L^2(0, T;\ V)\colon \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T;\ L^{6/5}(\Omega));\ \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^\infty(0, T;\ L^{3/2}(\Omega))\} .$$

Consideriamo ora per u, v, w la seguente espressione

$$b(u, v, w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i v_{j,i} w_j \,dx; \qquad \text{si ha} \qquad b(u, v, v) = 0 .$$

Si può verificare (cfr. [4]$_1$) che se u è una soluzione regolare di (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) allora (formalmente)

$$(2.1) \qquad \int_0^T (\varrho u, -\frac{\partial v}{\partial t})\,dt - \iint_Q \varrho u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx\,dt + \int_0^T [a(u, v-u)$$
$$+ J(v) - J(u)]\,dt - \int_0^T (f\varrho, v-u)\,dt \geqslant -\tfrac{1}{2}\big(\varrho(T)v(T), v(T)\big) - \tfrac{1}{2}(\varrho^0 u^0, u^0) + \big(\varrho^0 u^0, v(0)\big).$$

Ora diamo la definizione di soluzione debole.

Si dice che $\{u, \varrho\}$ è una *soluzione debole* del problema (1.1) (1.2), (1.5), (1.6) se $u \in L^2(0, T;\ V)$, $\varrho \in L^\infty(Q)$ e soddisfano le relazioni

$$(2.2) \qquad \int_0^T (\varrho u, -\frac{\partial v}{\partial t})\,dt - \iint_Q \varrho u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx\,dt + \int_0^T [a(u, v-u) + J(v) - J(u)]\,dt$$
$$- \int_0^T (\varrho f, v-u)\,dt$$
$$\geqslant -\tfrac{1}{2}\big(\varrho(T)v(T), v(T)\big) + \big(\varrho^0 u^0, v(0)\big) - \tfrac{1}{2}(\varrho^0 u^0, u^0) \qquad \forall v \in \Phi ,$$

$$(2.3) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \cdot \nabla \varrho = 0 .$$

Il risultato principale del lavoro consiste nella determinazione di una soluzione debole del problema (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) tale che $\{u^0, \varrho^0\} = \{u(T)\ \varrho(T)\}$.

Infatti si dimostra il seguente

Teorema *Sia* $f \in L^2(0, T; H)$ *periodica di periodo* T, $\varrho^0 \in L^\infty$, $0 < \alpha \leqslant \varrho^0 \leqslant \beta \leqslant 1$ (2). *Allora esiste almeno una soluzione debole* $\{u, \varrho\}$ *tale che*

$$u \in L^2(0, T;\ V) \cap L^\infty(0, T;\ H) \qquad \varrho \in L^\infty(Q) , \qquad \{u^0, \varrho^0\} = \{u(T), \varrho(T)\} .$$

(2) Si assume $\varrho^0 \geqslant \alpha > 0$ per semplicità, ma non è essenziale.

Per dimostrare il teorema si studia un sistema ausiliario e si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica di tale sistema.

3 - Sistema ausiliario

Si considera una famiglia di approssimazioni interne $\mathscr{V}_m \subset \mathscr{V}$. Si assume che: $\mathscr{V}_m$ sia un sottospazio di $\mathscr{V}$ di dimensione m; $\forall v \in \mathscr{V}_m$ esiste una sottosuccessione $v_m \in \mathscr{V}_m$ tale che $v_m \to v$ in $\mathscr{V}$ per $m \to +\infty$.

Tutte le componenti di v in $\mathscr{V}_m$ sono funzioni sufficientemente regolari. Si indica con P_m l'operatore di proiezione definito in $\mathscr{V}$ a valori in $\mathscr{V}_m$.

Si consideri il seguente sistema

$$\varrho^m \left(\frac{\partial u_i^m}{\partial t} + P_m u_j^{m-1} \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j}\right) - \mu \Delta u_i^m + \tilde{J}^m u_i^m = \varrho^m f_i - \frac{1}{2m} \Delta \varrho^m u_i^m \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \varrho^m}{\partial t} + (P_m u^{m-1} \nabla) \cdot \varrho^m = \frac{1}{m} \Delta \varrho^m, \quad \operatorname{div} u^m = 0\,, \tag{3.2}$$

$(m \geqslant 1)$ con le condizioni

$$u^m(x, 0) = u_0^m\,, \tag{3.3}$$

$$\varrho^m(x, 0) = \varrho_0^m\,, \qquad u^m(x, t) = 0 \qquad \text{su } \Sigma = T \times (0, T)\,, \tag{3.4}$$

dove $\tilde{J}^m$ è l'operatore associato alla forma bilineare (3.6) definita sotto.

Le funzioni ϱ^m e u^m sono soluzioni deboli del problema (3.1)-(3.4) se

(i) $u^m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; \mathscr{V})$,

$\varrho^m \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; W) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap L^4(0, T; W_4^2)$ (3).

(ii) L'equazione (3.2) è soddisfatta quasi ovunque in Q.

(iii) $\forall v \in L^2(0, T; \mathscr{V})$ valga

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho^m u^m), v\right) dt - b(\varrho^m P_m u^{m-1}, v, u^m) \\ + \int_0^T [a(u^m, v) + \langle J_m(v), v\rangle] dt = \int_0^T [(\varrho^m f, v) - \frac{1}{2m} (\Delta \varrho^m u_i^m, v)]\, dt\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3) $W^{2,4}$ è l'usuale spazio di Sobolev d'ordine 2 su L^4.

dove

$$\langle J'_m(u), v\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_m(u+tv)\,|_{t=0} = \int_\Omega \varrho\big(D_{II}(u)\big)^{1/m-1/2} D_{ij}(u) D_{ij}(v)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.6}$$

$$\langle J'_m(v), v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in \mathscr{V}\,.$$

Teorema 3.1. *Sia* $f \in L^2(0, T; H)$ *periodica di periodo* T, $\varrho^m \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $0 < \alpha \leq \varrho_0^m \leq \beta \leq 1$. *Allora esiste una e una sola soluzione debole del problema* (3.1)-(3.4) *tale che*

$$u^m \in C(0, T; H), \qquad \frac{\partial \varrho^m u^m}{\partial t} \in L^2(0, T; V'),$$

$$u_0^m = u^m(T), \qquad \varrho_0^m = \varrho^m(T).$$

Dim. Dimostriamo ora l'esistenza di una soluzione del sistema (3.5). Si usa un metodo di approssimazione di Faedo-Galerkin. Sia $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ una base di V formata da funzioni sufficientemente regolari e si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\Big(\varrho^m \frac{\partial u_n^m}{\partial t}, \omega_j\Big) + a(u_n^m, w_j) + b(\varrho^m P_m u_n^{m-1}, u_n^m, w_j) \tag{3.7}$$

$$+ \frac{1}{2m}(\Delta \varrho^m u_n^m, w_j) + \langle J'_m(u_n^m), w_j\rangle = (\varrho^m f, w_j) \qquad j = 1 \dots n\,,$$

con le condizioni iniziali $u_m^n(x, 0) = u_{0,n}^m$, ove $u_n^m = \sum_{k=1}^\infty g_{n,k}^m(t) w^k$. Con procedimenti standard si dimostra (cfr. [2]) che esiste una soluzione ϱ^m dell'equazione (3.2) tale che $\forall m$

$$0 < \alpha \leq \varrho^m \leq \beta \qquad \frac{1}{m}\int_0^T \|\varrho^m\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t \leq c_1\,,$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\varrho^m\|_{H^1} + \frac{1}{m}\int_0^T \|\varrho^m\|_W^2\,\mathrm{d}t \leq c_2\,.$$

Dalla teoria della regolarità per l'equazione del calore e dalla relazione

$$\|\nabla \varrho_m\|_{L^4(\Omega)} \leq |\Delta \varrho_m|^{1/2} \|\varrho_m\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\,,$$

si ha che

$$\Delta \varrho_m \in L^4(Q)\,, \qquad \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} \in L^4(Q)\,.$$

Dalla teoria delle equazioni ordinarie si ottiene un numero $0 < t_n^m \leqslant P$ e funzioni $g_{nj}^m(t)$ assolutamente continue in $(0, t_n^m)$ che soddisfano (3.7) per quasi ogni $t \in (0, t_n^m)$.

Mediante stime a priori standard si mostra che u_n^m esiste in tutto $(0, T)$. A tale proposito moltiplichiamo la (3.7) per $g_{nj}^m(t)$ e sommiamo su j da 1 a n, ottenendo

$$(3.8) \qquad \left(\varrho^m \frac{\partial u_n^m}{\partial t}, u_n^m\right) + a(u_n^m, u_n^m) + b(\varrho^m P_m u_n^{m-1}, u_n^m, u_n^m) + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m u_n^m, u_n^m) + \langle J'_m(u_n^m), u_n^m\rangle = (\varrho^m f, u_n^m)\,.$$

Moltiplichiamo per $(u_n^m)^2/2$ l'equazione (3.2) ed integriamo rispetto a x, ottenendo

$$(3.9) \qquad \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varrho^m}{\partial t}(u_n^m)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varrho^m(P_m u^{m-1})_i}{\partial x_i}(u_n^m)^2\,dx - \frac{1}{2m}\int_\Omega \Delta\varrho^m(u_n^m)^2\,dx = 0\,.$$

Sommando la (3.8) con la (3.9) abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho^m(u_n^m)^2\right)dx + a(u_n^m, u_n^m) + \langle J'_m(u_n^m), u_n^m\rangle = (\varrho^m f, u_n^m)\,,$$

da cui si deduce che

(3.10) u_n^m appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ indipendente da m e n.

(3.11) $\dfrac{\partial}{\partial t}(\varrho^m u_n^m)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0, T; V)$ indipendente da n.

Dalle (3.10) e (3.11) si ottiene

$$(3.12) \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n^m \underset{L^2(0,T;V)}{=} u \qquad \text{nella topologia debole;}$$

$$(3.13) \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n^m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} u \qquad \text{nella topologia debole *;}$$

$$(3.14) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho^m u_n^m) \underset{L^2(0,T;V')}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho^m u^m) \qquad \text{nella topologia debole.}$$

Si deduce che u^m è soluzione delle (3.5), è unica e verifica la (3.3).
Mostriamo ora che $u^m \in C(0, T; H)$. Otteniamo (cfr. [4]$_1$) che u^m verifica la relazione

$$(3.15) \qquad \int_0^t \Big\{ \Big(\varrho^m \frac{\partial v}{\partial t}, v - u^m\Big) + \int_\Omega (\varrho^m P_m u^{m-1})_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(v - u^m)_i \, dx$$

$$+ a(u^m, v - u^m) + \langle J'_m(u^m), v - u^m\rangle - (\varrho^m f, v - u^m) + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m v, v - u^m)$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta\varrho^m u^m, v - u^m)\Big\} \, dt \geq -\frac{1}{2}\,|\sqrt{\varrho_m(t)}\,(u_m(t) - v(t))|^2 - \frac{1}{2}|\sqrt{\varrho_m(0)}\,(v(0) - u^m(0))|^2,$$

per quasi ogni $t \in (0, T)$ e $\forall v \in L^2(0, T; V)$ tale che $\partial v/\partial t \in L^2(Q)$. Sia ora u^m_η una soluzione dell'equazione

$$\eta \frac{\partial}{\partial t} u^m_n + u^m_n = u^m \qquad u^m_n(0) = u^m_0 \,,$$

e ponendo nella (3.5) $v = u^m_\eta$ si ha

$$\eta \int_0^t |\sqrt{\varrho_m}\,(\frac{\partial u^m}{\partial t}|^2 \, dt + \int_0^T \Big\{ \int_\Omega (\varrho^m P_m u^{m-1})_j \frac{\partial u^m_{\eta i}}{\partial x_j}(u^m_\eta - u^m)_i \, dx$$

$$+ a(u^m, u^m_\eta - u^m) + \langle J'_m(u^m), u^m_\eta - u^m\rangle - (\varrho^m f, u^m_\eta - u^m) + \frac{1}{2m}(D\varrho^m u^m_\eta, u^m_\eta - u^m)$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta\varrho^m u^m, u^m_\eta - u^m)\Big\} \, dt \geq \frac{1}{2}\,|\sqrt{\varrho_m(t)}\,(u^m_\eta(t) - u^m(t))|^2 , \qquad \text{cioè}$$

$$(3.16) \qquad |u^m_\eta(t) - u^m(t)|^2 \leq c \int_0^T \Big\{ \int_\Omega \varrho^m (P_m u^{m-1})_i \frac{\partial u^m_{\eta i}}{\partial x_j}(u^m_\eta - u^m)_i \, dx$$

$$+ a(u^m, u^m_\eta - u^m) + \langle J'_m(u^m), u^m_\eta - u^m\rangle + \frac{1}{2m}\big(\Delta\varrho^m(u^m + 2u^m_\eta), u^m_\eta - u^m)\Big\} \, dt \,.$$

Il secondo membro della (3.16) tende a zero per $n \to 0$ uniformemente rispetto a t per cui $u^m(t)$ è continua da $[0, T]$ in H.

Mostriamo ora che esiste una soluzione della (3.5) tale che $u^m_n(0) = u^m_n(T)$.

Supponiamo che ϱ^m sia periodica cioè che $\varrho^m(0) = \varrho^m(T)$.

Consideriamo l'applicazione S: $\sqrt{\varrho^m(0)}\,u^m_{n_0} \to \sqrt{\varrho^m(0)}\,u^m_n(T)$. L'applicazione S trasforma lo spazio vettoriale $G = \{v \,|\, v \in (L^2(\Omega))^3,\ v = \sqrt{\varrho_0}\,u,\ u \in V_n = \text{spazio generato da } w_1 \dots w_n\}$ in sè.

Dimostriamo che S è continua in H e trasforma opportuni insiemi limitati di H in sè.

Per dimostrare che S è continua consideriamo due soluzioni

$$u_n^m = \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(t) w_j\,, \qquad \tilde{u}_n^m = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{nj}(t) w_j$$

della (3.5) corrispondenti a valori iniziali $u_{n_0}^m$ e $\tilde{u}_{n_0}^m$; dalla (3.5) otteniamo

$$\Big(\varrho^m \frac{\partial(u_n^m - \tilde{u}_n^m)}{\partial t}, \omega_j\Big) + \int_\Omega \varrho^m (P_m u^{m-1})_i (u_n^m - \tilde{u}_n^m)_k \frac{\partial w_{j/k}}{\partial x_i}\, dx \tag{3.17}$$
$$+ a(u_n^m - \tilde{u}_n^m, w_j) + \langle J'(u_n^m - \tilde{u}_n^m), v\rangle + \frac{1}{2m}\langle \Delta\varrho^m (u_n^m - \tilde{u}_n^m), \omega_j\rangle = 0\,.$$

Moltiplichiamo la (3.17) per g_{nj} e sommiamo su j da 1 a n e otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^m \frac{\partial}{\partial t}(u_n^m - \tilde{u}_n^m)^2\, dx + \int_\Omega \varrho^m (P_m u^{m-1})_i \Big(\frac{\partial(u_n^m - \tilde{u}_n^m)_j}{\partial x_i}\Big)(u_n^m - \tilde{u}_n^m)_j\, dx \tag{3.18}$$
$$+ a(u_n^m - \tilde{u}_n^m, u_n^m - \tilde{u}_n^m) + \langle J'(u_n^m - \tilde{u}_n^m), (u_n^m - \tilde{u}_n^m)\rangle$$
$$+ \frac{1}{2m}\big(\Delta\varrho^m (u_n^m - \tilde{u}_n^m), u_n^m - \tilde{u}_n^m\big) = 0\,.$$

Moltiplichiamo la (3.2) per $(u_n^m - \tilde{u}_n^m)^2/2$ ed integriamo su Q e sommiamo il risultato a (3.19) ottenendo così

$$|\sqrt{\varrho^m(0)}\,(u_n^m(t) - \tilde{u}_n^m(t)| \leqslant c\,|\sqrt{\varrho^m(0)}\,(u_n^m(0) - \tilde{u}_n^m(0))|\,.$$

Quindi la continuità di S è dimostrata.

Dimostriamo ora che S trasforma una sfera di raggio B_R di centro l'origine e raggio R (da determinare) in sè.

Consideriamo l'equazione

$$\Big(\varrho^m \frac{\partial u_n^m}{\partial t}, u_n^m\Big) + \int_\Omega \varrho^m (P_m u^{m-1})_j u_{ni}^m \frac{\partial u_{ni}^m}{\partial x_j}\, dx \tag{3.19}$$
$$+ a(u_n^m, u_n^m) + \langle J'(u_n^m), u_n^m\rangle + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m u_n^m, u_n^m) - (\varrho^m f, u_n^m) = 0\,.$$

Si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho^m (u_n^m)^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^m (u_n^m)^2\, dx \leqslant \frac{1}{2} c|f|^2\,, \qquad \text{da cui}$$

$$\int_\Omega \varrho^m(T)\big(u_n^m(T)\big)^2\, dx \leqslant \exp(-cT)\int_\Omega \varrho^m(0)(u_{n_0}^m)^2\, dx + c\int_0^T |f|^2\, dt\,, \qquad \text{quindi}$$

$$\int_\Omega \varrho^m(T)\big(u_n^m(T)\big)^2\, dx \leqslant \exp(-cT)\int_\Omega \varrho_0^m (u_{n_0}^m)^2\, dx + c_1\int_0^T |f|^2\, dt\,.$$

Scelto R in modo tale che $R \geqslant c_1 \int_0^T |f|^2/(1-\exp(-cT))\,dt$ si ottiene che S trasforma la sfera di centro l'origine e raggio R in sè.

Quindi l'applicazione S muta ogni sfera dello spazio euclideo con centro l'origine e raggio R in sè.

Da ciò segue, applicando il teorema di punto fisso, che esiste un $v_0 = \sqrt{\varrho^m(0)}\,u^m_{n_0}$ appartenente a G tale che $S(\sqrt{\varrho^m(0)}\,u^m_{n_0}) = \sqrt{\varrho^m_0}\,u^m_n(T)$. Quindi preso come dato iniziale $u^m_{n_0} = v_0/\sqrt{\varrho^m(0)}$ abbiamo che la corrispondente funzione $u^m_n(t)$ soddisfa la relazione $u^m_n(0) = u^m_n(T)$ ed è soluzione di (3.7).

In modo analogo si dimostra che $\varrho^m(0) = \varrho^m(T)$.

In seguito sceglieremo $\nabla\varrho^m(0)$ in modo che

$$c_3/(1-\exp(-T/m)) \leqslant \nabla\varrho^m(0) \leqslant c_4 m^3 .$$

4 - Dimostrazione del teorema principale

Usando lo stesso procedimento seguito in [**3**] ed in [**4**]$_3$ ed osservando che $|\int_n^T (J'(u), 1/h \int_{t-h}^t u_n(s)\,ds)| < c/\sqrt{h}$, si ottiene

$$\int_0^{T-h} |u^m(t+h) - u^m(t)|^2\,dt \leqslant ch \qquad \forall h > 0 , \tag{4.1}$$

ove c e h sono indipendenti da m e u^m_n è una soluzione della (3.7). Allora dalle (3.10) e (4.1) si ottiene che u^m_n appartiene ad un insieme relativamente compatto di $L^p(0, T; (L^Q(\Omega))^3)$; per $p \in [2, +\infty)$ e $q \in [2, 6)$: $(1/p) + (3/2q) > 3/4$. Per $P_m u^{m-1}$ valgono le stesse stime di u^{m-1} e quindi otteniamo che:

$$\lim_{m\to+\infty} u^m \underset{L^2(0,T;V)}{=} u \quad \text{nella topologia debole;} \tag{4.2}$$

$$\lim_{m\to+\infty} P_m u^{m-1} \underset{L^2(0,T;V)}{=} u \quad \text{nella topologia debole;} \tag{4.3}$$

$$\lim_{m\to+\infty} u^m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} u \quad \text{nella topologia debole *;} \tag{4.4}$$

$$\lim_{m\to+\infty} u^m \underset{L^P(0,T;(L^P(\Omega))^3)}{=} u \quad \text{nella topologia forte;} \tag{4.5}$$

$$\lim_{m\to+\infty} P_m u^{m-1} \underset{L^P(0,T;(L^Q(\Omega))^3)}{=} u \quad \text{nella topologia forte;} \tag{4.6}$$

$$\lim_{m\to+\infty} \varrho^m \underset{L^\infty(Q)}{=} \varrho \quad \text{nella topologia debole * .} \tag{4.7}$$

Dalle (4.6) e (4.7) segue che

$$\lim_{m\to+\infty} (P_m u^{m-1})_i\,\varrho^m \underset{L^2(Q)}{=} u_i\,\varrho \quad \text{nella topologia debole.}$$

Considerando la (3.2) nella forma

$$\frac{\partial \varrho^m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(P_m u^{m-1} \varrho^m) - \frac{1}{m} \Delta \varrho^m = 0 \,,$$

e dato che $1/m \int_0^T \|\nabla \varrho^m\|^2_{L^2(Q)} dt \leqslant C$, segue che

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \int_0^T (\Delta \varrho^m, \varphi)\, dt = 0 \qquad \forall \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))\,.$$

Quindi

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\partial \varrho^m}{\partial t} \underset{L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))}{=} \partial \varrho / \partial t \quad \text{nella topologia debole}\,. \tag{4.8}$$

L'equazione (3.2) dà al limite

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \varrho) = 0 \,,$$

e dalle (4.7)-(4.8) segue che $\varrho^m(x, 0) \to \varrho(x, 0)$ in $H^{-1}(\Omega)$ debolmente, perciò $\varrho(x, 0) = \varrho_0(x)$.

Procedendo come in [**3**] si ottiene che u^m soddisfa (2.3). Così è dimostrato il teorema.

Bibliografia

[**1**] G. DUVAUT et J. L. LIONS, *Les inequations en Mécanique et en Physique*, Dunoud Editeur Paris.

[**2**] A. V. KAJIKOV and T. SMAGULOV, *The correctness of a boundary value problem for a model of nonhomogeneous fluid with diffusion*, Dokl. Akad Nauk SSSR **234** (1977), 330-332.

[**3**] J. L. LIONS, *Problems connected with Navier-Stokes équation. Nonlinear evolution équations*, Editeur G. Crandall Academic Press 1978.

[**4**] R. SALVI: [•]$_1$ *Soluzioni periodiche delle equazioni dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei* (in corso di stampa); [•]$_2$ *Sui moti periodici dei fluidi di Bingham*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **108** (1974), 778-788; [•]$_3$ *Disequazioni variazionali per i fluidi viscosi incomprimibili non omogenei*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 453-466.

Abstract

We prove the existence of a periodic solution for the flows of a nonhomogeneous Bingham's fluid in R^3.

* * *